

氏 名	い お 庵 原 隆 雄
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	論 理 博 第 1449 号
学位授与の日付	平 成 16 年 7 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	Fluid mechanical stability of capillary surfaces (表面張力を持つ流体表面の安定性)

論文調査委員	(主 査) 教 授 西 田 孝 明	教 授 井 川 満	教 授 三 輪 哲 二
--------	----------------------	-----------	-------------

論 文 内 容 の 要 旨

容器の中で自由表面を持った非圧縮粘性流体のポテンシャル外力の下での運動を考える。流体の運動は、時間に依存する領域での Navier-Stokes 方程式に適切な境界条件を考えたもので記述される。これは一種の自由境界問題であり、数学的に解の存在などを扱うには通常の固定領域の上の偏微分方程式系と異なる処理が必要である。

この論文では、容器が一般的な形状の場合を考察し、適当な前提条件をみたす定常状態の近くの運動について、解の時間大域的な存在を示している。

定常状態としては、capillary surface を考える。即ち、流体は非圧縮でその自由表面は表面張力を持つものとし、容器 $O \subset \mathbb{R}^N$ の中に入っているものとしてポテンシャル $V(x)$ によって生成される外力の影響下にあるとする。(密度は1とする)。

流体が占有している部分を $\Omega \subset O$ で表す。 Ω の境界は、(a)容器の壁 ∂O との接触の部分と(b)流体の自由表面 Γ の二つに分けられる。

配置 Ω のエネルギーは

$$E[\Omega] = \sigma \int_{\Gamma} dA + \int_{\Omega} V(x) dx$$

となる。ここで dA は $(N-1)$ -次元の積分要素で、 $\sigma > 0$ は表面張力係数である。capillary surface というのは、体積一定の拘束の下でのこのエネルギー汎関数の停留配置 (第一変分=0) のことである。

この停留配置 Ω_s が、エネルギーの極小配置であるとする。即ち、その第二変分に現れる二次形式が、正定値とする。さらに、この二次形式がら決まる Korn's form が固有値0を持たないとする。

以上の仮定の下で、この停留配置 Ω_s の近傍の流体の運動が、自由表面を持つ非圧縮粘性流体の運動の方程式に従うと考える。流体領域は $\Omega_s(t)$ で、その自由表面 $\Gamma(t)$ では表面張力が働き、容器の壁 ∂O との接触の部分では、slip 境界条件を仮定する。

この問題の可解性を次のように示している。考えている動く領域の上の方程式系を固定領域の上の同値な方程式系に変換する。即ち、 Ω_s から $\Omega(t)$ への非圧縮性が保存される写像を考えて、 $\Omega_s(t)$ で定義されている速度ベクトル場 $u(t)$ を $(N-1)$ -form としてこの写像によって Ω_s へ変換して固定領域の上の問題へ変換する。

上のようにして得られた固定領域の問題を適当な関数空間における不動点問題として定式化する事によって次のような結果を証明している。

上記の条件をみたす Ω_s を一つ考える。 Ω_s に十分近い流体の初期形状 Ω_0 とそこでの十分小さい初期速度 u_0 について、 $t \rightarrow \infty$ の極限で $\Omega = \Omega_s$ 、 $u \equiv 0$ に漸近する時間大域解が存在する。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

非圧縮粘性流体の運動は、ナヴィエ・ストークス方程式に従うと考えられるが、その流体に自由表面がある場合の解

析の困難さは、方程式自身の半線形性に加え、流体を限っている自由境界を決定しなければならないと同時にその境界上で非線形の力学的条件を満たさなければならない事にある。さらに本論文では、容器の中で自由表面を持った非圧縮粘性流体のポテンシャル外力の下での運動を考えている。従って、流体の境界は、容器に接触している部分と自由表面からなる。そして、自由表面の境界は、容器に接触している。現在までの自由表面を持つ流体運動の解析では、流体の境界がすべて自由表面のみからなる場合か、重力の作用の下で流体の上部が自由表面で限られており流体の下部は水平な底面を境界としている場合に限られていた。即ち、自由表面と固定境界は、共通集合を持っていなかった。この論文では、自由表面と固定した容器 O が接触している問題を始めて解析している。

まず、流体の静止定常状態としては、capillary surface を考える。それは、流体の配置のエネルギーを与える汎関数の体積一定の拘束の下での停留配置であり、第一変分が零になっているものである。その停留配置の内のエネルギーが、極小値をとっている（第二変分に現れる二次形式が正定値である）状態を対象とする。容器と自由表面の共通集合の形状としては、平行移動や回転の対称性を持つ超平面に含まれていないとする。

以上の仮定の下で、この停留配置 $\Omega_s \subset O$ の近傍の流体の Navier-Stokes 方程式に従う運動を考える。流体領域は、時間と共に変化する $\Omega(t) \subset O$ で、その自由表面 $\Gamma(t)$ では表面張力が働き、流体と容器の壁 ∂O との接触の部分では、slip 境界条件を仮定する。このとき、自由表面と容器は90度の角度で交わる。

この体積一定であるが時間変化する流体領域 $\Omega(t)$ 上の問題を停留配置 Ω_s 上の問題に還元するのに非圧縮性を保存する巧妙な変換を見いだしている。この停留配置 Ω_s 上に還元された問題は線形部分と非線形部分から成る。線形部分の作用素の resolvent を詳しく解析して、線形解が時間につき指数的に減衰する評価を得ている。この評価を適当な関数空間で小さい摂動と考える非線形項に適用して、元の問題の時間大域解の存在と定常状態への指数漸近を得ている。

以上のように自由表面と容器の固定境界とが、共通集合を持つ場合の初めての精密な深い解析結果であり、今後この自由表面問題の容器の形状による安定性の変化や分岐問題等の解析を発展させるための基礎を与えるものである。

こうして、本論文は、博士（理学）の学位論文として価値あるものと認められる。論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。