

Strongly compact cardinals and the fixed points of elementary embeddings

筑波大 院生 阿部吉弘 (Yoshihiro Abe)

J. Barbanel ([1]) は, κ が supercompact の時に,
 $P_{\kappa}\lambda$ 上の normal ultrafilter $\mathcal{U}$ により導かれる elementary
embedding $j: V \longrightarrow M \cong V^{P_{\kappa}\lambda}/\mathcal{U}$ により fixed される cardinal
を特徴づけた。ここでは, κ が strongly compact で, $\mathcal{U}$ が
fine であるという弱い条件で, 同じ結果を導く。以下, $\mathcal{U}$,
 κ , λ を固定し, η は常に cardinal とする。次の Solovay
の結果が重要である。([3])

$$\lambda^{<\kappa} = \lambda \quad \text{if } \text{cof}(\lambda) \geq \kappa,$$

$$\lambda^{<\kappa} = \lambda^+ \quad \text{if } \text{cof}(\lambda) < \kappa$$

notation は standard なものだが, [2] を参照されたい。

§1. On small cardinals

任意の $\eta < \kappa$ については, $j(\eta) = \eta$ である。 $\kappa \leq \eta \leq 2^{\lambda^{\kappa}}$ の
場合について考察する。

Lemma 1. $j(2^\lambda) \geq 2^{\lambda^{<\kappa}}$

(Proof) $\mathcal{P}(P_\kappa \lambda)$ を $F = \{f: P_\kappa \lambda \rightarrow P_\kappa(P\lambda)\} / \mathcal{U}$ に埋めこむことにより証明する。 $A \subset P_\kappa \lambda$ に対して, $f_A: P_\kappa \lambda \rightarrow P_\kappa(P\lambda)$ を, $f_A(\alpha) = \{y \in A \mid y \subset \alpha\}$ で定義する。 $g: A \mapsto [f_A]_{\mathcal{U}}$ が 1 対 1 であることを示せばよい。 $A, B \subset P_\kappa \lambda$, $A \neq B$ とする。 $\exists y \in A (y \not\subset B)$ としてよい。 $y \in P_\kappa \lambda$ で, $\mathcal{U}$ が fine であることから, $\{\alpha \in P_\kappa \lambda \mid y \subset \alpha\} \in \mathcal{U}$. $\therefore \{\alpha \in P_\kappa \lambda \mid y \in f_A(\alpha)\} \in \mathcal{U}$. しかし, $y \not\subset B$ だから $\forall \alpha \in P_\kappa \lambda (y \notin f_B(\alpha))$. $\therefore [f_A]_{\mathcal{U}} \neq [f_B]_{\mathcal{U}}$ したがって, g は $\mathcal{P}(P_\kappa \lambda)$ から F への 1 対 1 map である。

$$\therefore 2^{\lambda^{<\kappa}} = |\mathcal{P}(P_\kappa \lambda)| \leq |F| \leq |F|^M. \quad \text{----- (1)}$$

ここで, F は M での $\mathcal{P}_{j(\kappa)}(\mathcal{P}_{j(\lambda)})$ を表現することに注意する。

$M \models |F| = (2^{j(\lambda)})^{< j(\kappa)}$ $\wedge j(\kappa)$ is strongly compact. $\wedge \text{cf}(2^{j(\lambda)}) > j(\kappa)$. Solovay の定理により, $M \models (2^{j(\lambda)})^{< j(\kappa)} = 2^{j(\lambda)} = j(2^\lambda)$

$$\therefore |F|^M = j(2^\lambda) \quad \text{--- (2)}$$

$$(1), (2) \text{ により } 2^{\lambda^{<\kappa}} \leq j(2^\lambda) \quad \square$$

Theorem 1. If $\kappa \leq \eta \leq 2^{\lambda^{<\kappa}}$, then $j(\eta) > \eta$.

(Proof) $j(\kappa) > 2^\lambda$ であることは良く知られている。(Ref.

[3]) $2^{\lambda^{<\kappa}} = 2^\lambda$ or 2^{λ^+} . $2^{\lambda^{<\kappa}} = 2^\lambda$ の時は何ら問題はない。 $2^{\lambda^{<\kappa}} = 2^{\lambda^+} > 2^\lambda$ とする。 Lemma 1 により, $j(2^\lambda) \geq 2^{\lambda^{<\kappa}}$

If $2^\lambda \leq \eta \leq 2^{\lambda^{<\kappa}}$, $\eta \leq 2^{\lambda^{<\kappa}} \leq j(2^\lambda) < j(\eta)$. If $\kappa \leq \eta \leq 2^\lambda$.

$$\eta \leq 2^{\lambda} < j(\kappa) \leq j(\eta). \quad \square$$

§ 2. On larger cardinals.

$\eta > 2^{\lambda^{\leq \kappa}}$ の場合を考える。Theorem 2 は [1] による。[1] の証明で、 M が $\lambda^{\leq \kappa}$ -sequence について閉じているという性質を使っていないので、 κ が strongly compact でも定理が成立するのである。

Theorem 2. $\eta > 2^{\lambda^{\leq \kappa}}$ とする。 η が次の (1) ~ (4) のうちの 1 つを満足すれば、 $j(\eta) = \eta$ である。

$$(1) \quad \eta = (2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+$$

$$(2) \quad \eta = \gamma^{++} \quad \text{for some } \gamma$$

$$(3) \quad \eta \text{ が limit cardinal で, } cf(\eta) < \kappa \text{ or } cf(\eta) > \lambda^{\leq \kappa}.$$

$$(4) \quad \eta = \gamma^+ \quad \text{で } \gamma \text{ が (3) を満たす。}$$

(Proof) 紹介を兼ねて証明を与える。

$$(1) \quad j(2^{\lambda^{\leq \kappa}}) = \{ f \upharpoonright f : P_{\kappa} \lambda \rightarrow 2^{\lambda^{\leq \kappa}} \} / \bar{U} \quad (\bar{X} \text{ は } X \text{ の order type})$$

$$\therefore |j(2^{\lambda^{\leq \kappa}})| \leq (2^{\lambda^{\leq \kappa}})^{\lambda^{\leq \kappa}} = 2^{\lambda^{\leq \kappa}} \quad \therefore j(2^{\lambda^{\leq \kappa}}) < (2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+.$$

$$M \models (2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+ \text{ is a cardinal and } j((2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+) = j(2^{\lambda^{\leq \kappa}})^{++}$$

$$\therefore (2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+ \geq j((2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+) \quad \therefore j((2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+) = (2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+ \quad \square$$

$$(2) \quad \eta = \gamma^{++} \quad \gamma^+ \geq (2^{\lambda^{\leq \kappa}})^+ \text{ としてよい。}$$

$$2^{\lambda^{\leq \kappa}} < \gamma^+ \wedge \gamma^+ > \kappa \wedge cf(\gamma^+) > \lambda^{\leq \kappa} \longrightarrow (\gamma^+)^{\lambda^{\leq \kappa}} = \gamma^+$$

(Ref. [3]) が成り立つ。

4

$$\therefore |j(\gamma^+)| \leq (\gamma^+)^{\lambda^{<\kappa}} = \gamma^+$$

$$\therefore j(\gamma^+) < \gamma^{++} = \eta$$

$$M \models j(\eta) = j(\gamma^+)^+ \wedge j(\gamma^+) < \eta \leq j(\eta) \wedge \eta \text{ is a cardinal}$$

$$\therefore j(\eta) = \eta \quad \square$$

(3) (i) $cf(\eta) < \kappa$ の場合.

$$cf(\eta) = \gamma < \kappa \text{ とする. } \exists f: \gamma \longrightarrow \eta \text{ s.t. } \bigcup_{\alpha < \gamma} f(\alpha) = \eta,$$

$$\wedge \forall \alpha < \gamma \exists \delta > 2^{\lambda^{<\kappa}} (f(\alpha) = \delta^{++}).$$

$$j(\eta) = \bigcup_{\alpha < j(\gamma)} j(f)(\alpha), \quad \gamma < \kappa \text{ だから, } j(\gamma) = \gamma,$$

$$\forall \alpha < \gamma (j(\alpha) = \alpha).$$

$$\therefore j(f)(\alpha) = j(f)(j(\alpha)) = j(f(\alpha)) = j(\delta^{++}) = \delta^{++} = f(\alpha)$$

$$\therefore j(\eta) = \bigcup_{\alpha < \gamma} f(\alpha) = \eta.$$

(ii) $cf(\eta) > \lambda^{<\kappa}$ の時.

$j(\eta) > \eta$ と仮定して矛盾を導く. $[f]_{\mathcal{C}} = \eta$ とする. $\eta < j(\eta)$ より

$\forall x \in P_{\kappa}\lambda (f(x) < \eta)$ としてよい. $cf(\eta) > \lambda^{<\kappa} = |P_{\kappa}\lambda|$ だから,

$\bigcup_{x \in P_{\kappa}\lambda} f(x) < \eta$. η は limit cardinal だから, $\exists \delta < \eta$ s.t.

$\eta > \delta^{++} > \bigcup_{x \in P_{\kappa}\lambda} f(x)$. $\forall x \in P_{\kappa}\lambda (f(x) < \delta^{++})$ であり、(2)を用い

れば, $[f]_{\mathcal{C}} < j(\delta^{++}) = \delta^{++} < \eta$. これは $[f]_{\mathcal{C}} = \eta$ に矛盾する. $\square$

(4) $\eta = \gamma^+$ とする. $j(\gamma) = \gamma$

$$M \models j(\eta) = j(\gamma)^+ \wedge j(\gamma) = \gamma < \eta \leq j(\eta) \wedge \eta \text{ is a cardinal.}$$

$$\therefore j(\eta) = \eta. \quad \square$$

残されたのは、次の2つの場合である。

(1) η は limit cardinal で, $\eta > 2^{\lambda^<\kappa}$, $\kappa \leq cf(\eta) \leq \lambda^<\kappa$

(2) $\eta = \gamma^+$ で, γ が (1) の条件を満たすとき。

これらについて, ultrapower における, 俱体的な function を与えて, 考えていく。

Theorem 3. η が limit cardinal で, $2^{\lambda^<\kappa}$ より大きく, $\kappa \leq cf(\eta) \leq \lambda^<\kappa$ とすれば, $j(\eta) > \eta$ である。

Lemma 2. η は定理の仮定を満たし, 特に $\kappa \leq cf(\eta) \leq \lambda$ とする。この時 $j(\eta) > \eta$ である。

(Proof) $j(\eta) = \eta$ と仮定する。 $\gamma = cf(\eta)$ とし, $f: \gamma \rightarrow \eta$ を cofinal function で $\forall \delta < \gamma \exists \delta' (2^{\lambda^<\kappa} < f(\delta) = \delta'^{++})$ が成立するとする。各 $\delta < \gamma$ に対し $\langle \delta_\alpha \mid \alpha \in P_\kappa \lambda \rangle_\eta = \delta$ で, $\forall \alpha \in P_\kappa \lambda (\delta_\alpha < \kappa)$ を満たすものが存在することから, $\delta \leq \lambda < j(\kappa)$ により保証される。 $k: P_\kappa \lambda \rightarrow V$ を次のように定義する。

$$k(\alpha) = \{ \langle \delta_\alpha, \bigcup_{\substack{\zeta \in \alpha \\ \zeta < \gamma}} f(\zeta) \rangle \mid \delta \in \alpha \wedge \delta < \gamma \}. \quad \text{定義より}$$

$k(\alpha)$ は function で $|\text{dom } k(\alpha)| \leq |\alpha| < \kappa$

$\therefore M \models [k]$ is a function $\wedge |\text{dom } [k]| < j(\kappa)$ ----- (1)

$$|\alpha| < \kappa \wedge \forall \zeta < \gamma (f(\zeta) < \eta) \wedge \kappa \leq cf(\eta) \longrightarrow \bigcup_{\substack{\zeta \in \alpha \\ \zeta < \gamma}} f(\zeta) < \eta$$

$$\therefore \text{ran } k(\alpha) < \eta.$$

$$\therefore M \models \text{ran } [k] < j(\eta) = \eta \quad \text{----- (2)}$$

f は cofinal だから, $\forall \alpha < \eta \exists \delta < \gamma (\alpha < f(\delta)).$

$\mathcal{U}$ は fine だから, $\{x \in P_\kappa \lambda \mid \delta \in x\} \in \mathcal{U}.$ したがって,

$\{x \in P_\kappa \lambda \mid \delta_\alpha \in \text{dom } k(\alpha)\} \in \mathcal{U}.$ $\therefore \delta \in \text{dom } [k].$ $\therefore$

$$k(\alpha)(\delta_\alpha) \geq f(\delta) \text{ だから } [k](\delta) \geq j(f(\delta)) = f(\delta) > \alpha$$

$$\therefore M \models \forall \alpha < \eta \exists \delta < \gamma (\alpha < [k](\delta)) \quad \text{----- (3)}$$

(1) ~ (3) より

$$M \models \text{cf}(\eta) < j(\kappa) \quad \text{----- (4)}$$

しかし, $\forall \kappa \text{ cf}(\eta) \geq \kappa$ だから, $M \models \text{cf}(\eta) = \text{cf}(j(\eta)) \geq j(\kappa).$

これは (4) と矛盾する. $\therefore j(\eta) > \eta \quad \square$

定義. κ -complete ultrafilter on $P_\kappa \lambda$, $\mathcal{W}$ が
uniform $\iff \forall A \in \mathcal{W} (|A| = |P_\kappa \lambda|).$

Remark $\mathcal{W} = \text{fine} \longrightarrow \mathcal{W} = \text{uniform}$

(Proof) $\mathcal{W}$ is fine ultrafilter on $P_\kappa \lambda \subseteq \mathcal{U}$, $A \in \mathcal{W}$

とする. 各 $y \in A$ に対し, $A_y = \{x \in P_\kappa \lambda \mid x \subset y\}$ とする.

$\mathcal{W}$ は fine だから, $P_\kappa \lambda = \bigcup_{y \in A} A_y.$ $|A_y| \leq 2^{|y|} < \kappa.$

$$\therefore |A| = |P_\kappa \lambda| = \lambda^{<\kappa}. \quad \square$$

次の Lemma は, $\mathcal{U}$ が uniform であれば成立する。

Lemma 3 η は定理の仮定を満たし、特に $\text{cf}(\eta) = \lambda^+$, $\text{cf}(\lambda) < \kappa$ とする。この時 $j(\eta) > \eta$ 。

(Proof) $\text{cf}(\lambda) < \kappa$ より $|P_\kappa \lambda| = \lambda^{<\kappa} = \lambda^+$ に注意する。

$\{\alpha_\xi \mid \xi < \lambda^+\}$ を $P_\kappa \lambda$ の enumeration とし, $f: \lambda^+ \rightarrow \eta$ を $\forall \delta < \lambda^+ \exists \delta' (2^{\lambda^{<\kappa}} = f(\delta) = \delta'^{++})$ を満たす cofinal map とする。
 $j(\eta) = \eta$ と仮定して矛盾を導く。

$k: P_\kappa \lambda \rightarrow V$ を次のように定める。

$$k(\alpha_\xi) = \{\langle \delta, f(\delta) \rangle \mid \delta < \xi\}$$

$$|\text{dom } k(\alpha_\xi)| = |\xi| \leq \lambda \wedge \text{ran } k(\alpha_\xi) \subset \text{ran } f \subset \eta.$$

$$\therefore M \models [k] \text{ is a function } \wedge |\text{dom}[k]| \leq j(\lambda)$$

$$\wedge \text{ran}[k] \subset \eta = j(\eta) \quad \text{----- (1)}$$

$$|\{\alpha_\xi \mid \delta < \xi\}^c| = |\{\alpha_\xi \mid \xi \leq \delta\}| = |\delta+1| \leq \lambda \quad \text{for every } \delta < \lambda^+.$$

$\mathcal{U}$ は uniform で, $\lambda^{<\kappa} = \lambda^+$ だから, $\{\alpha_\xi \mid \delta < \xi\} \in \mathcal{U}$. したがって, $\{x \in P_\kappa \lambda \mid f(\delta) \in \text{ran } k(x)\} \in \mathcal{U}$. $\therefore j(f(\delta)) = f(\delta)$ は $\text{ran}[k]$ に含まれる。

$$\therefore M \models \text{ran } f \subset \text{ran}[k] \quad \text{----- (2)}$$

(1) と (2) により

$$M \models [k] \text{ is cofinal in } \eta \wedge |\text{dom}[k]| \leq j(\lambda)$$

$$\therefore M \models \text{cof}(\eta) \leq j(\lambda) \quad \text{----- (3)}$$

しかし, $V \models \text{cof}(\eta) = \lambda^+$ より $M \models \text{cof}(\eta) = \text{cof}(j(\eta)) = j(\lambda^+)$.
これは (3) と矛盾する. $\therefore j(\eta) > \eta$. $\square$

(Proof of the Theorem)

(i) $\text{cof}(\lambda) \geq \kappa$ の時. $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ だから Lemma 2 により, $j(\eta) > \eta$.

(ii) $\text{cof}(\lambda) < \kappa$ の時. $\lambda^{<\kappa} = \lambda^+$ だから, $\kappa \leq \text{cof}(\eta) \leq \lambda$ なる Lemma 2 に, $\text{cof}(\eta) = \lambda^+$ なる Lemma 3 によって, $j(\eta) > \eta$ となる. $\square$

似たような議論を重ねて, 次の定理が得られる.

Theorem 4 η は limit cardinal で, $2^{\lambda^{<\kappa}}$ より大きく,
 $\kappa \leq \text{cof}(\eta) \leq \lambda^{<\kappa}$ なるは, $j(\eta^+) > \eta^+$.

Lemma 4. η は定理の仮定を満たし, 特に
 $\kappa \leq \text{cof}(\eta) \leq \lambda$ とする. この時, $j(\eta^+) > \eta^+$.

(Proof) $j(\eta^+) = \eta^+$ と仮定して矛盾を出す. Theorem 3 により, $j(\eta) > \eta$. $j(\eta) < j(\eta^+) = \eta^+$ だから, $|j(\eta)| = \eta$.
そこで, g を η から $j(\eta)$ の上への map とする. $\text{cof}(\eta) = \delta$
とし, $\{\alpha_\delta \mid \delta < \delta^*\}$ を cofinal sequence in η とする.

また, $\beta < \eta$ に対し, $\delta_\beta = \text{the least } \delta \text{ s.t. } \alpha_\delta > \beta$ とする。

このとき, $f: P_\kappa \lambda \longrightarrow V$ を 次のように定義する。

$$f(\alpha) = \{ \langle \beta, g(\beta)_\alpha \rangle \mid \delta_\beta \in \alpha \} \quad \text{ただし, } [\langle g(\beta)_\alpha \mid \alpha \in P_\kappa \lambda \rangle] = g(\beta).$$

明らかに, $M \models [f] \text{ is a function.} \text{----- (1)}$

$$\forall \alpha \in P_\kappa \lambda \quad (\text{dom } f(\alpha) = \bigcup_{\delta \in \alpha} \{ \beta < \eta \mid \delta_\beta = \delta \}). \quad |\alpha| < \kappa \leq \text{cof}(\eta) \text{ なら,}$$

$$\{ \beta < \eta \mid \delta_\beta = \delta \} \subset \alpha_\delta < \eta \text{ であるから, } |\text{dom } f(\alpha)| < \eta.$$

$$\therefore M \models |\text{dom } [f]| < j(\eta) \text{ ----- (2)}$$

$$\forall \xi < j(\eta) \exists \beta < \eta (\xi = g(\beta)). \quad U \text{ は fine } \tau, \quad \delta_\beta < \gamma \leq \lambda \text{ だから}$$

$$\forall \beta < \eta (\{ \alpha \in P_\kappa \lambda \mid \delta_\beta \in \alpha \} \in U). \quad \therefore \forall \beta < \eta (\{ \alpha \in P_\kappa \lambda \mid g(\beta)_\alpha \in \text{ran } f(\alpha) \} \in U, \text{ i.e. } g(\beta) \in \text{ran } [f])$$

$$\therefore M \models j(\eta) \subset \text{ran } [f] \text{ ----- (3)}$$

(1) ~ (3) により, $M \models j(\eta)$ is not a cardinal. これは

明らかに矛盾である。 $\therefore j(\eta^+) > \eta^+.$ $\square$

Lemma 5 η は定理の仮定を満たし, 特に $\text{cof}(\eta) = \lambda^+$, $\text{cof}(\lambda) < \kappa$ とすれば, $j(\eta^+) > \eta^+$ である。

(Proof) $j(\eta^+) = \eta^+$ と仮定する。前の Lemma と同じく,

g を η から $j(\eta)$ への onto map とする。 $\{ \alpha_\xi \mid \xi < \lambda^+ \}$ を $P_\kappa \lambda$ の enumeration とし, $\{ \alpha_\delta \mid \delta < \lambda^+ \}$ を cofinal sequence in η とする。 ($\text{cof}(\lambda) < \kappa$ だから $|P_\kappa \lambda| = \lambda^{<\kappa} = \lambda^+$ である。)

各 $\beta < \eta$ に対し, $\delta_\beta = \text{the least } \delta \text{ s.t. } \alpha_\delta > \beta$ とする。

$f: P_\kappa \lambda \longrightarrow V$ を次のように定義する。

$$f(\alpha_\xi) = \{ \langle \beta, g(\beta)_\lambda \rangle \mid \delta_\beta < \xi \}.$$

明らかに, $M \models [f]$ is a function. ----- (1)

$$\forall \alpha_\xi \in P_\kappa \lambda \ (\text{dom } f(\alpha_\xi) = \bigcup_{\delta < \xi} \{ \beta < \eta \mid \delta_\beta = \delta \}). \quad \text{cof}(\eta) = \lambda^+ > |\xi|$$

で, $\{ \beta < \eta \mid \delta_\beta = \delta \} < \alpha_\delta < \eta$ だから, $|\text{dom } f(\alpha_\xi)| < \eta$.

$$\therefore M \models |\text{dom}[f]| < j(\eta) \quad \text{----- (2)}$$

$\mathcal{U}$ は uniform だから, $\{ \alpha_\xi \in P_\kappa \lambda \mid \delta_\beta < \xi \} \in \mathcal{U}$ for every $\beta < \eta$.

$$\therefore \{ \alpha \in P_\kappa \lambda \mid g(\beta)_\alpha \in \text{ran } f(\alpha) \} \in \mathcal{U} \quad \text{i.e.} \quad g(\beta) \in \text{ran}[f].$$

$$\therefore M \models j(\eta) \subset \text{ran}[f] \quad \text{----- (3)}$$

(1) ~ (3) により,

$$M \models j(\eta) \text{ is not a cardinal.}$$

これは明らかに矛盾だから, $j(\eta^+) > \eta^+$ である. $\square$

Theorem 4 の証明は Lemma 4.5 により明らかである。以上で、 j の fixed points の特徴づけは全て終わった。

[Problem] $\mathcal{U}$ が uniform の時は、同じことが言えるだろうか。

((References))

[1] J. B. Barbanel Supercompact cardinals, elementary embeddings and fixed points

Journal of Symbolic Logic. (1982)

- [2] R. Solovay, W. Reinhardt, A. Kanamori,
Strong Axioms of infinity and elementary embe-
ddings, Ann. of. Math. Logic. (1978)
- [3] R. Solovay, Strongly compact cardinals and
the G.C.H., Tarski Symposium. (1971)