

環の fibre product の応用

高知大理 小駒哲司 (Tetsushi Ogoma)

次の問を考える。

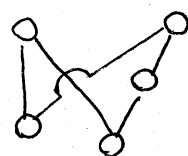
問 1. 環 A が universally catenary であれば, A は codimension function, すなわち $\varphi: \text{Spec } A \rightarrow \mathbb{Z}$ で $\varphi(\mathfrak{p}) - \varphi(\mathfrak{q}) = \text{ht } \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$) を満たすもの, をもつか?

この発端は次のことからである。よく知られているように A が dualizing complex をもてば, A は (1) universally catenary (2) codimension function をもつ (3) canonical module をもつ (4) formal fibre が Gorenstein (5) どんな有限生成 A -algebra B についても Gorenstein locus $\text{Gor } B$ が $\text{Spec } B$ の Zariski open set となる, 等が成立する。

逆に, local の場合には, 本質的に (1), (3), (4) の性質をもてば, A は dualizing complex をもつことを [3] で示した。これを local でない場合にも拡張したいわけであるが, この場合 (4) の代わりに, (4) + (5) が必要となることはすぐわかるが

(1)の代わりに、(1)+(2)が本当に必要となるかというのが、この問である。

A が local 又は domain の場合は、問1が肯定的であることはすぐわかる。反例が作れるとして、最も簡単なものと考えられるのは、素 ideal 鎖の内に右図を含むものである。但しここで  は、 $\circ$ が素 ideal で上が下を含みかつこの間には、素 ideal が存在しないことを意味する。



もう一つの問を考えるのに、次の定義を思い出しておこう。

A -module M が local ring A の big Cohen Macaulay module とは、 M -sequence $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n = \dim A$) が存在して、 $M_{(a_1, \dots, a_n)} M \neq 0$ となる時に言う。 M -sequence になるかどうかということは、 $a_1, \dots, a_n$ の順序等にも依存するので、正確には M は $a_1, \dots, a_n$ について big Cohen Macaulay module ということになる。

さて、 M が balanced big Cohen Macaulay A -module (b.b.C-M A -module と略す) であるとは、 M が A のどんな system of parameters (s.o.p と略す) についても、big Cohen Macaulay module となる時に言う。

問 2. (R.Y. Sharp [6, Problem 3.11, P246])

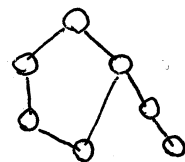
A を local ring, M を b.b. C-M A -module とする。

素 ideal $\mathfrak{g}$ がある M -sequence $a_1, \dots, a_r$ について,

$\mathfrak{g} \in \text{Ass } \frac{M}{(a_1, \dots, a_r)M}$ となるでしょう。このとき局所化

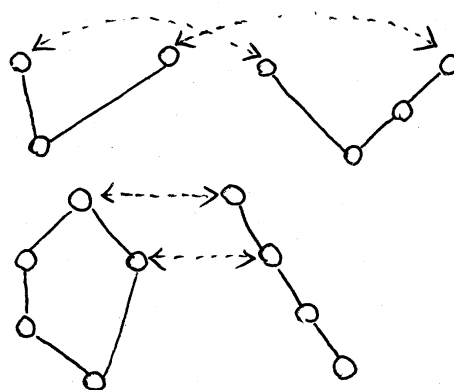
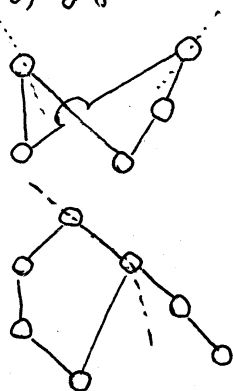
$M_{\mathfrak{g}}$ は b.b. C-M $A_{\mathfrak{g}}$ -module となるか?

A が catenary domain の場合には、肯定的であることを Sharp 自身が示している [5, (4.3) Theorem]。もし反例があるとするれば、次のような素 ideal 鎖を持つ環が最も簡単なものであろう。



以上のような例を、今まで知られている例を使って、統一的に作れないか、というのが本稿の主題であるが、一般論の詳細は他稿に譲り、例の構成を中心にして話を進めよう。

さて、素朴なアイデアは、下図のように切り離した2つの環から、同一視によって元の環を構成できないか、ということである。



ここで参考になった事柄は、2つの平面が交わる variety は 2つの平面を交差線で同一視したものと考えられるが、函数環の方で見れば、それは交差線で定義される Spec の closed set 上の素 ideal を同一視していることに他ならない。そして、この同一視は函数環においては fibre product で得られるという事実である。

そこで fibre product について思い出してみよう。category とにおいて、与えられた2つの morphism $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_0 \xleftarrow{\varphi_2} A_2$ に対し、可換図式 $A \longrightarrow A_1$ が fibre product であるとは

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \varphi_1 \\ & & A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_0 \\ \text{任意の可換図式} & X \longrightarrow A_1 & \text{について, morphism} \\ & \downarrow \varphi_1 & \\ & A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_0 & \end{array}$$

$X \longrightarrow A$ がただ一つ存在して $A_2 \longrightarrow A_0$ が可換となるときに言う。

これが環(単位元をもつ可換環)の category の場合には、fibre product A は直積 $A_1 \times A_2$ の部分環として

$$A = \{ (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2) \} \quad \cdots (*)$$

で与えられることはよく知られている。これを $A_1 \times_{A_0} A_2$ と書く。

以下、記号を常に次の意味で使うことにする。環準同型の

可換図式 $A \xrightarrow{P_1} A_1$ について. $\Phi = \varphi_1 \circ P_1 = \varphi_2 \circ P_2$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{P_1} & A_1 \\ P_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_0 \end{array} \quad C = \varphi_1(A_1) \cap \varphi_2(A_2) \subseteq A_0$$

$$\mathcal{O}_i = \text{Ker } \varphi_i \quad (i=1, 2)$$

$V_0 = \{ \Phi^{-1}(\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \text{Spec } C \}, \quad V_i = \{ P_i^{-1}(\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \text{Spec } A_i, \mathfrak{z} \not\subseteq \text{Ker } \varphi_i \}$
 $(i=1, 2)$ とおく。

定理 1. A が fibre product $A_1 \times_{A_0} A_2$ であれば, 次のことが成立する。

$\text{Spec } A = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ であり. V_0 は closed set であって $\text{Spec } C$ に同型である. $\text{Spec } A - V_0$ は $\text{Spec } A$ の open set V_1 と V_2 の disjoint union でありかつ V_i は $\text{Spec } A_i$ の $\mathcal{O}_i$ で定義される open set と同一視される. 一方 $V_0 \cup V_i \cong \text{Spec } P_i(A)$ でありかつ

$P_i(A) = A_i \times_{A_0} C = \varphi_i^{-1}(C)$ と表わされる. ($i=1, 2$)

証明については, Key Lemma が次のものであることのみを述べるに止める. 詳細は [4] を見て下さい。

補題 $A = A_1 \times_{A_0} A_2$, F が flat な A -algebra であれば, 次の成立。

$$F = A_1 \otimes_A F \times_{A_0 \otimes_A F} A_2 \otimes_A F$$

系 定理 1 において, φ_1, φ_2 が共に全射であれば, $\text{Spec } A$ は $\text{Spec } A_1$ と $\text{Spec } A_2$ を closed set $\text{Spec } A_0$ であり合わせたものである。

本稿の例の構成には直接必要ではないが、fibre product の noether 性について、参考の為に次の結果を挙げておく [4].

定理 2. A_1 と A_2 が noether 環であれば、

$A_1 \times_{A_0} A_2$ が noether 環 となる必要十分条件は次の 2 つである。

(1) $C = \varphi_1(A_1) \cap \varphi_2(A_2)$ が noether 環

(2) $\mathcal{O}_1/\mathcal{O}_1^2$ と $\mathcal{O}_2/\mathcal{O}_2^2$ が共に finite C -module.

例 1. codimension function を持たない universally catenary ring.

$(R, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ を semilocal domain で、局所化 $R_{\mathfrak{m}_1}, R_{\mathfrak{n}_1}$ の次元がそれぞれ m と n ($m > n$) の正則局所環となり、剰余環が同型 $R/\mathfrak{m}_1 = R/\mathfrak{n}_1 = K$ となるものとしよう。存在は、永田 [1, Example 2] により、知られている。

$(S, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$ を K 上の多項式環 $K[x_1, \dots, x_s]$ ($s \geq 1$) の 2 つの極大 ideal $\mathfrak{p}$ の局所化で、 $S/\mathfrak{m}_2 = S/\mathfrak{n}_2 = K$ となるような semilocal ring とする。したがって、 $\dim S_{\mathfrak{m}_2} = \dim S_{\mathfrak{n}_2} = s$ 。

さて、自然な環準同型 $\varphi_1: R \rightarrow R/(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{n}_1) = K \times K$ と $\varphi_2: S \rightarrow S/(\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{n}_2) = K \times K$ を $\varphi_1^{-1}(K \times 0) = \mathfrak{m}_1$, $\varphi_1^{-1}(0 \times K) = \mathfrak{n}_1$, $\varphi_2^{-1}(K \times 0) = \mathfrak{m}_2$, $\varphi_2^{-1}(0 \times K) = \mathfrak{n}_2$ となるように定義する。そのとき、 φ_1 と φ_2 の fibre product A は

2つの極大 ideal $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ をもつ semi-local ring であることが定理 1 からわかる。 $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m}_1$ と $\mathfrak{m}_2$ をはり合わせたものであり、 $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{n}_1$ と $\mathfrak{n}_2$ をはり合わせたものである。

A はそれぞれ $P_1: A \rightarrow R$ と $P_2: A \rightarrow S$ の核に対応する 2つの minimal prime $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ を持ち、 $A/\mathfrak{g}_1 = R$, $A/\mathfrak{g}_2 = S$ となることもわかる。 よって、特に A は universally catenary である。

さて、今仮りに codimension function $\varphi: \text{Spec } A \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在したと仮定しよう。 $\varphi - \varphi(\mathfrak{g}_1)$ を考えることにより、 $\varphi(\mathfrak{g}_1) = 0$ としてよい。すると、 $A/\mathfrak{g}_1 = R$ であることから $\varphi(\mathfrak{m}) = \text{ht } \mathfrak{m}_1 = m$, $\varphi(\mathfrak{n}) = \text{ht } \mathfrak{n}_1 = n$ である。一方、 $A/\mathfrak{g}_2 = S$ であることから $\varphi(\mathfrak{g}_2) = \varphi(\mathfrak{m}) - \text{ht } \mathfrak{m}_2 = m - s$ であるが、他方 $\varphi(\mathfrak{g}_2) = \varphi(\mathfrak{n}) - \text{ht } \mathfrak{n}_2 = n - s$ でもなければならぬ。これは、 $m > n$ であることに矛盾する。

例 2 Sharp の問題の反例

$(R, \mathfrak{m})$ を $\dim R = 3$ の local domain で、長さ 2 の saturated chain $0 \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{m}$ をもつものとする。このような環 R の存在は知られている。[3, § III] 今、 $\varphi_1: R \rightarrow R/\mathfrak{g} = A_0$ を自然な準同型、 $\varphi_2: A_0[[x, y]] \rightarrow A_0$ を A_0 -準同型で、 $\varphi_2(x) = \varphi_2(y) = 0$ で定義されるものとする。

このとき、 φ_1 と φ_2 の fibre product A を考えれば、射影
 $p_1: A \rightarrow R$, $p_2: A \rightarrow A_0[[x, y]] = A_2$ の核にそれぞれ対応
 する素ideal $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ が A の minimal prime 全体となるこ
 とが定理1よりわかる。

今、 A -module M を $M = K(\mathfrak{q}_1) \oplus A/\mathfrak{q}_2$ ($K(\mathfrak{q}_1) = A_{\mathfrak{q}_1}/\mathfrak{q}_1 A_{\mathfrak{q}_1}$)
 とおけば、 M は b.b.C-M A -module となる。実際
 $A/\mathfrak{q}_2 = A_0[[x, y]] = A_2$ は 3次元 Cohen Macaulay ring で、 A
 のどの system of parameters の $A/\mathfrak{q}_2$ における像も $A/\mathfrak{q}_2$ の
 S.O.P となるから、 $A/\mathfrak{q}_2$ は有限生成 b.b.C-M A -module で
 ある。一方、 $z (\in A)$ が A の S.O.P の一部となれば、 z は
 $K(\mathfrak{q}_1)$ の regular element でありかつ、 $K(\mathfrak{q}_1)/z K(\mathfrak{q}_1) = 0$ と
 なる。よって M は b.b.C-M A -module となる。

今、 A の ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ について、 $A/\mathfrak{p} = A_0$ であるか
 ら、 $\mathfrak{p}$ は A の素ideal である。さて、 $b \in \mathfrak{p} - 0$ について
 (*) の表示で、 $a_1 = (b, x)$, $a_2 = (0, y)$ とおけば、 $a_1, a_2 \in A$
 であって、これらは M -regular sequence となる。また、

$$M/(a_1, a_2)M = K(\mathfrak{q}_1)/b K(\mathfrak{q}_1) \oplus A_2/(x, y)A_2 = A_0$$

であるから、 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M/(a_1, a_2)M$ もわかる。

一方、 $\mathfrak{p}$ における局所化 $M_{\mathfrak{p}} = K(\mathfrak{q}_1) \oplus A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_2 A_{\mathfrak{p}}$ を考え
 ると、 $a_2 = (0, y)$, $a_1 = (b, x)$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の S.O.P となる
 けれど、 a_2 は $M_{\mathfrak{p}}$ の regular element ではない。すなわ

5 M_A は, b.b. C-M A_A -module でない。

REFERENCES

- [1] M. Nagata, Local rings, John Wiley, New York (1962).
- [2] T. Ogoma, Non-catenary pseudo-geometric normal rings, Japan J. Math. 6 (1980) 147-163
- [3] T. Ogoma, Existence of dualizing complexes, J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984) 27-48
- [4] T. Ogoma, Fibre products of Noetherian Rings and their applications, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.
- [5] R. Y. Sharp, A cousin complex characterization of balanced big Cohen Macaulay modules, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 90 (1981) 229-238
- [6] R. Y. Sharp ed., Commutative Algebra: Durham 1981, London Math. Soc. Lect. Notes 72.