

小林氏の問題について

神戸大・教養 池田 裕司

東洋大・工 山下 正勝

§1. 序

小林一幸氏は「 $b(M)=3$ なる 4 次元 PL 閉多様体 M^4 は homology と向き付け可能性でどのように分類できるか」という問題を提起された。もしも「そのような M^4 は (PL 同相の意味で) 一意である」と分かれば最終的な分類を得たことになる。

$b(M)$ の正確な定義は [1] を参照して欲しいが、乱暴に言えば「 M を cover するのに必要な 4-balls の最小数」のことである。

$b(M)=3$ なる 4 次元閉多様体 M^4 には、 $b(W)=2$ なる 4 次元多様体 W^4 , $\dot{W}^4 \neq \emptyset$, が

$$W^4 = M^4 - \dot{B}^4, \quad B^4 \text{ は } M^4 \text{ 内の 4-ball,}$$

という相互関係によって、1 対 1 に対応する。こゝでは次の 4 つの条件:

- (1) $b(W) = 2$,
- (2) $\dot{W} = S^3$,

/

$$(3) \quad H_1(\overline{W}) = p\mathbb{Z},$$

$$(4) \quad H_2(\overline{W}) = \mathbb{Z}$$

を満足する connected compact bounded PL 4-manifold W^4 の全体 $\overline{C}(p,1)$ について知り得た結果を報告する. 主な結果は次の2つである.

定理1. $\overline{W}_p \in \overline{C}(p,1)$ の内部から 4-ball D^4 の内部を取り除き, 2つの 3-spheres $\dot{D}^4$ と $\dot{\overline{W}}_p$ を 1-handle $I \times D^3$ でつないで得られる $\overline{W}_{p+1}$, すなわち,

$$\overline{W}_{p+1} = (\overline{W}_p - \dot{D}^4) \cup I \times D^3$$

$$\text{such that } (\overline{W}_p - \dot{D}^4) \cap (0,1) \times D^3 = \emptyset,$$

$$\dot{D}^4 \supset 0 \times D^3,$$

$$\dot{\overline{W}}_p \supset 1 \times D^3$$

は $\overline{C}(p+1,1)$ の元である. 逆に $\overline{C}(p+1,1)$ のすべての元は $\overline{C}(p,1)$ の残る元から上のようにつくられる.

定理2. 任意の多様体 $\overline{W}_p \in \overline{C}(p,1)$, $p \geq 0$, は

$$(S_1^1 \vee \cdots \vee S_p^1) \vee S^2 \vee (S_1^3 \vee \cdots \vee S_p^3)$$

の形の spine を持つ.

以下でこれらの定理を示す手順の概要を述べる.

§2. Key Theorem.

$W \in \bar{C}(p,1)$ は 2- の 4-balls A, B と

$$W = A \cup B,$$

$$A \cap B = \dot{A} \cap \dot{B} = 3\text{-次元多様体}$$

とあらわされる. このとき 3次元多様体

$$F = A \cap B$$

は $(p+1)$ 個の連結成分 $F_0, F_1, \dots, F_p$ と

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_p$$

とあらわされる. $(A, B; F)$ を W の実現と呼ぶことにしよう. p 個の F_i ($i \neq 0$) は何れも 3-ball から何個かの小さい 3-balls を取り除いたものである. F_0 の形は すぐには分らないが, その境界 $\dot{F}_0$ の形は唯 1 個の torus $S^1 \times S^1$ と何個かの 2-spheres の和で

$$\dot{F}_0 = S^1 \times S^1 + (S^2_0 + \dots + S^2_r)$$

とあらわされることが分かる. 但し r は 0 かも知れない. 実を言うと, $r \geq 1$ であって欲しいのだが, 勝手に W の実現を取るとそうはならない.

$\dot{W} = S^3$ だから W に 4-ball C をはりつけた 4次元閉多様体 $\hat{W}$ を考える. すなわち

$$\hat{W} = A \cup B \cup C, \quad W \cap C = \dot{W} = \dot{C}.$$

そのとき $\overline{W}$ の実現として

$$(A, B; A \cap B), (B, C; B \cap C), (C, A; C \cap A)$$

の3つが自然に考えられる. この3つのうち1つが我々の望む条件 " $r \geq 1$ " を保障してくれる.

さて再び実現 $(A, B; F)$ について話を進めよう. F_0 は connected で $F_0 \subset S^3$ (たとえば $\hat{A}$) であるから F_0 は knot の exterior から r 個の 3-balls を取り除いたものである. いまこの取り除かれた 3-balls をそれぞれ D_i のまゝ埋め直したものを $\hat{F}_0$ とする. すなわち,

$$\hat{F}_0 = F_0 \cup (D_1^3 + \dots + D_r^3),$$

$$F_0 \cap D_j = S_j^2, \quad D_i \cap D_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

である. そのとき $\hat{F}_0$ は knot の exterior そのものである. この $\hat{F}_0$ が trivial knot の exterior (すなわち solid torus) であるかどうかは一般には分らない. ところが先程の $\overline{W}$ の3つの実現

$$(A, B; A \cap B), (B, C; B \cap C), (C, A; C \cap A)$$

のうちから好都合なものを探し出すことができる. すなわち

Key Theorem. $\overline{W} \in \mathcal{C}(p, 1)$, $p \geq 1$, の実現 $(A, B; F)$ として, $r \geq 1$ が $\hat{F}_0$ が (3-sphere $\hat{A}$ の中で trivial な)

solid torus であるようなものかとなる。

この結果から homology の rank 等を調べることにより、 F_i ($i=1, \dots, p$) のうちの1つ、たとえば F_p , が 3-ball であることが分かる。この 3-ball F_p を用いて W を surgeryすれば $W_{p-1} \in \bar{C}(p-1, 1)$ が得られる。その手順を次に示す。

§3. $W_p \in \bar{C}(p, 1)$ の surgery.

今 T の $W \in \bar{C}(p, 1)$ を T は W_p と書くことにする。
 $(A, B; F)$ を F_p が 3-ball であるような W_p の実現とする。
 そのとき

$$V = \overline{W_p - N(F_p, W_p)}$$

を考える。ここに $N(F_p, W_p)$ は F_p の W_p 上の正則近傍である。 V は T 度 2つの 3-spheres から成り立っていることから (3, 2)-Schoenflies Th. から分かるから、そのうちの1つに 4-ball D^4 を attach して、さしこもう。
 すなわち、

$$W_{p-1} = V \cup D^4,$$

$$V \cap D^4 = \dot{V} \cap \dot{D}^4 = 3\text{-sphere}.$$

そのとき $W_{p-1} \in \mathcal{C}(p-1, 1)$ であることが分かる。この操作を逆に見てゆけば冒頭で述べた 2 つの定理が得られる。

文献

- [1] Kobayashi, K. and Tsukui, Y., The ball coverings of manifolds, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976) 133-143.