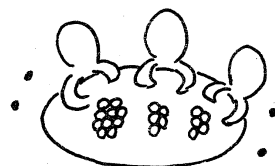


n 人でする石取りゲーム



明石高専 加納幹雄 (Mikio KANO)

まずいくつかの石の山をつくる。この石の山を用いて n 人のプレーヤー $P_1, P_2, \dots, P_n$ で次のような石取りゲームをする。まず P_1 がどれか1つの山から1個以上石を取る。このとき取る石の数に制限をつける場合とつけない場合がある。次に P_2 がある山から1個以上石を取る。以下このような石取りを $P_3, P_4, \dots, P_n, P_1, \dots, P_n, P_1, \dots$ と石が失くなるまで続けてゆく。そして X_1 が着手(石を取る)したとき全部の石が取られゲームは終わったものとする。 X_1 の1手前に着手したプレーヤーを X_{i+1} で表す。例えば P_1, P_2, P_3, P_4 の4人でゲームをし、 P_3 が着手したときゲームが終了すれば、 $X_1 = P_3, X_2 = P_2, X_3 = P_1, X_4 = P_4$ である。このとき $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の置換 σ を1つ選ぶ、これを用いてプレーヤーの順位を1位 $X_{\sigma(1)}$, 2位 $X_{\sigma(2)}$, $\dots$, n 位 $X_{\sigma(n)}$ と定める。このような石取りゲームを n 人でする σ -石取りゲーム とよぶ。しかしここで扱うのは次のような特別なゲームである。

正規型石取りゲーム

1位 X_1 , 2位 X_2 , $\dots$, n 位 X_n

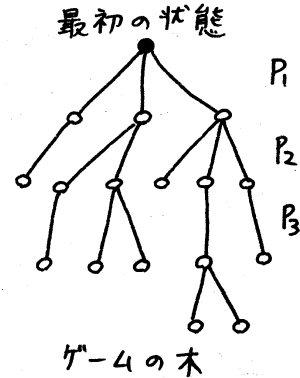
ℓ 後退正規型石取りゲーム

1位 X_ℓ , 2位 $X_{\ell+1}$, $\dots$, n 位 $X_{\ell+n-1}$

ただし $\ell \geq 2$ で、添字 $\ell+i$ は $(\text{mod } n)$ でとるものとする。

すると2人でする正規型石取りゲームは普通の正規型石取りゲームになっており、2人でする2後退正規型石取りゲームは普通の逆型石取りゲームになっている。

さて n -石取りゲームを決めると、最初の石の山の型により、誰かが1位になるかがゲームを始める前に理論上確定することを述べよう。最初の石の山を頂点とするゲームの木を考え、この木の点は石の山の型に対応し、辺は着手に対応する([3])。するとこの木の末端から順に誰が1位になるかが、特に全員の順位が決まってくる。つまりある点(ある石の山)において、その点からでているすべての下の子点に対し誰が1位になるかが決まっておれば、この点で着手するプレイヤーは自分の順位が最もよくなるように着手するはずである。よってこの点からゲームを始めると誰が1位になるか、特に全員の順位が確定する。これを繰り返していけばよい。



もちろんあるプレイヤーが1位になるはずのゲームであっても、最下位にならないはずのプレイヤーがミスすれば他のプレイヤーが1位になることもある。そしてミスをしたプレイヤーは、他のプレイヤーがその後着手を間違えなければ、最初に得られるはずだった順位より下位になる。つまり1人のミスは全体の順位を狂わせるが、ミスをした本人の順位も下げる。

$x, y, \dots, z$ 個の石からなる石の山を $(x, y, \dots, z)$ で表す。そして $x, y, \dots, z$ を2進展開し、各桁ごとに加えたものを $(\text{mod } n)$ で求め、これを n 進展開したものとみなして求めた数を m -ニム和 とよび $x \oplus y \oplus \dots \oplus z$

で表す、つまり $x = \sum x_i 2^i$, $y = \sum y_i 2^i$, ..., $z = \sum z_i 2^i$ とし $x \oplus y \oplus \dots \oplus z = \sum w_i 2^i$ とおくとき $x_i + y_i + \dots + z_i \equiv w_i \pmod{n}$, $0 \leq w_i < n$ であり、例えば $14, 11, 10, 7$ の $n=4$ 和は $14 \oplus 11 \oplus 10 \oplus 7 = (8+4+2) \oplus (8+2+1) \oplus (8+2+1) \oplus (8+2+1) = (3 \times 8 + 2 \times 4 + 4 \times 2 + 2 \times 1) = (2 \times 9 + 1 \times 3 + 2 \times 1) = 23$ となる。

定理 A 石の山 $(x, y, \dots, z)$ を用いて n 人で、取る石の数に制限のない正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレイヤーが最下位になるための必要十分条件は

$$x \oplus y \oplus \dots \oplus z = 0 \quad (n=4 \text{ 和}) \quad \text{となることである。}$$

定理 B 石の山 $(x, y, \dots, z)$ を用いて n 人で、取れる石の数に制限のない後退正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレイヤーが最下位になるための必要十分条件は

$$\text{もしある石の山に 2 個以上石があれば} \quad x \oplus y \oplus \dots \oplus z = 0 \quad (n=4 \text{ 和})$$

$$\text{もしすべての石の山に 1 個石があれば} \quad x \oplus y \oplus \dots \oplus z = 1 \quad (n=4 \text{ 和})$$

となることである。

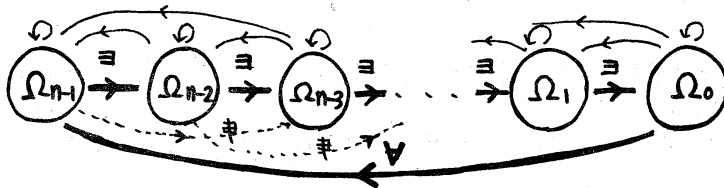
取れる石の数が k 個以下に制限された場合は、石の山が高々 2^k までの場合しかわかっていない、また一般に n 人でする石取りゲームのグリンデー関数についても存在、不存在 (合理的な計算法を含めて) が不明である、2 人でする石取りゲームについては一松 [1] が詳しく、又 2 人でする逆型石取りゲームについては山崎 [2] を参照された。

定理 A の証明

石のない状態 (0) も含めて石の山の全体を Ω とおく、そして i 番目に着手するプレイヤー P_i が 1 位になる石の山の全体を Ω_i で表し、便宜上 Ω_n を Ω_0 とかき (0) $\in \Omega_0$ とする、すると Ω は $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{n-1}$ と直和に分割される、石の山 m に着手 φ をして得られる石の山を $\varphi(m)$ とかき、着手 φ_1 をし次に着手 φ_2 をして得られる石の山を $\varphi_2(\varphi_1(m)) = \varphi_2 \circ \varphi_1(m)$ とかく、

補題 1 Ω の分割 $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$ は次の条件を満たす、

- (1) (0) $\in \Omega_0$ 、また $m \in \Omega_0$ なら任意の着手 φ に対し $\varphi(m) \in \Omega_{n-1}$ とある、
- (2) $m \in \Omega_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) なら $\varphi(m) \in \Omega_{i-1}$ とある着手 φ が存在する、
- (3) $m \in \Omega_i$ ($2 \leq i \leq n-1$) なら任意の着手 φ に対し $\varphi(m) \notin \Omega_{i-2} \cup \dots \cup \Omega_0$ 、



$m \in \Omega_i$	Ω_{n-1}	Ω_{n-2}	$\dots$	Ω_2	Ω_1	Ω_0	m がゲームを始めたときの P_i と P_n の順位表
P_1 が始めたときの P_1 の順位	$n-1$	$n-2$		2	1	n	
P_1 " " P_n "	n	$n-1$		3	2	1	

(証) $m \in \Omega_i$, $i \neq 0$, とする、 m に着手するプレイヤーを P とすると P の順位は i となるはずである (上の表)、1 手着手するとその局面において最後に着手するプレイヤーとなるから、最後に着手するプレイヤーが i 位になる局面にできるはずである (上の表)、よって (2) が成り立つ、また $m \in \Omega_i$ ($i \geq 2$) のとき $\varphi(m) \in \Omega_{i-2} \cup \dots \cup \Omega_0$ とある着手 φ が存在すれば、この着手によって P の順位は $i-1$ 位より良くなり i 位になることに反する、よって (3) が成り立つ、同じ理由で $m \in \Omega_0$ なら必ずある着手 φ で $\varphi(m) \in \Omega_{n-1}$ とある、つまり (1) が成り立つ、

補題2 Ω の分割 $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{n-1}$ が補題1と同じ条件を満たすなら $\Omega_i = \Omega'_i$, $0 \leq i \leq n-1$, とする.

(証) Ω の元全体に, $\bar{m}$ の番号 $> \varphi(\bar{m})$ の番号 (すなわちの着手 φ に対して) とするよう
に番号をつけ, この番号に関する帰納法で証明する. $(0) \in \Omega_0$ より1番目はよい.
 $\bar{m} \in \Omega'_i$ とする. もし $\bar{m} \in \Omega'_0$ なら $\varphi(\bar{m}) \in \Omega'_{n-1}$ となり, 帰納法の仮定により $\varphi(\bar{m})$
 $\in \Omega_{n-1}$ とする. すなわちの着手で Ω_{n-1} にある $\bar{m}$ は Ω_0 のものに限るから $\bar{m} \in \Omega_0$.
もし $\bar{m} \in \Omega'_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) なら $\varphi(\bar{m}) \in \Omega'_{i-1}$ とする着手 φ が存在する. 帰納法の仮
定より $\varphi(\bar{m}) \in \Omega_{i-1}$. おて $\bar{m}$ を用いてゲームをすると P_1 は i 位以上にたれる (Ω_{i-1}
における P_n の順位は i 位). 一方 $\varphi(\bar{m}) \in \Omega'_j$ ($j \leq i-2$) とする着手 φ は存在する
いし, $\varphi(\bar{m}) \in \Omega'_k$ ($k \geq i$) とする着手 φ を P_1 がすれば " $\varphi(\bar{m}) \in \Omega_k$ より P_1 の順位
は $k+1$ 位とある. よって P_1 の得られる最高順位は i 位である. 故に $\bar{m} \in \Omega_i$.

補題3 Ω の部分集合 X が次の条件を満たせば " $X = \Omega_0$ " である.

$$(1) \quad (0) \in X$$

$$(2) \quad \bar{m} \in X \text{ とすると, 任意の着手 } \varphi_1, \dots, \varphi_r \text{ } (1 \leq r \leq n-1) \text{ に対し } \varphi_r \circ \dots \circ \varphi_1(X) \not\subset X.$$

$$(3) \quad \bar{m} \notin X \text{ なら } \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(X) \in X \text{ とする着手 } \varphi_1, \dots, \varphi_0 \text{ } (1 \leq i \leq n-1) \text{ が存在する.}$$

(証) $\Omega''_0 = X$, $\Omega''_{n-1} = \{\varphi(\bar{m}) \mid \bar{m} \in \Omega''_0\}$, $\Omega''_{n-2} = \{\varphi(\bar{m}) \mid \bar{m} \in \Omega''_{n-1}\} - \Omega''_{n-1}$, $\dots$
 $\Omega''_1 = \{\varphi(\bar{m}) \mid \bar{m} \in \Omega''_2\} - \Omega''_{n-1} \cup \dots \cup \Omega''_2$ (補題1の図) とおくと, Ω は $\Omega = \Omega''_0$
 $\cup \dots \cup \Omega''_{n-1}$ と直和に分割され, 又補題1の条件を満たす. よって補題2
より $\Omega''_i = \Omega_i$, 特には $\Omega''_0 = X = \Omega_0$ とする.

$n=4$ 和が0となる石の山の全体を Y で表す. すなわち

$$Y = \{\bar{m} = (x, y, \dots, z) \mid x \oplus y \oplus \dots \oplus z = 0 \text{ } (n=4 \text{ 和})\} \cup \{(0)\}$$

とある。以下 Y が補題3の条件をみたすことを示す。これができれば定理

A は証明されたことになる。 Y が補題3の (1) をみたすのは明らかである。

補題4 Y は補題3の条件 (2) をみたす。

(証) $\overline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_r) \in Y$ が r 回の着手 $\varphi_r \circ \varphi_{r-1} \circ \dots \circ \varphi_1$ で $\overline{m}' = (m'_1, \dots, m'_r)$ にあたるとする。 $m_i = \sum_x d_i^x 2^x$, $m'_i = \sum_x \beta_i^x 2^x$ ($d_i^x, \beta_i^x = 0$ or 1) とおく。ある i, x で $d_i^x > \beta_i^x$ とある。このような i, x の中で x が最大になるものを ρ とおく。すると $\sum_{i=1}^r d_i^\rho \equiv 0 \pmod{n}$ と $\#\{i \mid d_i^\rho + \beta_i^\rho\} \leq r < n$ より

$$-\sum_{i=1}^r \beta_i^\rho \equiv \sum_i (d_i^\rho - \beta_i^\rho) \equiv n - \#\{i \mid d_i^\rho + \beta_i^\rho\} \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

よって $\sum \beta_i^\rho \not\equiv 0 \pmod{n}$, つまり $\overline{m}' \notin Y$.

補題5 Y は補題3の条件 (3) をみたす。

$\overline{m} = (m_1, \dots, m_r) \notin Y$ とする。もし $r < n$ なら r 回の着手で $\overline{m}$ を $(0) \in Y$ にできる。よって $r \geq n$ としよ。 $m_i = \sum_x d_i^x 2^x$ ($d_i^x = 0$ or 1) とおく。

$m_1 \oplus \dots \oplus m_r = a n^p + a_1 n^{p-1} + \dots$, $a > 0$ とかけるが、一般性を失うことなく $d_1^p = \dots = d_a^p = 1$ と仮定してよい。 $m_{a+1} \oplus \dots \oplus m_r = \sum_x f_x m^x$ とおく。

1° もしある x で $0 \leq x \leq p-1$, で $f_x = 0$ 又は $n-a \leq f_x < n$ なら a 回の着手で $\overline{m}$ を $(m'_1, \dots, m'_a, m_{a+1}, \dots, m_r)$ にかえ $m'_1 \oplus \dots \oplus m'_a \oplus m_{a+1} \oplus \dots \oplus m_r = 0$ とできる。

(証) 各 x , $0 \leq x \leq p-1$ に対し $f_x = 0$ なら $g_x = 0$, $f_x \neq 0$ なら $g_x = n - f_x$ とおく。そして整数 $y_1, \dots, y_a$ を $y_1 \oplus \dots \oplus y_a = \sum_{x=0}^{p-1} g_x n^x$ とおけるようにとる。これは $0 \leq g_x \leq a$ より容易にできる。このとき各 m_i , $1 \leq i \leq a$, を $m'_i = \sum_{x \geq p} d_i^x 2^x + y_i$ にかえる ($d_i^p = 1$ より $m_i > m'_i$)。すると $m'_1 \oplus \dots \oplus m'_a \oplus m_{a+1} \oplus \dots \oplus m_r = 0$ となる。

2° もしある x , $0 \leq x \leq p-1$, で $0 < f_x < n-a$ とあるなら, このような x の中で最大のものを δ とする. このとき $d_{a+1}^\delta = d_{a+2}^\delta = \dots = d_{a+b}^\delta = 1$, $b = f_x$ と仮定してよいが, すると $m_1, \dots, m_a \in m'_1, \dots, m'_a$ にして

$$m'_1 \oplus \dots \oplus m'_a \oplus m_{a+1} \oplus \dots \oplus m_{a+b} = (a+b)n^\delta + b_1 n^{\delta-1} + \dots$$

とできる.

(証) 各 x , $\delta < x < p$, に対し $f_x = 0$ なら $g_x = 0$, $0 < f_x$ なら $g_x = n - f_x$ とおき, 整数 $y_1, \dots, y_a$ を $y_1 \oplus \dots \oplus y_a = \sum_{x=\delta+1}^{p-1} g_x n^x + a n^\delta$, $y_i < 2^p$, とできるように決める. そして各 $m_i \in m'_i = \sum_{x \geq p} d_i^x 2^x + y_i$ にかえればよい.

$$m_{a+b+1} \oplus \dots \oplus m_{a+b} = \sum f_x' 2^x \quad \text{と書く.}$$

3° もしすべての x , $0 \leq x < \delta$ で $f_x' = 0$ 又は $n - (a+b) \leq f_x' < n$ なら $m_1, \dots, m_{a+b} \in m''_1, \dots, m''_{a+b}$ にかえて $m'_1 \oplus \dots \oplus m''_{a+b} \oplus m_{a+b+1} \oplus \dots \oplus m_{a+b} = 0$ とできる.

(証) 各 x , $0 \leq x < \delta$ に対し $f_x' = 0$ なら $g_x' = 0$, $0 < f_x'$ なら $g_x' = n - f_x'$ とおき, 整数 $y'_1, \dots, y'_{a+b}$ を $y'_1 \oplus \dots \oplus y'_{a+b} = \sum_{x=0}^{\delta-1} g_x' n^x$, $y'_i < 2^\delta$ とできるように決める. $g_x' \leq a+b$ よりこれはできる. さて各 m_i を $1 \leq i \leq a$ なら

$$m'_i = \sum_{x \geq \delta} d_i^x 2^x \quad \text{と書くとき} \quad \sum_{x \geq \delta} d_i^x 2^x + y'_i = m''_i \quad \text{に, } a < i \leq a+b \text{ なら}$$

$$\sum_{x \geq \delta} d_i^x 2^x + y'_i \quad \text{にかえる. すると } m'_1 \oplus \dots \oplus m''_{a+b} \oplus m_{a+b+1} \oplus \dots \oplus m_{a+b}$$

$= 0$ とある. ($1 \leq i \leq a$ なら $m_i \geq m'_i \geq m''_i$ より m_i から m''_i に 1 回の着手でできる)
(2は0回)

以下もし $0 < f_x' < n - (a+b)$ とある f_x' があれば 2° と同じようにし, 次に 3° に相当することが残り立つかどうか調べる. 残り立てばよいし, 残り立たねば再び 2° と同じことをする. すると ℓ 回 ($\ell \leq n-1$) の着手で $m_1, \dots,$

m_ℓ を $m_1^*, \dots, m_\ell^*$ にかえ $m_1^* \oplus \dots \oplus m_\ell^* \oplus m_{\ell+1} \oplus \dots \oplus m_k = 0$ とできることがわかる、故に補題5は証明された。

以上で定理Aは証明されたことになる、定理Bの証明もほぼ同じようにしてできる、異なる点は $(0) \in X, (0) \in \Omega_0$ が $(1, \dots, 1) \in X, \in \Omega_0$ 、ただし1は $\text{mod } n$ で数えて $\ell-1$ 個、とあるだけである、詳しくは[4]を参照された。

最後にいろいろ議論していただいた二宮博比に感謝します。

文 献

- [1] 一松 信 ; 石とリゲームの数理, 森北出版 (1968)
- [2] 山崎洋平 ; On misère Nim type games, J. Math. Soc. Japan, Vol. 32, 461-475 (1980)
- [3] 二宮 博 ; ある種のニムについて, 明石高専研究紀要, Vol. 24 119-124 (1982)
- [4] 加納 卓雄 ; The game of Nim played by n players, 投稿中