

変分法と閉測地線について

四方 義隆

まづがき. まづ最初に, 本稿がきわめて中途半端な, 中間報告的なものになりましたことを詫言ひ申上げます. 実は, 茂木先生の構想によりますと, 本稿ではかなり一般の多様体に関して, その閉測地線の数の, "モデル空間" のホモロジーによって下から きれいにあさえられてしまうはずでした.

しかしながら, そういう一般論を取扱うためには われわれの理論自身か まだまだ 手直しを必要とすることと, さらにそのための準備がかなりの量にのぼりそうなこと. なとか, あきらかとなってきましたため 一応この程度で, 今回はお茶を濁させて頂くことにしました. 馬脚があらわれるのは特に多くで, 応用例 1, 2 に於いては, 計算を全く省略してしましました. 実は, その中に少々, 気持が悪い点もなくはないのです. そのようなわけで, 応用例としては 古典的な場合と Alber の場合 (球面の場合) だけしか取扱えませんでした. 従って, こゝていう 測地線のかそえ方は いわゆる "算術的" なそれであって, 幾何学的なものではないわけです. もっとも, 球面の場合の幾何学的な かそえ方くらいであれば, 無理をすれば, われわれの理論の範囲で取扱えるようなのです. 何分準備の時間がかきられてあり

ましたし、ますます、気持ちの悪い臭かふえるようになって、
これまた、割愛させて頂きました。いつれまた、残会があれば
まとめさせて頂きたいと考えています。最後に、いろいろ
御心配頂きました佐々木先生、このような残会と与えて
下さいました、残木先生を始めとする水戸セミナーの皆様方、
そして文献その他いろいろ御世話になりました塚本先生に
心より、御礼と、そして、本稿がこのようなものになりました
ことへの御詫言を申し上げます。（残木先生によって提唱さ
れた“モデルの理論”なる言葉は本稿がそれをつかうには余
りにもみすばらしいようでしたので、別のもう少しましな残
会までとって行くことにいたしました。）

§ 1. (I)型の変分問題

以下この節において、特に断わらない限り、 X は距離空間、 φ はその上の非負値連続函数とする。

定義. f を X からそれ自身の中への連続写像として、 X , φ 及び f が次の条件 A) ~ D) をみたすとき三対 (X, φ, f) を (体 $\mathbb{R}$ 上の) (I)型の変分問題とよぶ;

$$A) \quad \varphi(f(x)) \leq \varphi(x) \quad \text{for any } x \in X$$

$$B) \quad \varphi(f(x)) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(f \cdot f(x)) = \varphi(x)$$

C) X のコンパクト集合 A に対して

$$F(A) = \bigcup f^n(A)$$

はまたコンパクトになる

D) f から導かれた $H_*(X; \mathbb{R})$ の準同型 f_* は恒等的である。

(I)型の変分問題 (X, φ, f) 及び X の部分集合 A

に対して次のような記号を導入する;

$$\varphi(A) = \sup \varphi(a), \quad |A| = \inf_n \varphi(f^n(A))^*$$

$$\sigma_f = \{x \in X / \varphi(f(x)) = \varphi(x)\}, \quad \sigma_f(A) = \{x \in \sigma_f / \varphi(x) = |A|\}.$$

σ_f の点を (f に対する φ の) 停留点ということ

にする。我々のこの節における目的は、条件 A) ~ D) の下に停留点の個数の一つの下限が $H_*(X, \mathbb{R})$ における *subordination*

$$* \quad f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ 回}}(x) \quad \text{である}$$

の計算によって与えられるという事実(定理3)の証明である。

定理 1. $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とする. A と X のコンパクト部分集合とするとき $F(A) \cap \delta f(A)$ は空ではない. 従って, 特に $\delta f(A)$ は空でない.

証明 A はコンパクトだから $f^n(A)$ もコンパクト. 従って, $a_n \in A$ がとれて,

$$\varphi(f^n(a_n)) = \varphi(f^n(A))$$

又, $F(A)$ はコンパクトであるから, 数列 $\{f^n(a_{n+1})\}$ の収束部分列 $\{f^m(a_{m+1})\}$ がとれて, $\alpha = \lim f^m(a_{m+1})$ とおくと $\alpha \in F(A)$ であって

$$|A| \leq \varphi(f^{m+1}(A)) = \varphi(f \cdot f^m(a_{m+1})) \leq \varphi(f^m(a_{m+1})) \leq \varphi(f^m(A))$$

ゆえ, $\varphi^m(A) \rightarrow |A|$ に注意すれば,

$$|A| = \varphi(f(\alpha)) = \lim \varphi(f^{m+1}(a_{m+1})) = \lim \varphi(f^m(a_{m+1})) = \varphi(\alpha).$$

従って, $\alpha \in \delta f(A)$, よって $\delta f(A)$ は空でない.

補題 1. $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とするとき X のコンパクト集合 A に対して

$$F(A) \cap \delta f \subset I(|A|).$$

証明 $x \in \bigcup_n f^n(A) = F(A)$ とし $f^m(a_m)$, $a_m \in A$ を x に収束する点列とする. もし, m がいくらでも大きくなれば, $\varphi(f^m(A)) \rightarrow |A|$ に収束することから,

$$\varphi(x) = \lim \varphi(f^m(a_m)) \leq \lim \varphi(f^m(A)) = |A|$$

よって, $x \in I(|A|)$. また, $\{m\}$ が有界ほう $f^n(A)$ が
 用いていることから, ときような整数 q に対して $x \in f^q(A)$,

従って, 更に $x \in \delta f$ ほう

$$\varphi(x) = \varphi(f^i(x)) \leq \varphi(f^{i+q}(A)), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

よってこの場合にも, $\varphi(x) \leq |A|$.

補題 2 $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とする. コンパ
 クト集合 A と, $\delta f(A)$ の開近傍 U に対して, 整数 n_0 がと
 れて, $n \geq n_0$ なる任意の n に対して

$$f^n(A) \subset U \cap J(|A|),$$

となる, こゝに $J(a) = \{x \in X / \varphi(x) < a\}$ である.

証明 $x \in \delta f(A)$ ほうは, $\varphi(f(f(x))) = \varphi(f(x)) = |A|$

だから, $f(\delta f(A)) \subset \delta f(A) \subset U$. 一方, X 上の連続函数

$\mu(x) = \varphi(x) - \varphi(f(x))$ の零点は δf であり, 補題 1 によれ

ば, $F(A) \cap \delta f \cap J(|A|)^c \subset \delta f(|A|)$ だから, 函数 $\mu(x)$ は

集合 $F(A) \cap \delta f(|A|)^c \cap J(|A|)^c$ 上では零にならない. 従っ

て, それに含まれるコンパクト集合 $F(A) \cap V^c \cap J(|A|)^c$ の

上で, 最小値 $\delta > 0$ をとる. そこで整数 n_0 を $n-1 \geq n_0$

ほうは

$$\varphi(f^n(A)) \leq |A| + \delta/2$$

が成立するようにとれば,

$$f(f^n(A)) \subset U^c \cup J(|A|) \quad (n-1 \geq n_0)$$

なることが次のようにして示される:

$$i) \quad x \in f^n(A) \cap (F(A) \cap V \cap J(|A|)^c) \text{ のとき}$$

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) - \mu(x) \leq \varphi(x) - \delta \leq |A| - \delta/2 < |A|.$$

$$ii) \quad x \in f^n(A) \cap (F(A) \cap V \cap J(|A|)^c)^c \text{ のとき}$$

この場合は更に次の二つの場合が考えられる;

$$ii)-1) \quad x \in J(|A|) \text{ のとき, この場合, } f(x) \in J(|A|) \text{ は}$$

あきらか,

$$ii)-2) \quad x \in V \text{ のとき, この場合は } V \text{ の作り方から}$$

$$f(x) \in f(V) \subset U \text{ である.}$$

さて, X の (長を係数とする) 特異チェイン σ に対して その carrier, $\text{Car } \sigma$ を対応させ, $|\sigma|$, $\delta f(\sigma)$ を夫々

$$|\sigma| = |\text{Car } \sigma|, \quad \delta f(\sigma) = \delta f(\text{Car } \sigma)$$

によって定義する

補題 3 $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の交分問題とする. このとき X の (長係数) サイクル σ と, $\delta f(\sigma)$ の開近傍 U とに対して, $U \cup J(|\sigma|)$ のサイクル $\tilde{\sigma}$ が存在して, 包含写像 $i: U \cup J(|\sigma|) \rightarrow X$ に対し, $i_*[\tilde{\sigma}] = [\sigma]$ である, ここで $[\sigma]$ は σ の表わす (長係数の) ホモロジー類とする

証明 $\text{Car } \sigma$ はコンパクトだから, 補題 2 によって十分大き

いれに対しては

$$\text{Car } f^n_{\#}(\sigma) \subset f^n(\text{Car } \sigma) \subset U^0 J(|\sigma|)$$

が成立する。よってサイクル $\tilde{\sigma} = f^n_{\#}(\sigma)$ は $U^0 J(|\sigma|)$ のサイクルとみなせて、条件 D) から $i_*[\tilde{\sigma}] = [\sigma]$ は明らか。

定義 ホモロジー類 $\beta \in H_*(X; k)$ がホモロジー類 $\alpha \in H_*(X; k)$ に subordinate する、 $\beta \propto \alpha$ 、とはコホモロジー類 $\gamma \in H_*(X; k)$ がとれて、

$$\beta = \alpha \cap \gamma, \quad \dim \gamma > 0$$

となるときをいう。又、サイクル τ がサイクル σ に subordinate するとは ホモロジー類 $[\tau]$ がホモロジー類 $[\sigma]$ に subordinate するときをいう。

補題 4 (X, ϕ, f) を (I) 型の多分問題とする X の l -次元サイクル σ に対して $\phi f(\sigma)$ の開近傍 U で、 $H^m(U; k) = 0$ なるものが存在すれば、 σ に subordinate する任意の $(l-m)$ 次元サイクル τ は、 $J(|\sigma|)$ のサイクル $\tilde{\tau}$ によって $i_*([\tilde{\tau}]) = [\tau]$ とかける。

証明 $[\tau] = [\sigma] \cap \gamma$, $\gamma \in H^m(X, k)$ とする。 π, j を固有な三系 (X, ϕ, ϕ) , $(X, U, J(|\sigma|))$ の間の包含写像として、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
H_k(U \cup J(161); k) & & H^m(U; k) = 0 & & H_{k-m}(J(161); k) \\
\downarrow i_* & \uparrow [\tilde{\sigma}] & \uparrow i^* & & \downarrow i^* \\
H_k(X; k) & \otimes & H^m(X; k) & \xrightarrow{\cap} & H_{k-m}(X; k) \\
\downarrow j_* & \downarrow [\delta] & \uparrow j^* & \downarrow \tilde{\tau} & \downarrow j_* \\
H_k(X, U \cup J(161); k) & \otimes & H^m(X, U; k) & \xrightarrow{\cap} & H_{k-m}(X, J(161); k)
\end{array}$$

横列はキャップ積による写像である。もとより縦列は完全列だから $i^*\tilde{\tau} = 0$ より $\tilde{\tau} \in H(X, U)$ かとれて, $\tilde{\tau} = j^*\tilde{\tau}$.

一方, 補題3 によつて $\tilde{\sigma} \in H(U \cup J(161))$ かとれて, $i_*([\tilde{\sigma}]) = [\delta]$ だから $j_*([\delta]) = 0$. そこで $j_*([\tau])$ を考えると キャップ積の自然性から,

$$j_*([\tau]) = j_*([\delta] \cap \tilde{\tau}) = j_*([\delta] \cap j^*\tilde{\tau}) = (j_*[\delta]) \cap \tilde{\tau} = 0.$$

よつて $[\tau] = \iota_*[\tilde{\tau}]$, $\tilde{\tau} \in H(J(161))$ である.

さて, ホモロジー類 $\alpha \in H_*(X; k)$ に対して $|\alpha|$, $f(\alpha)$ をそれぞれ,

$$|\alpha| = \inf \{ |\delta| / \delta; X \text{ の サイクルで, } [\delta] = \alpha \text{ なるもの} \}$$

$$f(\alpha) = \{ x \in f / \varphi(x) = |\alpha| \}$$

によつて定める.

補題 5 $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とするととき $\alpha \in H_*(X; k)$ と実数 a に対して

$$|\alpha| < a \iff \alpha \in \text{Im}(i_*: H_*(J(a); \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z}))$$

証明 $(\Leftarrow)$ は明らかだから $(\Rightarrow)$ のみを示せばよい.

$\varepsilon > 0$ を $|\alpha| + 2\varepsilon < a$ となるようにとって置いて

$|\alpha| \leq |\sigma| < |\alpha| + \varepsilon$ を満たすサイクル σ をとる. 開集合

$U = \{x \in X \mid |\sigma| - \varepsilon < \varphi(x) < |\sigma| + \varepsilon\}$ は $\text{supp}(\sigma)$ を含むから

これに対して補題 3 を適用すると $U \cap J(|\sigma|) \subset J(|\sigma| + \varepsilon)$

$\subset J(a)$ のサイクル $\tilde{\sigma}$ がとれて, $i_*[\tilde{\sigma}] = \alpha$ である.

補題 6 $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とする + モーレ
 ー 類 $\alpha, \beta \in H_*(X; \mathbb{Z})$ に対して

$$\beta \prec \alpha \Rightarrow |\beta| \leq |\alpha|.$$

証明 $\beta = \alpha \cap \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} \in H^+(X; \mathbb{Z})$ とおいておく. キ
 ャノノ積はサイクル, コサイクルに対しても定義されているこ
 とに注意すれば, α のサイクル σ と $\tilde{\gamma}$ のコサイクル $\tilde{\gamma}_1$ に対
 して

$$\beta = [\sigma \cap \tilde{\gamma}], \quad \text{Car}(\sigma \cap \tilde{\gamma}) \subset \text{Car} \sigma$$

であるから, $|\beta| \leq |\sigma \cap \tilde{\gamma}| \leq |\sigma|$, また σ は注意の α
 のサイクルであったから $|\beta| \leq |\alpha|$.

補題 7 $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とする. また,
 $\mathbb{R}$ と実数の集合に, $[a, b)$ ($a < b$) なる形の集合族を開集合
 の基とする位相を与えた空間とする. このとき $\alpha \in H_*$
 $(X; \mathbb{Z})$ の高サ $|\alpha| > 0$ へ, $\mathbb{R}$ の部分空間 $\{\varphi(x) \mid x \in \text{supp}(\alpha)\}$ の

に於いて孤立点であるならば、 X のサイクル σ として

$$\alpha = [\sigma], \quad |\alpha| = |\sigma|.$$

証明 正数 $\varepsilon > 0$ に対して サイクル σ_ε をとって,
 $\alpha = [\sigma_\varepsilon], \quad |\alpha| \leq |\sigma_\varepsilon| < |\alpha| + \varepsilon$ ならしめておくと,
 $\delta_f(\sigma_\varepsilon)$ は定理 1 から空ではなく、従って ε を動かせば $\{|\sigma_\varepsilon|\}$
 は $\{\varphi(\alpha)/\alpha \in \delta_f\}$ は無限点列をなし、 $\mathbb{R}$ の位相の意味で
 $|\alpha|$ に収束する。従って $\varepsilon_0 > 0$ として $\alpha = [\sigma_{\varepsilon_0}],$
 $|\alpha| = |\sigma_{\varepsilon_0}|$ である。

定理 2 (X, φ, f) を (I) 型の変分問題とするホモロジー
 類 $\alpha, \beta \in H_*(X; k)$ に対して,

$$\begin{cases} \beta \propto \alpha, & |\beta| = |\alpha| \\ |\alpha| (= |\beta|) \text{ は } \{\varphi(x)/x \in \delta_f\}^{\sim} \text{ において孤立点} \end{cases}$$

が成立すれば,

$$\dim \delta_f(\alpha) \geq \dim \alpha - \dim \beta$$

証明 まず、補題 7 によって X のサイクル σ で $\alpha =$
 $[\sigma], \quad |\alpha| = |\sigma|$ なるものがとれる。このとき $\delta_f(\alpha) =$
 $\delta_f(\sigma)$ の任意の開近傍 U に対して、その $(\dim \alpha - \dim \beta)$
 次元のコホモロジー $H^*(U; k)$ は零ではない、ここで、
 $m = \dim \alpha - \dim \beta$ である。実際、もし $H^m(U; k) = 0$
 をみたす開近傍 U が存在すれば、補題 4 から $\beta \in \text{Im}$
 $(i_*: H_*(J(|\sigma|)) \rightarrow H_*(X))$ 従って 補題 5 によつ

て $|\beta| < |\sigma| = |\alpha|$ となつてしまうからである。よつ

て $\dim \delta f(\alpha) = \dim \delta f(\sigma) \geq \dim \alpha - \dim \beta$ を得る。

定理 3. (X, φ, f) を (I) 型の変分問題とする。もし X のホモロジー類 $\alpha_i \in H_*(X; k)$, $i=1, \dots, q$ がとれて

$$\begin{cases} \alpha_i \neq \alpha_{i+1}, & i=1, \dots, q-1, \\ \alpha_1 \notin \text{Im}(i_*; H_*(J(a)) \rightarrow H_*(X)) \end{cases}$$

をみたせば, X は少なくとも q 個の $(\varphi$ の) 停留点を持つ。より精密には $|a_q|$ よりも大きい任意の実数 a' に対して

$$q \leq \# \{ \delta f \cap (J(a))^c \cap J(a') \}$$

である。

証明 まず 補題 5, 6 によって

$$a \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_q| < a'$$

が得られることに注意する。もしある番号 i に対して $|\alpha_i|$

が $\tilde{R}$ における $\{\varphi(x)/x \in \delta f\}$ の集積点であったとすると

$J(a)^c \cap J(a')$ が無限個の停留点を含む事はあきらか。従

つて以下 すべての i について $|\alpha_i|$ が $\tilde{R}$ における

$\{\varphi(x)/x \in \delta f\}$ の孤立点であるとして定理を証明すればよい

さて、ある i に対して $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}|$ であったとすると定

理 2 から $\dim \delta f(\alpha_i) \geq 1$, よってこの場合も $J(a)^c \cap$

$J(a')$ は無限個の停留点を含む。そこで残るのは

$$a \leq |x_1| < |x_2| < \dots < |x_q| < a'$$

の場合にけとなるが、各 α_i に対して補題 7 にいうサ
イクルをとりてみればすぐわかるように $\delta_f(\alpha_i) = \delta_f(\text{Car}$
 $\delta_i)$ ($i=1, \dots, q$) は空でない互いに素な $\delta_f \cap (J(a))^c \cap J(a')$
の部分集合をなすから、この場合には $(J(a))^c \cap J(a')$ は
少なくとも q 個の停留点をもつことがわかる。

2 変形から導かれる変分問題

距離空間 X 上に 変形 D_t ($0 \leq t \leq 1$), すなわち,
 $D_0(x) = x$ ($x \in X$) となるような $X \times [0, 1]$ から
 X への写像が与えられたとき, X の写像 $D = D_1$ 1つ任意の
 係数体に対して, X のホモロジー群の同型をいさなす. さ
 らに, もし X 自身がコンパクトであれば, 変形 D_t からえ
 られた写像 D と X 上の連続函数 φ について §1 の条件
 A), B) がみたされるだけで, X 上の (I) 型の変分問題がえ
 られるわけである. また, 実際の問題としては, このような
 場合を取扱う場合もかなりあると考えられるので, (II) 型の変
 分問題を次のように定めておく:

定義 距離空間 X とその上の非負連続函数 φ に対して
 X の変形 D_t ($0 \leq t \leq 1$) がとれて 次の条件 A'), B')
 をみたすとき 三対 (X, φ, D_t) を (II) 型の変分問題とよぶ.
 さらに X 自身がコンパクトであるとき, この変分問題はコ
 ンパクト型であるという:

$$A') \quad \varphi(h_t(x)) \leq \varphi(x) \quad (\forall x \in X, \forall t \in [0, 1])$$

$$B') \quad \varphi(h_t(x)) = \varphi(x) \Rightarrow 0 \leq s \leq t \text{ に対して } h_s(x) = x.$$

また, (II) 型の変分問題 $(X, \varphi; D_t)$ に対して

$$C_D = \{x \in X / D(x) = x\}.$$

とあって C_D の点を停留点とよぶ.

定理 1 (II) 型のコンパクトな変分問題 $(X, \varphi; D_t)$ は任意の体 k の上の (I) 型の変分問題を定め $C_D = \mathcal{C}_D$ がなりたつ.

系 1 コンパクト型とはかぎらない (II) 型の変分問題 $(X, \varphi; D_t)$ に対して, コンパクト集合 $Y \subset X$ かとれて次の条件 1), 2) をみたすとき $\exists$ 対 $(Y, \varphi|_Y, D|_Y)$ は体 k 上の (I) 型の変分問題になり, $\mathcal{C}_{D|_Y} = C_D \cap Y$ である:

$$1) \quad D(Y) \subset Y, \quad (D = D_1 \text{ である})$$

$$2) \quad i: Y \rightarrow X \text{ を包含写像とすると}$$

$$i_*: H_*(Y; k) \rightarrow H_*(X; k); \text{ injective.}$$

証明 $\exists$ 対 $(Y, \varphi|_Y, D|_Y)$ が条件 A), B), C) をみたすのは明らかなら, 条件 D) がみたされることだけを示せばよい. まず, 次の図式は可換であるのは明らか.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow D|_Y & & \downarrow D \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_*(Y) & \xrightarrow{i_*} & H_*(X) \\ \downarrow (D|_Y)_* & & \downarrow D_* \\ H_*(Y) & \xrightarrow{i_*} & H_*(X) \end{array}$$

従って、 $D \cdot i$ と i とはホモトピー的であることを注意すれば

$$i_* \circ (D|_Y)_* = D_* \circ i_* = i_*$$

よって

$$i_* ((D|_Y)_* - id) = 0$$

そこで、仮定2) から $(D|_Y)_* = id$ を得る.

定義 $\mathcal{F} = (E, p, B)$ を (必ずしもファイバー空間とはかぎらない) 距離空間 E, B と E から B への開写像 p の三対とする. E からの非負値連続函数 φ と E の変形 h_t 及び $\mathcal{F}$ とで作る三対 $(\mathcal{F}, \varphi, h_t)$ を $\mathcal{F}$ の上の変分問題であるとはそれら3つの条件 $A'') B'') F)$ をみたすときをいう.

$$A'') \quad \varphi(h_t(x)) \leq \varphi(x) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall x \in E$$

$$B'') \quad \varphi(h_t(x)) = \varphi(x) \Rightarrow 0 \leq s \leq t \text{ に対して } p \circ h_s(x) = p(x).$$

F)-1 φ は B 上のときような非負値連続函数 ψ によって

$$\varphi = \psi \circ p \text{ と表わされる.}$$

F)-2 $\varphi(h_1(x)) = \varphi(x)$ ならば, $y \in p^{-1}(p(x))$ に

$$\text{対して} \quad p(h_1(y)) = p(y) \quad \text{である.}$$

さらに E がコンパクトであるとき この変分問題は コンパクト型であるという また

$$I_h = \{x \in E / p(h(x)) = p(x)\}$$

とあって, I_h の点をこの種の問題の停留点とよぶ

補題 1 $(\Sigma, \varphi; h_t)$ を三対 $\Sigma = (E, p, B)$ 上のコンパクト
変分問題とするとき 三対 (E, φ, h) ($h = h_t$ である)
は (I) 型の変分問題になり, その (I) 型問題としての停留点
の集合 h は I_h ~~に~~ に等しい

証明 三対 (E, φ, h) が条件 A) C) D) をみたすことは
明らか. 又, $x \in E$ に対して $\varphi(h(x)) = \varphi(x)$ であつてと
すると, F)-2 から, $x \in p^{-1}(p(x))$ に対して $p(h(x)) =$
 $p(x)$, 従つて $h \subset I_h$ であり, また $h(x) \in p^{-1}(p(x))$,
そこで, もう一度 F)-2 によつて $p(h(h(x))) = p(h(x)) =$
 $p(x)$. ゆえに, F)-1 から $\varphi(h \circ h(x)) = \varphi p(h \circ h(x)) = \varphi p(x)$
 $= \varphi(x)$ 従つて条件 B) もみたされる. もとより $p(h(x)) =$
 $p(x)$ より F)-1 によつて $\varphi(h(x)) = \varphi p(h(x)) = \varphi p(x) = \varphi(x)$
だから $h \supset I_h$ もあきらかである.

補題 2 $(\Sigma, \varphi; h_t)$ を 三対 $\Sigma = (E, p, B)$ の上の
変分問題とする. B の閉集合 U から E への写像 s で, $pos =$
 id なるものが与えられるとき, (このような写像を以下 Σ の
切断ということにする) U に含まれる任意の閉集合 F に対し

で B の変形 $\tilde{h}_t$ が定義できて, 三対 $(B, \psi; \tilde{h}_t)$ は (II) 型の変分問題になり, その停留点に関して,

$$C_{\tilde{h}} \cap F \subset p[E] \subset C_{\tilde{h}}$$

がなりたつ

証明 B の上の連続函数 $p(b)$ を次をみたすようにとる:

$$\begin{cases} 0 \leq p(b) \leq 1 & b \in B \\ p > 0 \text{ on } U, & p = 0 \text{ on } U^c \\ p = 1 \text{ on } F, \end{cases}$$

これと 切断 s とによつて B の変形 $\tilde{h}_t$ を次のように定める:

$$\tilde{h}_t(b) = \begin{cases} p \circ h_{p(b)t} \circ s(b) & b \in U \\ b & b \notin U \end{cases}$$

このとき, まず, $A'), F)-1$ より $b \in U$ のときは

$$\psi(\tilde{h}_t(b)) = \psi(h_{p(b)t} \circ s(b)) \leq \psi(s(b)) = \psi p s(b) = \psi(b)$$

であるから $(B, \psi; \tilde{h}_t)$ が $A')$ をみたすことは明ら。また $B')$ についても次のようにして容易である。

$$\psi(\tilde{h}_t(b)) = \psi(h_{p(b)t} \circ s(b)) = \psi(s(b)) = \psi(b) \quad (b \in U)$$

ならば $B')$ から $0 \leq u \leq t$ に対して

$$p(h_{p(b)u}(s(b))) = p(s(b)) = b$$

であるから $\tilde{h}_u(b) = b$ を得る

また, 停留点に関して. $b \in C_{\tilde{h}} \cap F$ ならば

$$p(h_p(b)(s(b))) = p(s(b)) \quad \text{であって}$$

F 上で $p = 1$ となることから $s(b) \in I_h$, 一方,

$b = bx$, $x \in I_h$ とかけているなら, $b \in U$ の時は, $s(b) \in p^{-1}p(x)$ ゆえ F -2 から, $p(h \circ s(b)) = p(s(b))$, さらに F -1, B' より

$$\varphi(h \circ s(b)) = \varphi(s(b)), \quad p(h_u \circ s(b)) = p(s(b)) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

である, 従って

$$\psi(\tilde{h}(b)) = \varphi(h_p(b) \circ s(b)) = \varphi(s(b)) = \psi(b)$$

これから $b \in \gamma_{\tilde{h}} = C_h$ を得て

$$C_{\tilde{h}} \cap F \subset p(I_h) \subset C_h$$

であることがわかる。

定理 2 (Σ, φ, h_t) を三対 $\Sigma = (E, p, B)$ 上の変分問題とする $\{U_i / i=1 \cdots N\}$ を B の開集合の族とし, 各 U_i 上で Σ の切断 S_i が与えられているものとする。このとき, 開集合 U_i に含まれる閉集合下に対して, B の変形 H_t がとれて, (B, φ, H_t) は (II) 型の変分問題になりその停留点については

$$C_H \cap F \subset p(I_h) \subset C_H \quad \text{が成立する.}$$

証明 各 U_i の中に閉集合 F_i をとって $\bigcup F_i = F$ なら

1め, U_i, F_i 及び切断 s_i に対して, 補題 2 にいう B の変形 $\tilde{h}_t$ を構成しておく. さらに B の変形 H_t を

$$H_t(b) = \tilde{h}_t^N \circ \cdots \circ \tilde{h}_t^1(b)$$

によって定めるとき 三対 $(B, \psi: H_t)$ の条件 $A'), B')$ をみたすことか次のようにしてわかる: まず, $\tilde{h}_t$ が $A')$ をみたすから

$$\begin{aligned} \psi(H_t(b)) &= \psi(\tilde{h}_t^N(\tilde{h}_t^{N-1}(\cdots \tilde{h}_t^1(b)))) \leq \psi(\tilde{h}_t^{N-1}(\cdots \tilde{h}_t^1(b))) \\ &\leq \cdots \leq \psi(\tilde{h}_t^1(b)) \leq \psi(b) \end{aligned}$$

ゆえ, $A')$ は明らか, 従って, $\psi(H_t(b)) = \psi(b)$ なる

$b \in B$ に対しては

$$\psi(b) = \psi(\tilde{h}_t^1(b)) = \psi(\tilde{h}_t^2 \circ \tilde{h}_t^1(b)) = \cdots = \psi(\tilde{h}_t^N \circ \cdots \tilde{h}_t^1(b))$$

であるから, $\tilde{h}_t$ が $B')$ をみたすことから $0 \leq u \leq t$ に

対して:

$$b = \tilde{h}_u^1(b), \quad b = \tilde{h}_t^1(b) = \tilde{h}_u^2(\tilde{h}_t^1(b)) = \tilde{h}_u^2(b), \dots$$

を得て, 従って

$$H_u(b) = \tilde{h}_u^N \circ \cdots \circ \tilde{h}_u^1(b) = \tilde{h}_u^N \circ \cdots \circ \tilde{h}_u^2(b) = \cdots = b.$$

また, この計算で, $t = u = 1$ としてみれば, すぐわかるように.

$$C_H = \gamma_H = \bigcap_{i=1}^N C_{\tilde{h}_i}$$

である. 従って $F = \bigcup F_i$ であることに注意すれば

$b \in C_H \cap F$ に対しては 補題 2 から

81

$$b \in C_H \cap F_i \subset C_{H^i} \cap F_i \subset p(I_H)$$

$$\text{ゆえ. } C_H \cap F \subset p(I_H), \quad \text{さらに} \\ p(I_H) \subset C_{H^i}, \quad i=1 \dots N$$

ゆえ. 結局

$$C_H \cap F \subset p(I_H) \subset \bigcap C_{H^i} = C_H.$$

を得る.

系 2 上の定理と同様の条件下, さらに次の条件 1), 2) がみたされるものとする.

1) 各 U_i の閉包はコンパクト

2) $F_H(F) = \bigcup_n H^n(F)$ から B への包含写像 i に対して

$$i_*: H_*(F_H(F); k) \rightarrow H_*(B; k): \text{ injective.}$$

このとき $F_H(F)$ と ψ, H の $F_H(F)$ への制限 ψ', H' とのなす三対 $(F_H(F), \psi', H')$ は (I) 型の変分問題になりその停留点については .

$$\gamma_{H'} = C_H \cap F_H(F)$$

が成立する

証明 $(B, \psi: H)$ は (II) 型の変分問題であり, また, 当然ながら

$$H(F_H(F)) = H(\overline{\bigcup_n H^n(F)}) \subset \overline{H(\bigcup_n H^n(F))} \subset \overline{\bigcup_n H^n(F)} = F_H(F)$$

であるから, $F_H(F)$ がコンパクトであることさえ示せば,

定理 1 の系 1 によって 結論に従う. さて, $\overline{\bigcup U_i} = W$

と仮定より W はコンパクトで, 従って, $W^{\cup} H(W)$

もコンパクト. 一方, H は W の外では, 恒等的であるから,

$$H(W^{\cup} H(W)) = H(W)^{\cup} H(H(W) - W) \subset W^{\cup} H(W)$$

従って, $F \subset W^{\cup} H(W)$ に対して

$$\bigcup H^n(F) \subset W^{\cup} H(W)$$

が成立する. よって $\overline{\bigcup H^n(F)} = F_H(F)$ はコンパクト

である.

§ 3 代数的な整理と応用

この節においても 特に断わらないかぎり X は距離空間, φ はその上の非負値連続函数とする.

定義 X の部分空間 $A \subset B$ と, 体 k に対し $m(X, A, B; k)$ をホモロジー類 $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in H_*(X; k)$ の列で, 次の条件 (i) ~ (iii) をみたすものの最大の長さとする:

- (i) $\alpha_i \prec \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, q-1$
 - (ii) $\alpha_i \notin \text{Ker}(f_* : H_*(X; k) \rightarrow H_*(X, A; k))$, $i = 1, \dots, q$
 - (iii) $\alpha_i \in \text{Ker}(j_* : H_*(X; k) \rightarrow H_*(X, B; k))$, $i = 1, \dots, q$
- 特に $A = \phi$, $B = X$ のとき $m(X, \phi, X; k)$ を単に $m(X, k)$ とかく. よに, 実数 $a < b$ に対して

$A = J(a) = \{x \in X / \varphi(x) < a\}$ $B = J(b) = \{x \in X / \varphi(x) < b\}$
 にとって $m(X, J(a), J(b); k)$ を単に $m(X, a, b; k)$ とかく. この記号によれば, § 1, 定理 3 は次のようにもいえる.

定理 1 距離空間 X とその上の非負値連続函数 φ とに対して X 上の写像 f が存在して, 三対 (X, φ, f) が体 k 上の (I) 型の変分問題になれば 任意の実数 $a < b$ に対して

$$m(X, a, b; k) \leq \# \{J_f \cap J(a)^c \cap J(b)\}$$

系 1 記号は上の定理のよゝとする 三対 $(X, \varphi, -)$ の
例えは (II) 型のコンパクト変分問題のときのように、正定
素数 p について $\mathbb{Z}_p$ 上の (I) 型の変分問題となるとき、

$$m(X, a, b) = \substack{\text{sub} \\ p\text{-prime}} m(X, a, b; \mathbb{Z}_p)$$

これには、

$$m(X, a, b) \leq \# \{ \mathcal{J}_f \cap \mathcal{J}(a)^c \cap \mathcal{J}(b) \}$$

補題 1 距離空間 X, X' とそれぞれの部分空間の対、

$A \subset B \subset X, A' \subset B' \subset X'$ に対して X' から X への写像 g
が存在して、 $g(A') \subset g(A), g(B') \subset g(B)$ であるとする。

更に、 g が誘導する (工) ホモロジー準同型に対して

$$g^*; H^*(X'; k) \leftarrow H^*(X; k); \text{ surjective}$$

$$g_*; H_*(X', A'; k) \rightarrow H_*(X, A; k); \text{ injective}$$

であるならば

$$m(X', A', B'; k) \leq m(X, A, B; k)$$

証明 $\alpha'_1, \dots, \alpha'_q \in H_*(X'; k)$ の (X', A', B') に対し

て条件 (i) ~ (iii) をみたすものとする これらの g_* によ

る像 $g_*(\alpha'_1), \dots, g_*(\alpha'_q) \in H_*(X; k)$ のやはり

(X, A, B) に対して 条件 (i) ~ (iii) をみたすことを示せば

補題は明らか、また、 $\alpha'_i = \alpha'_{i+1} \wedge \sum \alpha'_j \wedge \sum \alpha'_k \in H^*(X'; k)$,

とかくとき $\bar{z}_i' = g^* \bar{z}_i$, $\bar{z}_i \in H^*(X, k)$ とできるから,
 キヤツプ積の自然性より $g_*(\alpha_i') = (g_*(\alpha_{i+1}')) \cap \bar{z}_i$
 ゆえ, $\{g_*(\alpha_i')\}$ は (i) をみたすことである. また 条件
 (ii), (iii) については 次の図式可換であることから明らか
 である.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_*(X') & \longrightarrow & H_*(X', A') & \longrightarrow & H_*(X', B') & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \alpha_i' & \xrightarrow{\quad} & j_*(\alpha_i) & \xrightarrow{\quad} & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow \text{injective} & & & \\
 H_*(X) & \xrightarrow{\quad} & H_*(X, A) & \xrightarrow{\quad} & H_*(X, B) & \longrightarrow & 0 \\
 & g_*(\alpha_i') & \xrightarrow{\quad} & j_*(g_*(\alpha_i')) & \xrightarrow{\quad} & 0 &
 \end{array}$$

系 2 補題 1 において, $A' = \phi$ とおけば

$g_*: H_*(X'; k) \rightarrow H_*(X, A; k); \text{ injective}$
 ならば $g(X') \subset B$ なる任意の X の部分空間に対して
 $m(X'; k) \leq m(X, A, B; k)$

である.

定理 2 (X, φ, f) を (I) 型の変分問題とする. もし
 距離空間 X' と, X' から X への写像 g に対して 実数 a ,
 b がとれて, $g(X') \subset J(b)$ かつ

$g_*: H_*(X'; k) \rightarrow H_*(X, J(a); k); \text{ injective}$

であれば

$$m(X'; k) \leq \#\{J_f \cap J(a)^c \cap J(b)\}$$

である。

注 実はさらにコンパクト台のホモロジー論 (それを $\mathcal{H}$ で表わす) をつかえば X がコンパクトのとき、定理 2 は次のように精密化しておくこともできる。

* $g_*: H_*(X'; k) \rightarrow \mathcal{H}(X, I(a); k):$ injective
 ならば $m(X'; k) \leq \#\{J_f \cap I(a)^c\}$.

そしてこのことが、一般の多様体上の閉測地線論を組立てるときに効いてくるのであるが、いろいろな事情から本稿では触れることができなかった。実際に効いてくる点は、次の 2 点である: まず、 $a=0$ にとれること、これによって 1 点に縮んでしまう閉測地線を考えないですむ。次に、 X 全体では都合の悪いことも $X - I(a)$ ではうまくいくこともあつて、

従つて $\mathcal{H}(X; k) = H(X; k)$ は計算しにくいとしても $\mathcal{H}(X, I(a)) = \mathcal{H}(X - I(a))$ の計算ならできるといったことが起りうるのである。

応用例 1 M をコンパクト・リーマン多様体, $P(M)$ を弧長に比例したパラメーター $t \in [0, 1]$ をもち, piecewise

に微分可能な M 上の閉じた道の全体とする。 L を $P(M)$ の各点に対し その長さを対応させる函数とする。 これは $P(M)$ に次のような距離 d によって位相を入れるとき、 $P(M)$ 上の連続な函数になる。

$$d(\alpha, \beta) = |L(\alpha) - L(\beta)| + \min_{0 \leq t \leq 1} \text{dist}(\alpha(t), \beta(t))$$

ここで、 $\text{dist}(p, q)$ は M 上の点 p, q 間の距離である。

よく知られているように、有限な正数 a に対して $I(a) = \{x \in P(M) / L(x) \leq a\}$ 上の変形 h_t によって、次をみたす。

$$1) \quad s \geq t \quad \text{なら} \quad L(h_s(\alpha)) \geq L(h_t(\alpha))$$

$$2) \quad L(h_t(\alpha)) = L(\alpha) \quad \text{から} \quad h_t(\alpha) = \alpha$$

$$3) \quad \alpha : \text{geodesic} \iff h_1(\alpha) = \alpha$$

このような h_t は道 α 上の十分多くの点 $p_1(\alpha) \dots p_N(\alpha)$ を最短測地線で順次結んで得られるのであるから、 $P(M)$ の点 α で、 N 個の M の点 $p_1(\alpha) \dots p_N(\alpha)$ ($p_{N+1}(\alpha) = p_1(\alpha)$ とかく)

$2 \text{ dist}(p_i(\alpha), p_{i+1}(\alpha)) \leq \text{elementary length of } M$ にとれて、かつ、

$$\alpha = \bigcup_{i=1}^N \overline{p_i(\alpha) p_{i+1}(\alpha)}$$

とかけるようなものの全体を $P^N(M)$ とかくとき h_1 は更に次をもみたす。

4) a によってきまる整数 N があって

$$\alpha \in I(a) \implies h_1(\alpha) \in P^N(M) \cap I(a)$$

以上より 三対 $(I(a), L; h_1)$ が (II) 型の変分問題になることはみやすい. 実際, 上の条件 1), 2) がそれぞれ 条件 $A'), B')$ に対応しているのである. またさらに,

$P^N(M) \cap I(a)$ はコンパクトであり, 明らかに包含写像

$i: P^N(M) \cap I(a) \rightarrow I(a)$ はホモロジー群の間の同型写像

をひきおこすから $h = h_1$ を $P^N(M) \cap I(a)$ に制限したもの

を同じ記号 h で表わすとき 4) より 三対 $(P^N(M) \cap I(a), L; h)$ は S^2 , 系 1 の条件を満たし. 従って (I) 型の変分問題を与える. よって 定理 1, 2 のつかえることにはり,

ε を十分小さくとると $J(\varepsilon)$ の点は いっせいに 1 点のみより成る道に縮んでしまうから $J(\varepsilon)$ は全体として M に可縮であることに注意すれば 長さ ε 以上で a 以下であるような閉測地線の数の下限が まったく代数的に計算できる $m(P(M), \varepsilon, a; h)$ によって与えられることがわかる.

応用例 2 $(I(a), L, h_1)$ をコンパクトリーマン多様体

M 上に構成された. 前例の三対とする. $G \subset I(a)$ を

(piecewise とはいわないで) 微分可能な道ばかりよりなる

$I(a)$ のコンパクト集合とすると $G = G_0$ から帰納的に

定義される集合 $G_{i+1} = \{h_t(X_i) / 0 \leq t \leq 1, X_i \in G_i\}$, の和集合 $E = \bigcup G_i$ はまたコンパクトであることが証明される (と思う. 少なくとも $M = S^n$, $F = C_n$ のときはたしかである). 従って, L, h_t を E に制限したものを同じ記号 L, h_t で表わして (II) 型のコンパクトな変分問題 (E, L, h_t) を得る. E の元のパラメータ空間 S^1 への S^1 自身の作用を E への S^1 の作用と考えて商空間 $E/S^1 = B$ が作られる. E から B への自然な射影を p とするとき 三対 $(\mathfrak{F}, L, h_t)$ の三対 $\mathfrak{F} = (E, p, B)$ 上の変分問題になることはみやすい. 一方, $\hat{I}(a), \dots$ を B 上に自然に定義されている長さ $\hat{L}$ によって定まる集合 $\{b \in B / \hat{L}(b) \leq a\}, \dots$ とするとき $\hat{I}(a') (a' > 0)$ では S^1 の作用は次をみたす.

$$\begin{aligned} & "s, t \in S^1, b \in \hat{I}(a')^c (a' > 0) \text{ に対して} \\ & s(b) = t(b) \text{ ならば } s = t" \end{aligned}$$

従って (例えば Montgomery-Zippin Transf. Groups p. 220 参照) $\mathfrak{F}$ は $\hat{I}(a')^c$ 上で局所的な切断を有する. よって任意の $a > 0$ に対してコンパクト空間 B の閉集合 $\hat{I}(a)^c = F$ と有限個の開集合でおおってその各開集合の上で切断が与えられているようにすることができる. そこで, §2, 定理2が適用できて, コンパクト空間 B の上に

(II)型の交分問題 $(B, \tilde{J}; H_k)$ で

$$C_H \cap \tilde{J}(a)^c \subset p(\tilde{I}_H) \subset p\{\text{geodesics in } P(M)\}$$

をみたすようなものを作れる。そして、定理1によって

$$m(B, a, b; k) \leq \#\{C_H \cap \tilde{J}(a)^c \cap \tilde{J}(b)\}$$

であるから 閉測地線の下限の計算の問題は $m(B, a, b; k)$

の計算に還元されてしまうわけである。さらに、もし、たと

えば、包含写像 $i: G \rightarrow E = \bigcup G_i$ の引き起こす写像

$$\tilde{i}: p(G) \rightarrow B = p(E) \quad \text{に対して}$$

$$\tilde{i}_*: H_*(p(G); k) \rightarrow H_*(B, \tilde{J}(a); k)$$

が単射的であれば 定理2によって M 上の 閉測地線で長さ

が a 以上のものの数の下限の一つが $H_*(p(G); k)$ における

subordinationを調べることによって与えられることがわかる。

そこで、当然、では、どのような G を最初にとれば $\tilde{i}_*$

が単射的となり、かつ、 $H_*(p(G); k)$ において subordinate

するホモロジー元がもっとも多くなるかということの問題に

なるはずである、これらに関する一般論にはふつうのホモロ

ジーよりコンパクト台のホモロジーの方が都合がよいことは

$H_*(B, \tilde{J}(a)^c)$ が $B - \tilde{J}(a)^c$ に近いことと、

$B - \tilde{J}(a)^c$ の上では、 S^1 をファイバーとするファイバ

ーバンドルになっていて $H_*(B, \tilde{J}(a)^c)$ の計算が比較的容

易であることからもうなづけよう。実際、上の構成を M を S^1

に同相な多様体, G を S^n 上の大円集合 G_n の $P(M)$ における同相優^(*)に対して行なったときには, この方法 (実は Gysin の完全列と呼ばれるもの) によって

$$\tilde{i}_* : H_*(p(G); \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathcal{H}_*(B, \hat{I}(0)^p; \mathbb{Z}_p)$$

が単射的であることがわかる. そして $p(G)$ の $(n+1)$ -空間内の 2 次元線形空間全体のなす多様体 C_n に同相なことから $H_*(p(G); \mathbb{Z}_2)$ における subordination の計算ができるのである. もっとも, ふうのホモロジー論をとったとしても i_* が単射的であることは Alber や Klingenberg によって証明されていて, 従って, 同様に問題は $H_*(p(G); \mathbb{Z}_2)$ における subordination に還元されてしまう. そして $H_*(C_n; \mathbb{Z}_2) = H_*(p(G); \mathbb{Z}_2)$ はよくわかっているのだ. (例へば, A. Borel, Ann. of Math. 57) S^n に同相な多様体 M は $n = 2^* + s$ ($s < 2^*$) とかくとき $2n-1-s$ 以上の閉測地線を持つことが結論できるのである.

実は, もう少し一般に, rank 1 の対称空間について, このような G の存在を示し, それを, モデルと呼び, その上での一般論を構成したかったのですが, いろいろな事情から 果せませんでした. こゝにお詫び申し上げます. しかし, そういうもの すなわち, 上の i_* (又は $\tilde{i}_*$) を単射

的にするようなものかといれたとしたり... という議論は、
これまで述べて来たものでできているようにも思います。
途中インチキしましたところにつきましては、どうか不意
を許して下さい。