

準周期外力 2 次写像系でみられる “SNA” と “riddled basin”

大阪大学・情報科学研究科 茶碗谷 毅

Tsuyoshi Chawanya

Graduate School of Information Science and Technology,
Osaka University

1980年代の前半、準周期的な外力を受ける系において、観測されるリアプノフ指数は負であるという意味で軌道不安定性は持たないにも関わらず、アトラクターの形状などはカオスの場合に見られるような複雑さを示す現象が報告された [1,2]。この現象は系を歪積系として見た場合に観測されるアトラクターの形状、つまり典型的な軌道の漸近的挙動に特徴があり、しばしば Strange Non-chaotic Attractor(SNA) と呼ばれ盛んに研究されてきてきた [3,4]。準周期系におけるこれらの SNA は、離散系か連続時間系か、可逆系か非可逆系か、対称性などに起因する自明な軌道を持つ場合とそうでない場合、といった系の基本的な性質により、見た目は大きく変わるものの、いずれの場合も吸引的な軌道と反発的な軌道が、非一様に接した状態で共存することにより引き起こされていると考えることができる [5]。

SNA の発生を伴う分岐の多くは、吸引的な軌道 (アトラクター) と反発的な軌道 (リペラー) の非一様な接触が発生する過程として理解することができる [6-13]。アトラクターが接触するリペラーのタイプにより、分岐の分類なども行なわれている。そのなかにあって、トーラスのフラクタル化による SNA の発生と呼ばれている現象は特異なものとなっている [14]。これは、元々なめらかなトーラスをアトラクターとして持っている系において、パラメータの変化とともにトーラスの形状が激しい振動を含むものになり、あるパラメータ値から先では SNA に変化するという現象で、SNA が現れるより前のパラメータ領域においてはアトラクターの近くに不安定な軌道 (リペラー) は存在していない。

フラクタル化ルートによる SNA の発生に関しては、主に準周期外力ロジスティック写像系における結果が報告されている。この系は $1+1$ 次元の歪積型の構造を持つ非可逆写像系で、フラクタル化ルートによる SNA の発生に限らず準周期外力系における非線形現象一般を調べる上でよく使われている作業モデル系である。準周期外力ロジスティック写像系にも幾つかのパリエーションがあるが、ここではよく使われている形の一つである次のような系を考えておく。

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= (\theta_n + \omega) \bmod 1, \\ x_{n+1} &= a - x_n^2 + \epsilon \cos(2\pi\theta_n)\end{aligned}$$

駆動力の振動数 ω が無理数の場合にこの系は準周期駆動系となる。特に $(\sqrt{5}-1)/2$ とした場合についてよく調べられている。ここで a, ϵ はそれぞれ非線形性の強さ、準周期駆動の強度に対応するパラメータを表す。

我々 (茶碗谷・酒井・高橋・角) はこの系の応答側の変数 (x_n) を複素数の範囲に拡張してフラクタル化の分岐を調べた。その結果、フラクタル化による SNA の発生は、実数の範囲では関与するリペラーが存在しないように見える現象であるが、複素数の範囲で考えることで虚数軸方向から接近するリペラーが実空間上に存在するアトラクターと接触することにより引き起こされる分岐という見方ができることがわかった。また接触に伴うアトラクターの変化は、カオス駆動の歪積力学系における blowout 分岐に伴う riddled basin を持つアトラクターの発生 [15,16] と類似点を持ち、複素の相空間でみると SNA の basin は内点を持たない riddled basin となっていることが示唆された。

本講演ではフラクタル化の分岐に伴うアトラクターの形状変化について説明したのち、その複素化した相空間における basin 構造 (ジュリア集合) の変化を、数値計算によりえられた動画などを用いて紹介した。

参考文献

- [1] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan and J. A. Yorke, *Physica D*, 13, 261 (1984)
- [2] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.*, 71, 1112 (1984)
- [3] U. Feudel, S. Kuznetsov and A. Pikovsky, *Strange nonchaotic attractors*, (World Scientific, Singapore, 2006)
- [4] A. Prasad, V. Mehra and R. Ramaswamy, *Phys. Rev. E* 57, 1576 (1998)
- [5] R. Sturman and J. Stark, *Nonlinearity* 13, 113 (2000)
- [6] J. F. Heagy and S. M. Hammel, *Physica D*, 70, 140 (1994)
- [7] T. Yalcinkaya and Y-C. Lai, *Phys. Rev. E*, 56 1623 (1997)
- [8] A. Witt, U. Feudel and A. Pikovsky, *Physica D*, 109, 180 (1997)
- [9] A. Prasad, V. Mehra and R. Ramaswamy, *Phys. Rev. E*, 79, 4127 (1997)
- [10] U. Feudel, A. Witt, Y-C. Lai and C. Grebogi, *Phys. Rev. E*, 58, 3060 (1998)
- [11] H. M. Osinga and U. Feudel, *Physica D*, 141, 54 (2000)
- [12] S-Y. Kim, W. Lim and E. Ott, *Physical Review E*, 67, 056203 (2003)
- [13] W. Lim and S-Y. Kim, *J. of Korea. Phys. Soc.*, 47, 414 (2005)
- [14] T. Nishikawa and K. Kaneko, *Physical Review E*, 54, 6114 (1996)
- [15] J.C. Alexander, J.A. Yorke, Z. You and I. Kan *Int. J. Bifurcation Chaos* 2, 795 (1992)
- [16] P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart *Nonlinearity*, 9, 903 (1996)