

On the condition of Abrahamse for the extended interpolation

奈良女子大学 理学部 高橋 世知子 (Sechiko Takahashi)

はじめに 複素平面上の互いに交わらない $m+1$ 個の解析的単純閉曲線 $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ で囲まれた領域を D とする。領域 D 内に k 個の相異なる点 $z_1, z_2, \dots, z_k$ と各点 z_i ($i = 1, \dots, k$) に対して、 n_i 個の複素数 c_{is} ($s = 0, \dots, n_i - 1$) を与え、点 z_i での Taylor 展開の最初の n_i 個の係数が c_{is} となるような D で正則かつ $|f| \leq 1$ となる函数 f が存在する為の必要十分条件を求める問題について考える。この問題を拡張された補間問題— extended interpolation problem —と呼んでいる。

多重連結領域に対する Pick の補間問題 ($n_i = 1$ の場合) については、Abrahamse が 1979 年に 解の存在定理を与えているが (Abrahamse [1])、その手法をそのまま拡張された場合にも適用することが出来る (Takahashi [17])。 $n = n_1 + \dots + n_k$ とするとき、解の存在は、周期を持った核函数と与えられたデータ $\{z_i\}, \{c_{is}\}$ に依存する沢山の $n \times n$ Hermite 行列 A_α ($\alpha \in \Lambda$) の半正定値性で与えられるが、この判定行列 A_α の数をどの位迄少なくできるかが、Abrahamse 以来の問題になっている。この間へのアプローチの最初の段階として、 $n = 2$ の場合について考察する。

1. まず、 $m+1$ 重連結領域 D に於ける拡張された補間問題の解の存在定理について述べる。固定された点 $z^* \in D$ に対する $\partial D = \bigcup_{i=0}^m \gamma_i$ 上の調和測度を $d\omega$ とする。これは ∂D 上に実数値連続函数 u を与えたときの Dirichlet 問題の解 $\tilde{u}$ (D での調和函数) の z^* での値を表示する測度である。即ち $\tilde{u}(z^*) = \int_{\partial D} u d\omega$ 。

$T^m := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : |\alpha_i| = 1 (i = 1, \dots, m)\}$ を m 次元 torus とする。 D に γ_i 上から出発して γ_0 上に終点を持つ互いに交わらない m 個の analytic cuts δ_i ($i = 1, \dots, m$) を入れ、 $D_0 = D \setminus (\bigcup_{i=1}^m \delta_i)$ が単連結になるようにする。 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in T^m$ に対して、 D で定義された複素数値函数 f で、 D_0 で正則、任意の $t \in \delta_i \cap D$ に対して、 δ_i の右から $z \rightarrow t$ のとき $f(z) \rightarrow \alpha_i f(t)$ 、 δ_i の左から $z \rightarrow t$ のとき $f(z) \rightarrow f(t)$ となる函数 f の全体を $H_\alpha(D)$ とし、

$$H_\alpha^2 := \{f : f \in H_\alpha(D), |f|^2 \text{ が } D \text{ で調和な優函数を持つ}\}$$

$$H_\alpha^\infty := \{f : f \in H_\alpha(D), |f| \text{ は } D \text{ で有界}\}$$

とする。 $\alpha = (1, \dots, 1)$ に対しては、 H_α^2 はいわゆる Hardy 空間 H^2 であり、 H^2 の場合と殆ど同様のことが、 H_α^2 でも成り立っている (Rudin [12], Widom [19])。

任意の $f \in H_\alpha^2$ は non-tangential limits $f^*(t)$ (a.e. $t \in \partial D$) を持ち、 $f^* \in L^2 = L^2(\partial D, d\omega)$ である。 f と f^* を同一視することにより、 H_α^2 は内積

$$\langle f, g \rangle = \int_{\partial D} f^* \overline{g^*} d\omega \quad (f, g \in H_\alpha^2).$$

を持つ Hilbert 空間となる。各点 $p \in D$ に対し、写像 $f \mapsto f(p)$ は H_α^2 上の有界線形汎関数となり、Riesz の表現定理により H_α^2 の核函数 $k_\alpha(z, \zeta)$ が存在する。 $k_\alpha(z, \zeta)$ は $(z, \bar{\zeta})$ に関して $D_0 \times D_0$ で正則であり、次の性質を持っている。

$$k_\alpha(\cdot, \zeta) \in H_\alpha^2 \quad (\zeta \in D), \quad f(\zeta) = \langle f, k_\alpha(\cdot, \zeta) \rangle \quad (\forall f \in H_\alpha^2, \zeta \in D),$$

$$k_\alpha(z, \zeta) = \langle k_\alpha(\cdot, \zeta), k_\alpha(\cdot, z) \rangle = \overline{k_\alpha(\zeta, z)} \quad ((z, \zeta) \in D \times D).$$

以上の準備のもとで、解の存在定理は次の様に表される。

$z_1, z_2, \dots, z_k$ を領域 D 内の k 個の相異なる点とし、各点 z_i に n_i 個の複素数 $c_{i0}, \dots, c_{in_i-1}$ が与えられているとし、次の条件 (*) を考える。

$$(*) \quad f(z) = \sum_{s=0}^{n_i-1} c_{is}(z - z_i)^s + O((z - z_i)^{n_i}) \quad (i = 1, \dots, k).$$

各 $\alpha \in T^m$ に対して、上で定義した $k_\alpha(z, \zeta)$ の点 (z_i, z_j) に於ける展開

$$k_\alpha(z, \zeta) = \sum_{s, t=0}^{\infty} a_{st}^{(\alpha)} (z - z_i)^s \overline{(\zeta - z_j)^t}$$

の係数 a_{st} ($0 \leq s \leq n_i - 1, 0 \leq t \leq n_j - 1$) 及び c_{is} ($0 \leq s \leq n_i - 1$) を用いて次の行列を定義する。

$$\Gamma_{ij}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \cdots & a_{st}^{(\alpha)} & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} c_{i0} & & & \\ c_{i1} & c_{i0} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_{in_i-1} & \cdots & c_{i1} & c_{i0} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_\alpha = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{(\alpha)} & \cdots & \Gamma_{1k}^{(\alpha)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{k1}^{(\alpha)} & \cdots & \Gamma_{kk}^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{bmatrix},$$

$$A_\alpha = \Gamma_\alpha - C \cdot \Gamma_\alpha \cdot C^* \quad (C^* = {}^t \overline{C}).$$

定理 1 (a) 条件 (*) を満たす D で正則、かつ $|f| \leq 1$ である函数 f が存在する為の必要十分条件は、任意の $\alpha \in T^m$ に対して $A_\alpha \geq 0$ となることである。

(b) 解が一意的である為の必要十分条件は、ある $\alpha \in T^m$ に対して $\det A_\alpha = 0$ となることである (Abrahamse [1], Takahashi [17])。

上の定理は特別な場合として、 $m=0$ の場合 即ち D が単位円の場合を含んでいる。このときは 1 つの核函数 $k(z, \zeta)$ のみであり、 $z^* = 0$ とした調和測度に対して、 $k(z, \zeta) = 1/(1 - z\bar{\zeta})$ である。

2. Abrahamse は論文 [1] の終わりに次の様な例とコメントを与えている。

$\alpha = (1, \dots, 1)$ に対する核函数 $k_\alpha(z, \zeta)$ を $k(z, \zeta)$ と表す。即ちこれは Szegő の核函数であり、 $k(z_1, z_2) = 0$ となる点 $z_1, z_2 \in D$ が存在する (Bergman [3])。この様な点 z_1, z_2 と値 w_1, w_2 を与え補間問題を考えると、対応する判定行列は

$$\begin{bmatrix} (1 - |w_1|^2) k(z_1, z_1) & 0 \\ 0 & (1 - |w_2|^2) k(z_2, z_2) \end{bmatrix}$$

となる。 $k(z_1, z_1) > 0, k(z_2, z_2) > 0$ より、 $|w_1| \leq 1, |w_2| \leq 1$ のとき、かつそのときに限りこの行列は非負である。明らかにこの条件は、 $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2, |f| \leq 1$ を満たす D での正則函数 f が存在する為の必要十分条件にはなり得ない (例えば、 $w_1 = 0, w_2 = 1$ のとき)。この例は、単位円の場合のときの様に Szegő 核のみを考えるのでは不十分であることを示している。

それでは、どの様な部分集合 $\Lambda_0 \subset \Lambda = T^m$ に対して、定理 1 を成り立たせることが可能なのか? —The author conjectures that density of Λ_0 in Λ is needed; if Λ_0 omits a non-empty open subset of Λ , then theorem fails.—と。

$n = 2$ の場合は、この conjecture に反して、 Λ_0 を唯一点から成る集合とすることができる。以下そのことについて述べる。

3. D 上の有界な多価正則函数についての最大値の原理を準備する。

$$B := \{f : D \text{ で正則かつ } |f| \leq 1\}, \quad B_\alpha := \{f : f \in H_\alpha^\infty, |f| \leq 1\} \quad (\alpha \in T^m)$$

とおく。 $p \in D$ を極に持つ D の Green 函数を $g(z; p)$ とし、調和函数 h に対して、その共役調和函数を $*h$ で表すことにする。

$z_1, \dots, z_r$ を領域 D の点列とすると、函数

$$B(z) = \exp \left[- \sum_{i=1}^r g(z; z_i) - i^* \left(\sum_{i=1}^r g(z; z_i) \right) \right]$$

を D での $\{z_1, \dots, z_r\}$ に関する r 次の Blaschke product という。 B は $\{z_i\}_{i=1}^r$ を丁度その零点に持つ $|B|$ が一価な多価函数であるが、 D_0 での一価な分枝を考えるとそれ等はある B_α ($\alpha \in T^m$) に属している。 B の周期は α であるといい、今後 B を B_α の要素とみなし、適当に一価な分枝をとったものとする。 $|\lambda| = 1$ となる $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 λB も又 Blaschke product と呼ぶことにする。

点 $p \in D$ 及び $\alpha \in T^m$ に対し

$$m(p, \alpha) := \sup\{|f(p)| : f \in B_\alpha\}$$

と定義する。 $\alpha_0 = (1, \dots, 1)$ とすると、任意の $p \in D$ に対して、 $m(p, \alpha_0) = 1$ であり、任意の $p \in D$ と $\alpha \in T^m$ に対して $0 \leq m(p, \alpha) \leq 1$ である。

定理 2 任意の $p \in D$ 及び $\alpha \in T^m$ に対して、 B_α^2 のなかに $F(p) = m(p, \alpha)$ を満たす函数 F が唯一つ存在し、それは高々 m 次の Blaschke product である。従って、その零点を $z_1, \dots, z_r$ ($r \leq m$) とすると、

$$m(p, \alpha) = \exp \left[- \sum_{i=1}^r g(z_i; p) \right]$$

と表される (Widom [19], [20], cf. Fisher [4])。

4. 点 $z_0 \in D$ のみを零点とする Blaschke product を $B(\cdot, z_0)$ とし、 $B(\cdot, z_0)$ の周期を $\alpha(z_0)$ と表すことにする。 $f \in \mathcal{B}$ に対して、 $(f - f(z_0))/(1 - \overline{f(z_0)}f) \in \mathcal{B}$ であり、ある $g \in B_{\alpha(z_0)^{-1}}$ が存在して

$$\frac{f - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f} = B(\cdot, z_0) g$$

と表される。前節 3 の定義より、 $|g(z)| \leq m(z, \alpha(z_0)^{-1})$ ($\forall z \in D$) であるから、

$$(1) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \exp[-g(z; z_0)] m(z, \alpha(z_0)^{-1}) \quad (z, z_0 \in D)$$

が成り立つ。これは、 D が単位円の場合は Schwarz-Pick の補題の不等式

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|$$

に相当している。

D 内の 2 点 z_1, z_2 をとる。 $f \in \mathcal{B}$ に対して、(1) より

$$(2) \quad \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)} \right| \leq \exp[-g(z_1; z_2)] m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}),$$

z_1 と z_2 を入れ換えて、

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \exp[-g(z_2; z_1)] m(z_2, \alpha(z_1)^{-1})$$

が成り立つ。 $m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}) = m(z_1, \alpha(z_2)^{-1})$ を示す。 $z_1 = z_2$ のときは明らかであるから、 $z_1 \neq z_2$ とし、次の極値関数を定義する。

$$F_1 := B(\cdot, z_1) B_1, \quad \text{ここで } B_1 \in \mathcal{B}_{\alpha(z_1)^{-1}} \quad \text{s.t.} \quad B_1(z_2) = m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}).$$

定理 2 より B_1 は高々 m 次の Blaschke product であるが、 $F_1 \in \mathcal{B}$ であることより、丁度 m 次の Blaschke product でなければならず、 F_1 は $m+1$ 次の Blaschke product であることがわかる。

$$F_1(z_1) = 0, \quad F_1(z_2) = B(z_2, z_1) m(z_2, \alpha(z_1)^{-1})$$

となり、(2) の式に当てはめると、 $z_1 \neq z_2$ であるから、

$$m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}) \leq m(z_1, \alpha(z_2)^{-1})$$

がいえる。同様にして、

$$F_2 := B(\cdot, z_2) B_2, \quad \text{ここで } B_2 \in \mathcal{B}_{\alpha(z_2)^{-1}}, \quad \text{s.t.} \quad B_2(z_1) = m(z_1, \alpha(z_2)^{-1})$$

$$F_2(z_2) = 0, \quad F_2(z_1) = B(z_1, z_2) m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}),$$

$$m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}) \leq m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}),$$

従って $m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}) = m(z_2, \alpha(z_1)^{-1})$ が成り立つ。 $\{z_1, z_2\}$ によって決まる数として、これを $M(z_1, z_2)$ と表すことにする。極値関数について次のことがいえる。

$z_1 \neq z_2$ となる D 内の 2 点 z_1, z_2 に対して、 $F(z_1) = 0$ となる 関数 $F \in \mathcal{B}$ のうち $|F(z_2)|$ を最大にするものは回転を除いて唯一つ決まる。それは $m+1$ 次の Blaschke product であり、その最大値は $\exp[-g(z_1; z_2)] M(z_1, z_2)$ である。

5. $n = 2$ の場合の拡張された補間問題について考える。i) $k = 2$, $n_1 = n_2 = 1$ と
ii) $k = 1$, $n_1 = 2$ の2つの場合が考えられる。

i) の場合。領域 D 内の相異なる2点 z_1, z_2 と値 $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ を与える。定理1より

$$(3) \quad f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2$$

となる $f \in B$ が存在する為の必要十分条件は

$$(4) \quad A_\alpha = \begin{bmatrix} (1 - |w_1|^2)k_\alpha(z_1, z_1) & (1 - w_1\overline{w_2})k_\alpha(z_1, z_2) \\ (1 - w_2\overline{w_1})k_\alpha(z_2, z_1) & (1 - |w_2|^2)k_\alpha(z_2, z_2) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \alpha \in T^m)$$

となることである。

いま、 $w_1 = 0$, $w_2 = B(z_2, z_1)M(z_1, z_2)$ とする。このときは前節4でみたように、 F_1 が唯一つの解となる。従って、ここで

$$\exp[-g(z_1, z_2)]M(z_1, z_2) = C(z_1, z_2)$$

とおくと、 A_α の行列式 $|A_\alpha|$ について、任意の $\alpha \in T^m$ に対して、

$$(5) \quad \begin{vmatrix} k_\alpha(z_1, z_1) & k_\alpha(z_1, z_2) \\ k_\alpha(z_2, z_1) & (1 - C(z_1, z_2)^2)k_\alpha(z_2, z_2) \end{vmatrix} \geq 0,$$

ある $\alpha_0 \in T^m$ に対して、

$$(6) \quad \begin{vmatrix} k_{\alpha_0}(z_1, z_1) & k_{\alpha_0}(z_1, z_2) \\ k_{\alpha_0}(z_2, z_1) & (1 - C(z_1, z_2)^2)k_{\alpha_0}(z_2, z_2) \end{vmatrix} = 0$$

が成り立っている。 $k_\alpha(z_1, z_1) > 0$, $k_\alpha(z_2, z_2) > 0$ であるから、

$$K_\alpha(z_1, z_2) = \frac{k_\alpha(z_1, z_1)k_\alpha(z_2, z_2) - k_\alpha(z_1, z_2)k_\alpha(z_2, z_1)}{k_\alpha(z_1, z_1)k_\alpha(z_2, z_2)}$$

とおき、(5),(6) を計算すると、

$$(7) \quad C(z_1, z_2)^2 = K_{\alpha_0}(z_1, z_2) \leq K_\alpha(z_1, z_2) \quad (\forall \alpha \in T^m)$$

が成り立つ。

最初の補間問題 (3) に戻って、(4) より

$$|A_\alpha| = (1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)k_\alpha(z_1, z_1)k_\alpha(z_2, z_2) - |1 - w_1\overline{w_2}|^2k_\alpha(z_1, z_2)k_\alpha(z_2, z_1).$$

(7) より、 $|A_{\alpha_0}| \geq 0$ ならば $|A_\alpha| \geq 0$ ($\forall \alpha \in T^m$) がいえる。また、 $A_{\alpha_0} \geq 0$ とすると、 $(1 - |w_1|^2)k_{\alpha_0}(z_1, z_1) \geq 0$, $(1 - |w_2|^2)k_{\alpha_0}(z_2, z_2) \geq 0$, 従って $|w_1| \leq 1$, $|w_2| \leq 1$ であるので、

$$A_{\alpha_0} \geq 0 \implies A_\alpha \geq 0 \quad (\forall \alpha \in T^m)$$

が成り立ち、次の定理を得る。

定理 3 領域 D 内の相異なる 2 点 z_1, z_2 に対して、ある $\alpha_0 \in T^m$ が存在し次が成り立つ。 $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ に対して、

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2$$

となる $f \in \mathcal{B}$ が存在する為の必要十分条件は

$$A_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} (1 - |w_1|^2)k_{\alpha_0}(z_1, z_1) & (1 - w_1\overline{w_2})k_{\alpha_0}(z_1, z_2) \\ (1 - w_2\overline{w_1})k_{\alpha_0}(z_2, z_1) & (1 - |w_2|^2)k_{\alpha_0}(z_2, z_2) \end{bmatrix} \geq 0$$

となることである。

上の定理 3 より次のことがわかる。(4) に於いて w_2 を変数と見なし、 $|A_\alpha| \geq 0$ を計算すると、

$$\Gamma_\alpha = \{w_2 : |A_\alpha| \geq 0\}$$

は単位円内の非退化な閉円となり、 $\Gamma_{\alpha_0} \subset \Gamma_\alpha$ ($\forall \alpha \in T^m$) であり、

$$\Gamma_{\alpha_0} = \{f(z_2) : f(z_1) = w_1, f \in \mathcal{B}\}.$$

ii) の場合。 1 点 $z_1 \in D$ と 2 つの複素数 $\{c_0, c_1\}$ を与える。定理 1 より、点 z_1 で

$$(8) \quad f(z) = c_0 + c_1(z - z_1) + \dots$$

と表される $f \in \mathcal{B}$ の存在する為の必要十分条件は、 $k_\alpha(z, \zeta)$ の (z_1, z_1) での展開を

$$k_\alpha(z, \zeta) = \sum_{s, t=0}^{\infty} a_{st}^{(\alpha)} (z - z_1)^s \overline{(\zeta - z_1)^t}$$

とするとき、

$$(9) \quad A_\alpha = \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha)} & a_{01}^{(\alpha)} \\ a_{10}^{(\alpha)} & a_{11}^{(\alpha)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_0 & \\ c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha)} & a_{01}^{(\alpha)} \\ a_{10}^{(\alpha)} & a_{11}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c_0} & \overline{c_1} \\ & \overline{c_0} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \alpha \in T^m)$$

となることである。

i) の場合と比べて、計算が少し複雑になるので、 $c_0 = 0$ の場合について考える。函数の Möbius 変換 によって判定行列の rank 及び半正定値性は不変であるから、このことは一般性を失わない。簡略に述べると次の様なことである。

f の Möbius 変換 を

$$g = \frac{f - c_0}{1 - \overline{c_0}f}$$

とおくと、 f の係数 $\{c_0, c_1\}$ に対して g には別の係数 $\{0, c'_1\}$ が対応している。 $\{0, c'_1\}$ に対する判定行列を A'_α とするとき、上の Möbius 変換 によって決まるある正則行列 N が存在し、

$$A'_\alpha = N \cdot A_\alpha \cdot N^*$$

と表される (Takahashi [15],[17])。

$c_0 = 0$ として、(9) を計算すると、

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha)} & a_{01}^{(\alpha)} \\ a_{10}^{(\alpha)} & -|c_1|^2 a_{00}^{(\alpha)} + a_{11}^{(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

次の極値函数を定義する。

$$F := B(\cdot, z_1) \tilde{B}, \quad \text{ここで} \quad \tilde{B} \in \mathcal{B}_{\alpha(z_1)^{-1}} \text{ s.t. } \tilde{B}(z_1) = m(z_1, \alpha(z_1)^{-1}) = M(z_1, z_1).$$

$F(z_1) = 0$, $F'(z_1) = B'(z_1, z_1) M(z_1, z_1)$ となり、 F はいわゆる Ahlfors 函数である。

$c_0 = 0, c_1 = B'(z_1, z_1) M(z_1, z_1)$ としたとき、 F はその一意的な解であるから、

$$|B'(z_1, z_1)| M(z_1, z_1) = \tilde{C}(z_1, z_1),$$

$$\tilde{K}_\alpha(z_1, z_1) = \frac{a_{00}^{(\alpha)} a_{11}^{(\alpha)} - a_{01}^{(\alpha)} a_{10}^{(\alpha)}}{(a_{00}^{(\alpha)})^2}$$

とおき i) の場合と同様に計算すると、ある $\alpha_0 \in T^m$ が存在して、

$$\tilde{C}(z_1, z_1)^2 = \tilde{K}_{\alpha_0}(z_1, z_1) \leq \tilde{K}_\alpha(z_1, z_1) \quad (\forall \alpha \in T^m),$$

また $-\tilde{C}(z_1, z_1)^2 a_{00}^{(\alpha)} + a_{11}^{(\alpha)} \geq 0$ ($\forall \alpha \in T^m$) となることがわかる。

(10) より、

$$|A_\alpha| = (a_{00}^{(\alpha)})^2 [\tilde{K}_\alpha(z_1, z_1) - |c_1|^2].$$

であり、 $|A_{\alpha_0}| \geq 0$ のとき $|c_1|^2 \leq \tilde{K}_{\alpha_0}(z_1, z_1) = \tilde{C}(z_1, z_1)^2$ であるから

$$A_{\alpha_0} \geq 0 \implies A_\alpha \geq 0 \quad (\forall \alpha \in T^m)$$

が成り立ち、次の定理を得る。

定理 4 D 内の一点 z_1 とそこでの次数 2 に対して、ある $\alpha_0 \in T^m$ が存在して次が成り立つ。2 つの複素数 $\{c_0, c_1\}$ を与えたとき、点 z_1 での展開が

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_1) + \dots$$

となる $f \in B$ が存在する為の必要十分条件は

$$A_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha_0)} & a_{01}^{(\alpha_0)} \\ a_{10}^{(\alpha_0)} & a_{11}^{(\alpha_0)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_0 & \\ & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha_0)} & a_{01}^{(\alpha_0)} \\ a_{10}^{(\alpha_0)} & a_{11}^{(\alpha_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c_0} & \overline{c_1} \\ & \overline{c_0} \end{bmatrix} \geq 0$$

となることである。

References

- [1] M. B. Abrahamse, *The Pick interpolation theorem for finitely connected domains*, Michigan Math. J. **26** (1979), 195–203.
- [2] L. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [3] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, 2nd ed., Mathematical Surveys, No 5 Amer. Math. Soc., 1970.
- [4] S. D. Fisher, *Function Theory on Planer Domains*, Wiley, New York, 1983.
- [5] P. R. Garabedian, *Schwarz's lemma and the Szegő kernel function*, Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), 1–35.
- [6] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

- [7] M. H. Heins, *Extremal problems for functions analytic and single-valued in a doubly-connected region*, Amer. J. Math. **62** (1940), 91–106.
- [8] M. H. Heins, *Nonpersistence of the grenzkreis phenomenon for Pick-Nevanlinna interpolation on annuli*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. **596** (1975).
- [9] D. E. Marshall, *An elementary proof of Pick-Nevanlinna interpolation theorem*, Michigan Math. J. **21** (1974), 219–223.
- [10] R. Nevanlinna, *Über beschränkte analytische Funktionen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A **32** (1929), No 7.
- [11] G. Pick, *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann. **77** (1916), 7–23.
- [12] W. Rudin, *Analytic functions of class H_p* , Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 46–66.
- [13] S. Saitoh, *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*, Pitman Research Notes in Math. **189**, Longman, Harlow, 1988.
- [14] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. Reine Angew. Math. **147** (1917), 205–232.
- [15] S. Takahashi, *Extension of the theorems of Carathéodory-Toeplitz-Schur and Pick*, Pacific J. Math. **138** (1989), 391–399.
- [16] S. Takahashi, *Nevanlinna parametrizations for the extended interpolation problem*, Pacific J. Math. **146** (1990), 115–129.
- [17] S. Takahashi, *Extended interpolation problem in finitely connected domains*, Oper. Theory Adv. Appl. **59** (1992), 305–327, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [18] S. Takahashi, *A sufficient condition for Nevanlinna parametrization and an extension of Heins theorem*, Nagoya Math. J. (to appear).
- [19] H. Widom, *Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane*, Advances in Math. **3** (1969), 127–232.
- [20] H. Widom, *The maximum principle for multiple-valued analytic functions*, Acta Math. **126** (1971), 63–82.