

部品の分断を考慮した製品における最適戦略と部品の在庫量の決定

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理学専攻 久原 慈主 (Yoshikazu Kuhara)

北條 仁志 (Hitoshi Hohjo)

Dept. of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science

Osaka Prefecture University

1 はじめに

本稿で扱う問題は、現在主にコンピュータ業界で扱われている assemble-to-order 生産方式の最適戦略と最適在庫量決定問題である。assemble-to-order 生産方式とは、それぞれ互換性のある部品をあらかじめ持っておき、製品の注文が決定してから生産を開始し顧客に販売を行う生産方式である。Shao[4] は、4つの部品から2つの製品を生産し販売する小売店で部品の分断が発生した場合の最適戦略を考えた。Shao[4] では、分断が発生した場合に部品が決して届かず、分断の影響がなくなるまでの間の小売店の利益の最大化を目標としており、分断が発生していない状態での小売店の利益を考慮していなかった。

本稿では、生産時と輸送時の2種類の分断を扱い、分断の仕方によっては分断が発生しても部品が届くことや分断が発生していない状態での小売店の利益を考慮してより現実問題に近づけた状況での小売店の最適戦略と最適注文量の決定について考察する。

2 モデル

本稿では、上流の工場と下流の小売店の二段階サプライチェーンにおいて下流の小売店の利益の最大化のための部品の最適戦略と最適在庫量決定問題を扱う。このモデルは無限期間の問題であり、 k 期の小売店の需要を d_k とする。 d_k はある与えられた正の実数 D に対して $[0, D]$ 上で定義された確率変数であり、各期間ごとの需要は互いに独立で同一の分布関数 $F(\cdot)$ に従うとする。小売店は期首に前期の需要による部品の減少分の調達を上流の工場から行う。この時の調達量はそれぞれの部品 a_0, a_1, b_0, b_1 の目標在庫量 $Y_{a_0}, Y_{a_1}, Y_{b_0}, Y_{b_1}$ になるまでの量を工場から調達するようにする。調達には、それぞれの部品 a_0, a_1, b_0, b_1 につき一個当たり $p_{a_0}, p_{a_1}, p_{b_0}, p_{b_1}$ の調達コストが発生する。期間中、小売店は部品 a_0 と a_1 からなる製品 A と部品 b_0 と b_1 からなる製品 B を生産販売する。各顧客における製品 A, B の価値はそれぞれ s_A, s_B である。顧客からの製品 A, B の需要はそれぞれ $u_A d_k, u_B d_k$ である。ここで、 u_A, u_B は製品 A, B を購入する需要の比率であり、これらは購買による効用により決定される。導出の詳細は付録 1 を参照せよ。製品 A, B の一個あたりの生産コストは C_A, C_B であり、それぞれ P_A, P_B の価格で販売される。期末に残った部品 a_0, a_1, b_0, b_1 一個当たりにつき $H_{a_0}, H_{a_1}, H_{b_0}, H_{b_1}$ の保管コストが発生する。売り逃しが発生しないように $Y_{a_0}, Y_{a_1} \geq \lceil u_A D \rceil, Y_{b_0}, Y_{b_1} \geq \lceil u_B D \rceil$ が成り立つとする。そこで、 $\lceil Z \rceil$ は実数 Z 以上の最小の整数値である。

部品 a_1 を生産する工場の目標在庫量 y_{a_1} は $y_{a_1} \geq \lceil u_A D \rceil$ を満たすとする。部品 a_1 を生産する工場で期間中に機械の故障などでその期間中生産不能になり分断が発生する確率を g_m 、部品 a_1 を工場から小売店への輸送中に分断が発生して小売店まで部品 a_1 が届かなくなる確率を g_c 、生産や輸送時での分断が発生しない確率を g_u とする。そこで、 $g_m, g_c, g_u \geq 0, g_m + g_c + g_u = 1$ である。生産の分断が発生した場合には、本来生産したい部品の数量 X に対して ϵX しか生産できないと仮定する。ここで、 ϵ は $[0, 1]$ 上での一様分布に従う確率変数である。工場では分断が発生して以降、その期間内に部品 a_1 を生産することはできない。したがって、その期末に下流の小売店からの部品 a_1 の注文量に対して上流の工場の部品 a_1 の在庫量が多ければ問題ない。しかしながら、在庫量が注文量より少ない場合には、持っているすべての在庫を下流の小売店に送るものとする。輸送の分断が発生した場合には、下流の工場は期首に部品 a_1 の調達が一つもできない。このような生産および輸送の分断によって小売店では製品 A の売り損じが発生する可能性がある。製品 A の売り損じが一個発生するたびに B_A のペナルティコストが発生する。このモデルでは、分断は部品 a_1 の生産および輸送のみで起こり、製品の売り損じも製品 A でしか起こらないものとする。また、上流の工場に対して分断による生産への影響は分断発生時の期間内のみで次期には影響が出ないものとする。小売店は各期間ごとに売上から生産コスト、調達コスト、保管コスト、ペナルティコス

トを差し引くことにより利益を計上する。製品 A の売り損じが発生した場合、小売店は 4 つの戦略を使うことにより売り損じによるペナルティコストを減少することができる。戦略はその中の 1 つだけを採用するものとする。

1. 後注文戦略

品切れによって製品 A を購入できなかった顧客は、次期に製品 A を購入するか購入しないかを選択する。次期に製品 A を購入する顧客の比率を $U_{1,A}$ とし、購入を希望しない顧客の比率を $U_{1,BA}$ とする。製品を購入できる時期が次期になることで製品 A の価値が s_A から $s_A - \lambda$ に減少する。値段 P_A は変化しない。

2. 賠償戦略

後注文戦略と同じく次期に製品 A を購入する顧客と購入しない顧客に分かれる。後注文戦略と違い、製品の値段を値下げすることにより次期に製品 A を購入する顧客の比率を上昇させる。次期に製品 A を購入する顧客の比率を $U_{2,A}$ とし、購入を希望しない顧客の比率を $U_{2,BA}$ とする。製品が購入できる時期が次期になり、製品 A の価値が s_A から $s_A - \lambda$ に減少する。値段 P_A は $P_A - \Delta P_A$ になる。

3. 代替戦略

売り損じにより製品 A を購入できなかった顧客に対して代替品となる製品 A_u を購入してもらう。未購入の顧客のうち代替品を購入する顧客の比率を U_{3,A_u} とし、購入を希望しない顧客の比率を $U_{3,BA}$ とする。製品 A_u は部品 a_0, b_1 から生産され、その価値は s_{A_u} であるとする。製品 A_u 一個当たりの生産コストは C_{A_u} 、値段は P_{A_u} である。

4. 混合戦略

混合戦略は賠償戦略と代替戦略をあわせた戦略である。売り損じにより製品 A を購入できなかった顧客に対して次期に値下げした製品 A を購入してもらうか、今期に製品 A の代わりに製品 A_u を購入するか、購入しないかを選択してもらう。売り損じの顧客のうち次期に製品 A を購入する顧客の比率を $U_{4,A}$ 、製品 A_u を購入する顧客の比率を U_{4,A_u} 、購入を希望しない顧客の比率を $U_{4,BA}$ とする。

本モデルでは、 $\frac{P_B - P_A}{s_B - s_A} \geq \frac{P_B}{s_B}$ および $\frac{P_{A_u} - P_A + \Delta P_A}{s_{A_u} - s_A + \lambda} \geq \frac{P_A - \Delta P_A}{s_A - \lambda}$ を仮定する。他のケースでも同様に考えることができる。比率の計算については付録 2~5 を参照せよ。戦略を St として、0 は戦略なし、1 は後注文戦略、2 は賠償戦略、3 は代替戦略、4 は混合戦略を表すとし、

$$\begin{aligned}
 U_{3,4,A_u} &= \begin{cases} 0 & (\text{戦略なし、後注文、賠償戦略選択時}) \\ U_{3,A_u} & (\text{代替戦略選択時}) \\ U_{4,A_u} & (\text{混合戦略選択時}) \end{cases} & U_{2,4,A} &= \begin{cases} 0 & (\text{戦略なし、後注文、代替戦略選択時}) \\ U_{2,A} & (\text{賠償戦略選択時}) \\ U_{4,A} & (\text{混合戦略選択時}) \end{cases} \\
 U_{1,2,4,A} &= \begin{cases} 0 & (\text{戦略なし、代替戦略選択時}) \\ U_{1,A} & (\text{後注文戦略選択時}) \\ U_{2,A} & (\text{賠償戦略選択時}) \\ U_{4,A} & (\text{混合戦略選択時}) \end{cases} & U_{i,BA} &= \begin{cases} 1 & (\text{戦略なしの場合}) \\ U_{1,BA} & (\text{後注文戦略選択時}) \\ U_{2,BA} & (\text{賠償戦略選択時}) \\ U_{3,BA} & (\text{代替戦略選択時}) \\ U_{4,BA} & (\text{混合戦略選択時}) \end{cases} \\
 \alpha_1 &= \begin{cases} 1 & (\text{後注文戦略選択時}) \\ 0 & (\text{戦略なし、賠償、代替、混合戦略選択時}) \end{cases} & \alpha_{3,4} &= \begin{cases} 1 & (\text{代替、混合戦略選択時}) \\ 0 & (\text{戦略なし、後注文、代替戦略選択時}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

とする。

3 数学的分析

生産と輸送の分断による小売店の利益の変化を状態 i , $i = 1, \dots, N$ とする。状態 i の小売店の一期間あたりの利得関数を Ω_i 、その期待値を $E[\Omega_i]$ とする。後で述べるように我々は在庫管理問題をマルコフチェーンとしてモデル化する。マルコフチェーンにおける極限推移確率を π_i で表す。期待利得関数 $CT = \sum_{i=1}^N \pi_i E[\Omega_i]$ が最大となる最適戦略とそのときの最適在庫量 $Y_{a_0}, Y_{a_1}, Y_{b_0}, Y_{b_1}$ を決定する。

小売店の状態は一期間の需要量、小売店、工場の部品の在庫量との関係で場合分けを行う。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A		製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
1	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
1	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0

表 1

分断が発生していない状態を $i = 1$ とした場合の各数量を表 1 に与える。このとき、利益は $u_A d_k P_A + u_B d_k P_B$ 、生産コストは $u_A d_k C_A + u_B d_k C_B$ 、調達コストは $u_A d_{k-1}(p_{a_0} + p_{a_1}) + u_B d_{k-1}(p_{b_0} + p_{b_1})$ 、保管コストは $(Y_{a_0} - u_A d_k)H_{a_0} + (Y_{a_1} - u_A d_k)H_{a_1} + (Y_{b_0} - u_B d_k)H_{b_0} + (Y_{b_1} - u_B d_k)H_{b_1}$ であり、売り逃しは発生しない。よって、利得関数は以下ようになる。

$$\Omega_1 = u_A d_k P_A + u_B d_k P_B - u_A d_k C_A - u_B d_k C_B - u_A d_{k-1}(p_{a_0} + p_{a_1}) - u_B d_{k-1}(p_{b_0} + p_{b_1}) \\ - (Y_{a_0} - u_A d_k)H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_k)H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_k)H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_k)H_{b_1}$$

k 期に分断が発生すると仮定する。 k 期は分断による影響がでないので、小売店の利得関数は Ω_1 と同一である。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A		製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
2	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$
3	$k+1$	$u_A d_{k+1}$	0	0	$u_A d_k$	$u_A d_k$	$u_B d_k$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
2	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0
3	$k+1$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+1}$	$Y_{a_1} - u_A d_{k+1}$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$	0

表 2

$i = 2, \dots, 12$ は生産での分断が発生した場合の状態である。 k 期期首に生産工場での部品 a_1 の在庫量は $y_{a_1} - u_A d_{k-1}$ であり、 k 期の部品 a_1 の目標生産量は $u_A d_{k-1}$ である。しかし生産の分断が発生することにより部品 a_1 の生産量は $\epsilon u_A d_{k-1}$ に留まる。ここで、 $\epsilon \sim U[0, 1]$ とする。よって k 期の部品 a_1 の期末在庫量は $y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1}$ となる。 k 期の期末に小売店から $u_A d_k$ の部品 a_1 の注文をうける。状態 2,3 は $y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1} \geq u_A d_k$ の場合に対応する。 k 期の小売店からの注文に全て応えているので $k+1$ 期の小売店に影響はない。各量の推移は表 2 のとおりである。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A		製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
4	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$
5	$k+1$	$u_A d_{k+1}$	0	0	$u_A d_k$	$y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1}$	$u_B d_k$
6	$k+2$	$u_A d_{k+2}$	0	0	$u_A d_{k+1}$	$u_A((1 - \epsilon)d_{k-1} + d_k + d_{k+1}) - y_{a_1}$	$u_B d_{k+1}$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
4	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0
5	$k+1$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+1}$	$Y_{a_1} + y_{a_1} - u_A((1 - \epsilon)d_{k-1} + d_k + d_{k+1})$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$	0
6	$k+2$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+2}$	$Y_{a_1} - u_A d_{k+2}$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+2}$	0

表 3

$y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1} \leq u_A d_k$ の場合小売店の k 期末の部品 a_1 の在庫量は $Y_{a_1} - u_A d_k$ であり、 $k + 1$ 期の部品 a_1 の目標調達量 $u_A d_k$ に生産工場は応えられず、 $y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1}$ だけ調達可能である。よって、 $k + 1$ 期の部品 a_1 の期首在庫量は $Y_{a_1} - u_A d_k + y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1}$ となる。 $k + 1$ 期の製品 A の需要量は $u_A d_{k+1}$ である。状態 4,5,6 は $Y_{a_1} - u_A d_k + y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1} \geq u_A d_{k+1}$ の場合に対応する。状態 5 の $k + 1$ 期の調達量は $y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1}$ 、在庫量は $Y_{a_1} - u_A d_k + y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1} - u_A d_{k+1}$ となる。状態 6 の調達量は $u_A d_{k+1} + u_A d_k + (1 - \epsilon)u_A d_{k-1} - y_{a_1}$ である。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A		製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
7	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$
8	$k + 1$	$u_A d_{k+1} - S$	0	$U_{3,4,A_u} S$	$u_A d_k$	$y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1}$	$u_B d_k$
9	$k + 2$	$u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A} S$	$U_{2,4,A} S$	0	$u_A d_{k+1} - S + U_{1,2,4,A} S + U_{3,4,A_u} S$	$Y_{a_1} + U_{1,2,4,A} S$	$u_B d_{k+1} + U_{3,4,A_u} S$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
7	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0
8	$k + 1$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+1} + S - U_{3,4,A_u} S$	0	$Y_{b_1} - u_B d_{k+1} - U_{3,4,A_u} S$	$U_{i,B_A} S$
9	$k + 2$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+2}$	$Y_{a_1} - u_A d_{k+2}$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+2}$	0

表 4

$Y_{a_1} - u_A d_k + y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1} \leq u_A d_{k+1}$ の場合を状態 7,8,9,10,11,12 で表す。各量の推移を表 4,5 に与える。 $k + 1$ 期の製品 A の需要に対して部品 a_1 が足りないので売り損じが発生する。 $k + 1$ 期の部品 a_1 の在庫量は 0、 $k + 2$ 期の調達量は Y_{a_1} となる。戦略なしの場合の売り損じ量は $u_A d_{k+1} + u_A d_k + (1 - \epsilon)u_A d_{k-1} - Y_{a_1} - y_{a_1} = S$ となる。4つの戦略を使用することにより売り損じ量は S に各戦略の U_{i,B_A} をかけたものである。さらに後注文戦略では $k + 2$ 期に $U_{1,A} S$ 、賠償戦略、混合戦略では $k + 2$ 期に $U_{2,4,A} S$ の製品 A を $k + 2$ 期の需要とは別に購入してもらう。この量だけ部品 a_0, a_1 の追加調達を行う。代替戦略と混合戦略では製品 A_u を購入してもらうので部品 b_1 を消費する。よって、代替品を購入する顧客の数に対して部品 b_1 が足りるかで場合分けを行う。代替品の購入を行う前の部品 b_1 の在庫量は $Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ であり、 $U_{3,4,A_u} S \leq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ の場合を状態 7,8,9 とする。この時、代替品の購入を希望するすべての顧客に製品 A_u を販売できる。部品 a_0, b_1 はそれぞれ製品 A, B の販売量以外で $k + 1$ 期に $U_{3,4,A_u} S$ の在庫量の減少と $k + 2$ 期の調達量の増加が発生する。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A		製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
10	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$
11	$k + 1$	$u_A d_{k+1} - S$	0	$\alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$	$u_A d_k$	$y_{a_1} - (1 - \epsilon)u_A d_{k-1}$	$u_B d_k$
12	$k + 2$	$u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A} S$	$U_{2,4,A} S$	0	$u_A d_{k+1} - S + \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) + U_{1,2,4,A} S$	$Y_{a_1} + U_{1,2,4,A} S$	$d_{k+1} u_B + \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
10	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0
11	$k+1$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+1} + S - \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$	0	$(1 - \alpha_{3,4})(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$	$U_{i,B_A} S + U_{3,4,A_u} S - \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$
12	$k+2$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+2}$	$Y_{a_1} - u_A d_{k+2}$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+2}$	0

表 5

$U_{3,4,A_u} S \geq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ の場合を状態 10,11,12 とする。製品 A_u の購入を希望する顧客に製品 A_u を販売できない。この時の製品 A_u の販売量は $Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ となる。 $k+1$ 期の部品 a_0 の在庫量は製品 A の販売量以外に $Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ 減少し、 $k+2$ 期の調達量の増加が発生する。 $k+1$ 期の部品 b_1 の在庫量は 0、 $k+2$ 期の調達量は Y_{b_1} となる。売り損じ量は $U_{i,B_A} S$ に製品 A_u を購入できなかった顧客の数 $U_{3,4,A_u} S - (Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$ だけ増加した量となる。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A	製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
13	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$
14	$k+1$	$u_A d_{k+1}$	0	0	$u_A d_k$	0	$u_B d_k$
15	$k+2$	$u_A d_{k+2}$	0	0	$u_A d_{k+1}$	$u_A(d_k + d_{k+1})$	$u_B d_{k+1}$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
13	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0
14	$k+1$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+1}$	$Y_{a_1} - u_A(d_k + d_{k+1})$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$	0
15	$k+2$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+2}$	$Y_{a_1} - u_A d_{k+2}$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+2}$	0

表 6

輸送の分断が発生した場合、状態 13,14,15,16,17,18,19,20,21 に変化する。小売店は $k+1$ 期の期首に k 期の部品 a_1 の在庫の減少量 $u_A d_k$ を調達できない。よって、状態 14,17,20 での $k+1$ 期の部品 a_1 の調達量は 0 である。期首在庫量は本来 Y_{a_1} のところ $Y_{a_1} - u_A d_k$ となる。 $k+1$ 期の製品 A の需要量は $u_A d_{k+1}$ である。 $Y_{a_1} - u_A d_k \geq u_A d_{k+1}$ の場合、在庫量が需要量より多いので売り逃しは発生しない。この状態を状態 13,14,15 とする。状態 13 の利得関数は通常状態と同じである。状態 14 では部品 a_1 の在庫量は $Y_{a_1} - u_A d_k - u_A d_{k+1}$ である。次期の状態 15 では調達量のみが変化し、 $u_A d_k + u_A d_{k+1}$ となる。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A	製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
16	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$
17	$k+1$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	0	$U_{3,4,A_u} T$	$u_A d_k$	0	$u_B d_k$
18	$k+2$	$u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A} T$	$U_{2,4,A} T$	0	$Y_{a_1} - u_A d_k + U_{1,2,4,A} T + U_{3,4,A_u} T$	$Y_{a_1} + U_{1,2,4,A} T$	$d_{k+1} u_B + U_{3,4,A_u} T$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
16	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0
17	$k+1$	$Y_{a_0} - Y_{a_1} + u_A d_k - U_{3,4,A_u} T$	0	$Y_{b_1} - u_B d_{k+1} - U_{3,4,A_u} T$	$U_{i,B_A} T$
18	$k+2$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+2}$	$Y_{a_1} - u_A d_{k+2}$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+2}$	0

表 7

$Y_{a_1} - u_A d_k \leq u_A d_{k+1}$ となった場合、売り逃しが発生する。戦略なしの場合の売り逃し量は $u_A d_{k+1} + u_A d_k - Y_{a_1} = T$ となる。4 つの戦略を使用することにより売り損じ量は T に各戦略の U_{i,B_A} をかけたものである。さらに後注

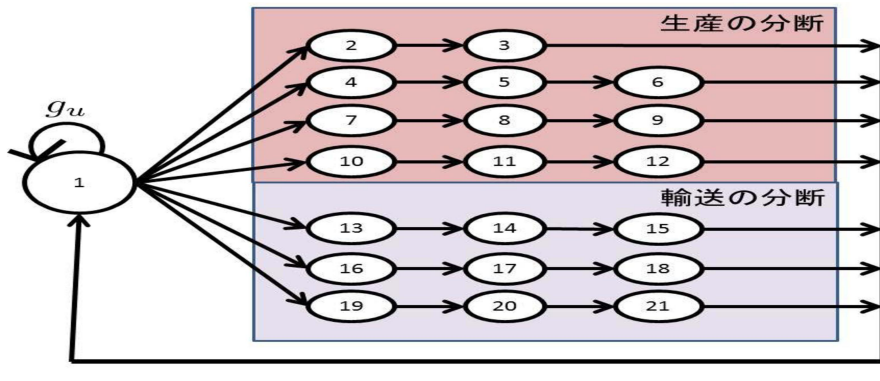


図 1: 状態推移

文戦略では $k+2$ 期に $U_{1,A}T$ 、賠償戦略、混合戦略では $k+2$ 期に $U_{2,4,A}T$ の製品 A を $k+2$ 期の需要とは別に購入してもらう。この量だけ部品 a_0, a_1 の追加調達を行う。代替戦略と混合戦略では製品 A_u を購入してもらうので部品 b_1 を消費する。よって、代替品を購入する顧客の数に対して部品 b_1 が足りるかで場合分けを行う。代替品の購入を行う前の部品 b_1 の在庫量は $Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ であり、 $U_{3,4,A_u}T \leq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ の場合を状態 16, 17, 18 とする。この時、代替品の購入を希望するすべての顧客に製品 A_u を販売できる。部品 a_0, b_1 はそれぞれ製品 A, B の販売量以外で $k+1$ 期に $U_{3,4,A_u}T$ の在庫量の減少と $k+2$ 期の調達量の増加が発生する。

状態	期	販売量			調達量		
		製品 A		製品 A_u	部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1
		P_A	$P_A - \Delta P_A$	P_{A_u}	p_{a_0}	p_{a_1}	p_{b_1}
19	k	$u_A d_k$	0	0	$u_A d_{k-1}$	$u_A d_{k-1}$	$u_B d_{k-1}$
20	$k+1$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	0	$\alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$	$u_A d_k$	0	$u_B d_k$
21	$k+2$	$u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A}T$	$U_{2,4,A}T$	0	$Y_{a_1} - u_A d_k + \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) + U_{1,2,4,A}T$	$Y_{a_1} + U_{1,2,4,A}T$	$d_{k+1} + \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$

状態	期	保管量			売り損じ量
		部品 a_0	部品 a_1	部品 b_1	製品 A
		H_{a_0}	H_{a_1}	H_{b_1}	B_A
19	k	$Y_{a_0} - u_A d_k$	$Y_{a_1} - u_A d_k$	$Y_{b_1} - u_B d_k$	0
20	$k+1$	$Y_{a_0} - Y_{a_1} + u_A d_k - \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$	0	$(1 - \alpha_{3,4})(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$	$U_{i,B_A}T + U_{3,4,A_u}T - \alpha_{3,4}(Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$
21	$k+2$	$Y_{a_0} - u_A d_{k+2}$	$Y_{a_1} - u_A d_{k+2}$	$Y_{b_1} - u_B d_{k+2}$	0

表 8

$U_{3,4,A_u}T \geq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ の場合を状態 19, 20, 21 とする。製品 A_u の購入を希望する顧客に製品 A_u を販売できない。この時の製品 A_u の販売量は $Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ となる。 $k+1$ 期の部品 a_0 の在庫量は製品 A の販売量以外に $Y_{b_1} - u_B d_{k+1}$ 減少し $k+2$ 期の調達量の増加が発生する。 $k+1$ 期の部品 b_1 の在庫量は 0、 $k+2$ 期の調達量は Y_{b_1} となる。売り損じ量は $U_{i,B_A}T$ に製品 A_u を購入できなかった顧客の数 $U_{3,4,A_u}T - (Y_{b_1} - u_B d_{k+1})$ だけ増加した量となる。

各状態での具体的な利得関数を付録 6 に与える。状態 i から状態 j への変化のための確率変数 $\epsilon, d_{k-1}, d_k, d_{k+1}, \dots$ の条件をそれぞれ $D_{i,j}$ とする。 $g_{i,j}$ は状態 $i = 1, \dots, N$ から状態 $j = 1, \dots, N$ への推移確率である。

$$\begin{aligned}
D_{1,2} &= \{y_{a_1} - (1-\epsilon)u_A d_{k-1} \geq u_A d_k\} \\
D_{1,4} &= \{y_{a_1} - (1-\epsilon)u_A d_{k-1} \leq u_A d_k, Y_{a_1} - u_A d_k + y_{a_1} - (1-\epsilon)u_A d_{k-1} \geq u_A d_{k+1}\} \\
D_{1,7} &= \{y_{a_1} - (1-\epsilon)u_A d_{k-1} \leq u_A d_k, Y_{a_1} - u_A d_k + y_{a_1} - (1-\epsilon)u_A d_{k-1} \leq u_A d_{k+1}, U_{3,4,A_u} S \leq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}\} \\
D_{1,10} &= \{y_{a_1} - (1-\epsilon)u_A d_{k-1} \leq u_A d_k, Y_{a_1} - u_A d_k + y_{a_1} - (1-\epsilon)u_A d_{k-1} \leq u_A d_{k+1}, U_{3,4,A_u} S \geq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}\} \\
D_{1,13} &= \{Y_{a_1} - u_A d_k \geq u_A d_{k+1}\} \\
D_{1,16} &= \{Y_{a_1} - u_A d_k \leq u_A d_{k+1}, U_{3,4,A_u} T \leq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}\} \\
D_{1,19} &= \{Y_{a_1} - u_A d_k \leq u_A d_{k+1}, U_{3,4,A_u} T \geq Y_{b_1} - u_B d_{k+1}\}
\end{aligned}$$

$$g_{1,j} = \begin{cases} g_m \int_{D_{1,j}} dF & (j=2,4,7,10) \\ g_c \int_{D_{1,j}} dF & (j=13,16,19) \\ 0 & (\text{上記以外の } j) \end{cases} \quad g_{i,i+1} = \begin{cases} 1 & (i=2,4,5,7,8,10,11,13, \\ & 14,16,17,19,20) \\ 0 & (\text{上記以外の } i) \end{cases} \quad g_{i,1} = \begin{cases} g_u & (i=1) \\ 1 & (i=3,6,9,12,15,18,21) \\ 0 & (\text{上記以外の } i) \end{cases}$$

上記以外の $g_{i,j}$ の値は $g_{i,j} = 0$ である。我々は図 1 で表される在庫状況のマルコフチェーンを考え、状態 i の極限推移確率を求める。 $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1, \pi_i = k_i \pi_1$ より $\sum_{i=1}^N k_i \pi_1 = 1$ である。したがって

$\pi_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i}, \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i} g_{1,2}, \pi_i = \pi_{i+1} = \pi_{i+2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i} g_{1,i} (i = 4, 7, 10, 13, 16, 19)$ を得る。もちろん π_i は唯一に決定される。そこで、 k_i の値は

$$k_i = \begin{cases} g_u & (i=1) \\ g_m \int_{D_{1,i}} dF & (i=2,4,7,10) \\ g_c \int_{D_{1,i}} dF & (i=13,16,19) \end{cases}$$

$k_3 = k_2, k_{i+2} = k_{i+1} = k_i (i = 4, 7, 10, 13, 16, 19)$ であり、 $\sum_{i=1}^N k_i = g_u + 3(g_m + g_c) - g_m \int_{D_{1,2}} dF$ となる。

まとめると我々の数理計画問題は、目的関数

$$CT = \sum_{i=1}^N \pi_i E[\Omega_i] \rightarrow \max$$

として与えられる。考慮している領域において $\lim_{\|(Y_{a_0}, Y_{a_1}, Y_{b_0}, Y_{b_1})\| \rightarrow \infty} CT = -\infty$ が成り立つことは自明である。したがって、 $\frac{\partial CT}{\partial Y_{a_0}} = 0, \frac{\partial CT}{\partial Y_{a_1}} = 0, \frac{\partial CT}{\partial Y_{b_0}} = 0, \frac{\partial CT}{\partial Y_{b_1}} = 0$ を満たす $(Y_{a_0}, Y_{a_1}, Y_{b_0}, Y_{b_1})$ の組を目的関数に代入してその値を比較することによって最適解を出すことができる。

4 アルゴリズム

本問題での最適解を求めるアルゴリズムを次に記す。

アルゴリズム

- 入力. パラメータ $P_A, P_{A_u}, \Delta P_A, P_B, p_{a_0}, p_{a_1}, p_{b_0}, p_{b_1}, C_A, C_{A_u}, C_B, H_{a_0}, H_{a_1}, H_{b_0}, H_{b_1}$
 $s_A, s_{A_u}, s_B, \lambda, g_u, g_m, g_c, B_A, D, y_{a_1}, Y_{amin} = \lceil u_A D \rceil, Y_{bmin} = \lceil u_B D \rceil$
- 目的関数 CT
- $Y_{amin}, Y_{bmin}, Y_{amin}$ より十分に大きい数 Y_{amax}, Y_{bmin} より十分に大きい数 Y_{max}
- $St = 0$, 十分に大きな自然数 M, N
- Step1 $Y_{St,a_0}^* = Y_{amin}, Y_{St,a_1}^* = Y_{amin}, Y_{St,b_0}^* = Y_{bmin}, Y_{St,b_1}^* = Y_{bmin}$ を代入し、
 $CT_{St}^*(Y_{St,a_0}^*, Y_{St,a_1}^*, Y_{St,b_0}^*, Y_{St,b_1}^*)$ を計算する。また $n = 0$ とする。
- Step2 ランダムに $Y_{St,a_0} \in [Y_{amin}, Y_{amax}], Y_{St,a_1} \in [Y_{amin}, Y_{amax}], Y_{St,b_0} \in [Y_{bmin}, Y_{bmax}], Y_{St,b_1} \in [Y_{bmin}, Y_{bmax}]$ を決定し、 $CT_{St}(Y_{St,a_0}, Y_{St,a_1}, Y_{St,b_0}, Y_{St,b_1})$ を計算する。
- Step3 $Y_{St,a_1}, Y_{St,b_0}, Y_{St,b_1}, b_1$ を固定し、 CT_{St} を最大にする $Y_{St,a_0} \in [Y_{amin}, Y_{amax}]$ を新しい Y_{St,a_0} とする。 $Y_{a_1}, Y_{b_0}, Y_{b_1}$ に対しても同様の手順を行う。この計算を M 回繰り返す。
- Step4 $CT_{St}^*(Y_{St,a_0}^*, Y_{St,a_1}^*, Y_{St,b_0}^*, Y_{St,b_1}^*) < CT_{St}(Y_{St,a_0}, Y_{St,a_1}, Y_{St,b_0}, Y_{St,b_1})$ ならば $Y_{St,a_0}^* = Y_{St,a_0}, Y_{St,a_1}^* = Y_{St,a_1}, Y_{St,b_0}^* = Y_{St,b_0}, Y_{St,b_1}^* = Y_{St,b_1}$ $CT_{St}^* = CT_{St}(Y_{St,a_0}^*, Y_{St,a_1}^*, Y_{St,b_0}^*, Y_{St,b_1}^*)$ とする。
 $n < N$ ならば $n = n + 1$ として Step2 へ。

Step5 St が 4 未満なら $St = St + 1$ として Step1 へ。
 Step6 $CT^* = \max\{CT_0^*, CT_1^*, CT_2^*, CT_3^*, CT_4^*\}$ を満たす St を St^* , $Y_{a_0}^* = Y_{St^*, a_0}^*$, $Y_{a_1}^* = Y_{St^*, a_1}^*$,
 $Y_{b_0}^* = Y_{St^*, b_0}^*$, $Y_{b_1}^* = Y_{St^*, b_1}^*$ を決定する。

5 数値例

数値例として次の基本パラメーターを用いる。

$P_A = 1000$, $P_{A_u} = 1200$, $\Delta P_A = 250$, $P_B = 1750$, $p_{a_0} = 150$, $p_{a_1} = 150$, $p_{b_0} = 150$, $p_{b_1} = 150$, $C_A = 200$, $C_{A_u} = 250$, $C_B = 200$, $H_{a_0} = 40$, $H_{a_1} = 40$, $H_{b_0} = 40$, $H_{b_1} = 40$, $B_A = 7000$, $s_A = 1300$, $s_{A_u} = 1800$, $s_B = 2100$, $\lambda = 50$, $g_u = 0.95$, $g_m = 0.03$, $g_c = 0.02$, $Y_{amin} = y_{a_1} = 842$, $Y_{bmin} = 313$ 、確率変数 d_k は $[0, 5000]$ 上の一様分布である。

各戦略での最大期待利得 CT_i^* 、最適戦略 St^* と目標在庫量 ($Y_{a_0}^*$, $Y_{a_1}^*$, $Y_{b_0}^*$, $Y_{b_1}^*$) は以下のような数値結果となる。

(1) 上記の基本パラメーターのとき

$$CT_0^*(842, 1028, 313, 313, 0) = 330747.9, CT_1^*(842, 1028, 313, 313, 1) = 331271.4,$$

$$CT_2^*(842, 842, 313, 313, 2) = 332572.6, CT_3^*(842, 842, 313, 313, 3) = 331441.3,$$

$$CT_4^*(842, 842, 313, 313, 4) = 332578.4.$$

$$St^* = 4, (Y_{a_0}^*, Y_{a_1}^*, Y_{b_0}^*, Y_{b_1}^*) = (842, 842, 313, 313), CT^* = 332578.4$$

(2) $H_{a_0} = H_{a_1} = H_{b_0} = H_{b_1} = 50$ のとき

$$CT_0^*(842, 927, 313, 313, 0) = 318168.5, CT_1^*(842, 842, 313, 313, 1) = 319808.0,$$

$$CT_2^*(842, 842, 313, 313, 2) = 321641.6, CT_3^*(842, 842, 313, 313, 3) = 320575.5,$$

$$CT_4^*(842, 842, 313, 313, 4) = 321703.9,$$

$$St^* = 4, (Y_{a_0}^*, Y_{a_1}^*, Y_{b_0}^*, Y_{b_1}^*) = (842, 842, 313, 313), CT^* = 321703.9$$

(3) $g_u = 0.90$, $g_m = 0.07$, $g_c = 0.03$ のとき

$$CT_0^*(842, 1028, 313, 313, 0) = 314407.8, CT_1^*(842, 1028, 313, 313, 1) = 315145.2,$$

$$CT_2^*(842, 1028, 313, 313, 2) = 315833.5, CT_3^*(842, 1026, 313, 313, 3) = 315041.2,$$

$$CT_4^*(842, 1025, 313, 313, 4) = 315492.1,$$

$$St^* = 2, (Y_{a_0}^*, Y_{a_1}^*, Y_{b_0}^*, Y_{b_1}^*) = (842, 1028, 313, 313), CT^* = 315833.5$$

今回の数値例の結果によるとすべてにおいて戦略なし (CT_0) より戦略ありのコスト関数が良い結果を出している。数値例 (1)~(2) では期待利得の値が後注文戦略<代替戦略<賠償戦略<混合戦略であるが、数値例 (3) では代替戦略<後注文戦略<混合戦略<賠償戦略が成り立つ。代替戦略は値段が高いので販売時の利益が大きいが、生産コストや代替品を購入する顧客の比率の関係により小売店の利益にあまり影響がみられなかったと思われる。混合戦略と賠償戦略の差は小さく、パラメータによっては賠償戦略が優秀であることが分かった。

6 まとめ

本稿では、論文 [4] のモデルにおいて分断発生時と回復時のみの小売店の利益の最大化問題をより一般化したモデルを提案した。より問題を現実に近い状態にするために、生産時と輸送時の 2 種類の分断および分断による影響がない状態を考慮し、小売店における最適戦略と最適在庫量の導出を試みた。さらに複雑なモデルとして、上流の向上の在庫戦略を考慮したサプライチェーンにおける小売店と工場それぞれの最適戦略および最適在庫量に関する研究が考えられるが、今後の課題として残す。

参考文献

- [1] Chopra, S., M.S.Sodhi (2004) Managing risk to avoid supply chain breakdown, MIT Sloan Management Review 46, 53-61.

- [2] Eisenstein,D.D. (2005) Recovering cyclic schedules using dynamic produce-up-to policies, Operations Research **53**, 675-688.
- [3] Oke,A., M.Gopalakrishnan (2009) Managing disruptions in supply chains: a case study of a retail supply chain, International Journal of Production Economics **118**, 168-174.
- [4] Shao,X.F. (2012) Demand-side reactive strategies for supply disruptions in a multiple-product system, International Journal of Production Economics **136**, 241-252.
- [5] Tang,C.S. (2006) Perspectives in supply chain risk management, International Journal of Production Economics **103**, 451-488.
- [6] Tomlin,B. (2006) On the value of mitigation and contingency strategies for managing supply chain disruption risks, Management Science **52**, 639-657.
- [7] Xia,Y., M.H.Yang, B.Golany, S.M.Gilbert, G.Yu (2004) Real-time disruption management in a two-stage production and inventory system, IIE Transactions **36**, 111-125.
- [8] Xiao,T.J., G.Yu (2006) Supply chain disruption management and evolutionarily stable strategies of retailers in the quantity-setting duopoly situation with homogeneous goods, European Journal of Operational Research **173**, 648-668.
- [9] Yang,J., X.Qi, G.Yu (2005) Disruption management in production planning, Naval Research Logistics **52**, 420-442.

付録

1. u_A, u_B

$\theta \in [0, 1]$ を顧客のタイプとする。タイプ θ の顧客は製品 i を購入する際に効用が $\theta s_i - P_i$ であると判断する。製品 A, B のうち製品 B を選択する顧客は $\theta s_B - P_B > \theta s_A - P_A$ かつ $\theta s_B - P_B > 0$ を満たす。同様に製品 A を選択する顧客は $\theta s_B - P_B < \theta s_A - P_A$ かつ $\theta s_A - P_A > 0$ を満たす。今、 $\frac{P_B - P_A}{s_B - s_A} \geq \frac{P_B}{s_B}$ が成り立っていると仮定すると、 $u_A = \frac{P_B - P_A}{s_B - s_A} - \frac{P_A}{s_A}$ 、 $u_B = 1 - \frac{P_B - P_A}{s_B - s_A}$ となる。

2. 後注文戦略

製品 A の売り損じのうち後注文による購入を選択する顧客は $\theta(s_A - \lambda) - P_A > 0$ を満たす。よって $U_{1,A} = 1 - \frac{P_A}{s_A - \lambda}$ となる。そのまま売り損じになる比率は $U_{1,B_A} = 1 - U_{1,A}$ である。

3. 賠償戦略

製品 A の売り損じのうち値段の割引による後注文の購入を選択する顧客は $\theta(s_A - \lambda) - (P_A - \Delta P_A) > 0$ を満たす。よって $U_{2,A} = 1 - \frac{P_A - \Delta P_A}{s_A - \lambda}$ となる。そのまま売り損じになる比率は $U_{2,B_A} = 1 - U_{2,A}$ である。

4. 代替戦略

製品 A の売り損じのうち代替品の購入を選択する顧客は $\theta s_{A_u} - P_{A_u} > 0$ を満たす。よって $U_{3,A_u} = 1 - \frac{P_{A_u}}{s_{A_u}}$ となる。売り損じになる比率は $U_{3,B_A} = 1 - U_{3,A_u}$ である。

5. 混合戦略

製品 A の売り損じのうち代替品の購入を選択する顧客は $\theta s_{A_u} - P_{A_u} > \theta(s_A - \lambda) - (P_A - \Delta P_A)$ を満たす。そして値段の割引による後注文の購入を選択する顧客は $\theta s_{A_u} - P_{A_u} < \theta(s_A - \lambda) - (P_A - \Delta P_A)$ 、 $\theta(s_A - \lambda) - (P_A - \Delta P_A) > 0$ を満たす。よって $U_{4,A} = \frac{P_{A_u} - P_A + \Delta P_A}{s_{A_u} - s_A + \lambda} - \frac{P_A - \Delta P_A}{s_A - \lambda}$ 、 $U_{4,A_u} = 1 - \frac{P_{A_u} - P_A + \Delta P_A}{s_{A_u} - s_A + \lambda}$ であり、そのまま売り損じになる比率は $U_{4,B_A} = 1 - U_{4,A} - U_{4,A_u}$ である。

6. Ω_i

$S = u_A((1 - \epsilon)d_{k-1} + d_k + d_{k+1}) - Y_{a_1} - y_{a_1}$ 、 $T = u_A(d_k + d_{k+1}) - Y_{a_1}$ とおく。

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \Omega_1 = u_A d_k P_A + u_B d_k P_B - u_A d_k C_A - u_B d_k C_B - u_A d_{k-1} (p_{a_0} + p_{a_1}) - u_B d_{k-1} (p_{b_0} + p_{b_1}) \\
&\quad - (Y_{a_0} - u_A d_k) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_k) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_k) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_k) H_{b_1} \\
\Omega_3 &= u_A d_{k+1} P_A + u_B d_{k+1} P_B - u_A d_{k+1} C_A - u_B d_{k+1} C_B - u_A d_k (p_{a_0} + p_{a_1}) - u_B d_k (p_{b_0} + p_{b_1}) \\
&\quad - (Y_{a_0} - u_A d_{k+1}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_{k+1}) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+1}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) H_{b_1} \\
\Omega_4 &= \Omega_1 \\
\Omega_5 &= u_A d_{k+1} P_A + u_B d_{k+1} P_B - u_A d_{k+1} C_A - u_B d_{k+1} C_B - u_A d_k p_{a_0} - (y_{a_1} - (1 - \epsilon) u_A d_{k-1}) p_{a_1} - \\
&\quad u_B d_k (p_{b_0} + p_{b_1}) \\
&\quad - (Y_{a_0} - u_A d_{k+1}) H_{a_0} - (Y_{a_1} + y_{a_1} - u_A ((1 - \epsilon) d_{k-1} + d_k + d_{k+1})) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+1}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - \\
&\quad u_B d_{k+1}) H_{b_1} \\
\Omega_6 &= u_A d_{k+2} P_A + u_B d_{k+2} P_B - u_A d_{k+2} C_A - u_B d_{k+2} C_B - u_A d_{k+1} p_{a_0} - (u_A ((1 - \epsilon) d_{k-1} + d_k + d_{k+1}) - \\
&\quad y_{a_1}) p_{a_1} \\
&\quad - u_B d_{k+1} (p_{b_0} + p_{b_1}) - (Y_{a_0} - u_A d_{k+2}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_{k+2}) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+2}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+2}) H_{b_1} \\
\Omega_7 &= \Omega_1 \\
\Omega_8 &= (u_A d_{k+1} - S) P_A + U_{3,4,A_u} S P_{A_u} + u_B d_{k+1} P_B - (u_A d_{k+1} - S) C_A - U_{3,4,A_u} S C_{A_u} - u_B d_{k+1} C_B \\
&\quad - u_A d_k p_{a_0} - (y_{a_1} - (1 - \epsilon) u_A d_{k-1}) p_{a_1} - u_B d_k (p_{b_0} + p_{b_1}) - (Y_{a_0} - u_A d_{k+1} + S - U_{3,4,A_u} S) H_{a_0} \\
&\quad - (Y_{b_0} - u_B d_{k+1}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+1} - U_{3,4,A_u} S) H_{b_1} - U_{i,B_A} S B_A \\
\Omega_9 &= (u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A} S) P_A + U_{2,4,A} S (P_A - \Delta P_A) + u_B d_{k+2} P_B - (u_A d_{k+2} + U_{1,2,4,A} S) C_A - u_B d_{k+2} C_B \\
&\quad - (u_A d_{k+1} - S + U_{1,2,4,A} S + U_{3,4,A_u} S) p_{a_0} - (Y_{a_1} + U_{1,2,4,A} S) p_{a_1} - u_B d_{k+1} p_{b_0} - (u_B d_{k+1} + U_{3,4,A_u} S) p_{b_1} \\
&\quad - (Y_{a_0} - u_A d_{k+2}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_{k+2}) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+2}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+2}) H_{b_1} \\
\Omega_{10} &= \Omega_1 \\
\Omega_{11} &= (u_A d_{k+1} - S) P_A + \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) P_{A_u} + u_B d_{k+1} P_B - (u_A d_{k+1} - S) C_A - \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) C_{A_u} \\
&\quad - u_B d_{k+1} C_B - u_A d_k p_{a_0} - (y_{a_1} - (1 - \epsilon) u_A d_{k-1}) p_{a_1} - u_B d_k (p_{b_0} + p_{b_1}) - (Y_{a_0} - u_A d_{k+1} + S - \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - \\
&\quad u_B d_{k+1})) H_{a_0} \\
&\quad - (Y_{b_0} - u_B d_{k+1}) H_{b_0} - (1 - \alpha_{3,4}) (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) H_{b_1} - (U_{i,B_A} S + U_{3,4,A_u} S - \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1})) B_A \\
\Omega_{12} &= (u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A} S) P_A + U_{2,4,A} S (P_A - \Delta P_A) + u_B d_{k+2} P_B - (u_A d_{k+2} + U_{1,2,4,A} S) C_A - u_B d_{k+2} C_B \\
&\quad - (u_A d_{k+1} - S + \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) + U_{1,2,4,A} S) p_{a_0} - (Y_{a_1} + U_{1,2,4,A} S) p_{a_1} - u_B d_{k+1} p_{b_0} \\
&\quad - (u_B d_{k+1} + \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1})) p_{b_1} - (Y_{a_0} - u_A d_{k+2}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_{k+2}) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+2}) H_{b_0} \\
&\quad - (Y_{b_1} - u_B d_{k+2}) H_{b_1} \\
\Omega_{13} &= \Omega_1 \\
\Omega_{14} &= u_A d_{k+1} P_A + u_B d_{k+1} P_B - u_A d_{k+1} C_A - u_B d_{k+1} C_B - u_A d_k p_{a_0} - u_B d_k (p_{b_0} + p_{b_1}) \\
&\quad - (Y_{a_0} - u_A d_{k+1}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A (d_k + d_{k+1})) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+1}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) H_{b_1} - 0 B_A \\
\Omega_{15} &= u_A d_{k+2} P_A + u_B d_{k+2} P_B - u_A d_{k+2} C_A - u_B d_{k+2} C_B - u_A d_{k+1} p_{a_0} - u_A (d_k + d_{k+1}) p_{a_1} \\
&\quad - u_B d_{k+1} (p_{b_0} + p_{b_1}) - (Y_{a_0} - u_A d_{k+2}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_{k+2}) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+2}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+2}) H_{b_1} \\
\Omega_{16} &= \Omega_1 \\
\Omega_{17} &= (Y_{a_1} - u_A d_k) P_A + U_{3,4,A_u} T P_{A_u} + u_B d_{k+1} P_B - (Y_{a_1} - u_A d_k) C_A - U_{3,4,A_u} T C_{A_u} - u_B d_{k+1} C_B - \\
&\quad u_A d_k p_{a_0} \\
&\quad - u_B d_k (p_{b_0} + p_{b_1}) - (Y_{a_0} - Y_{a_1} + u_A d_k - U_{3,4,A_u} T) H_{a_0} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+1}) H_{b_0} \\
&\quad - (Y_{b_1} - u_B d_{k+1} - U_{3,4,A_u} T) H_{b_1} - U_{i,B_A} T B_A \\
\Omega_{18} &= (u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A} T) P_A + U_{2,4,A} T (P_A - \Delta P_A) + u_B d_{k+2} P_B - (u_A d_{k+2} + U_{1,2,4,A} T) C_A - u_B d_{k+2} C_B \\
&\quad - (Y_{a_1} - u_A d_k + U_{1,2,4,A} T + U_{3,4,A_u} T) p_{a_0} - (Y_{a_1} + U_{1,2,4,A} T) p_{a_1} - u_B d_{k+1} p_{b_0} - (d_{k+1} u_B + U_{3,4,A_u} T) p_{b_1} \\
&\quad - (Y_{a_0} - u_A d_{k+2}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_{k+2}) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+2}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+2}) H_{b_1} \\
\Omega_{19} &= \Omega_1 \\
\Omega_{20} &= (Y_{a_1} - u_A d_k) P_A + \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) P_{A_u} + u_B d_{k+1} P_B - (Y_{a_1} - u_A d_k) C_A - \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) C_{A_u} \\
&\quad - u_B d_{k+1} C_B - u_A d_k p_{a_0} - u_B d_k (p_{b_0} + p_{b_1}) - (Y_{a_0} - Y_{a_1} + u_A d_k - \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1})) H_{a_0} \\
&\quad - (Y_{b_0} - u_B d_{k+1}) H_{b_0} - (1 - \alpha_{3,4}) (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) H_{b_1} - (U_{i,B_A} T + U_{3,4,A_u} T - \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1})) B_A \\
\Omega_{21} &= (u_A d_{k+2} + \alpha_1 U_{1,A} T) P_A + U_{2,4,A} T (P_A - \Delta P_A) + u_B d_{k+2} P_B - (u_A d_{k+2} + U_{1,2,4,A} T) C_A - u_B d_{k+2} C_B \\
&\quad - (Y_{a_1} - u_A d_k + \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - u_B d_{k+1}) + U_{1,2,4,A} T) p_{a_0} - (Y_{a_1} + U_{1,2,4,A} T) p_{a_1} - u_B d_{k+1} p_{b_0} - (d_{k+1} + \alpha_{3,4} (Y_{b_1} - \\
&\quad u_B d_{k+1})) p_{b_1} - (Y_{a_0} - u_A d_{k+2}) H_{a_0} - (Y_{a_1} - u_A d_{k+2}) H_{a_1} - (Y_{b_0} - u_B d_{k+2}) H_{b_0} - (Y_{b_1} - u_B d_{k+2}) H_{b_1}
\end{aligned}$$