

Degenerate instability in Reaction-Diffusion equations with global inhibition

大阪大学・大学院基礎工学研究科 小川知之 (Toshiyuki Ogawa)

Graduate School of Engineering Science

Osaka University

1 はじめに

反応拡散方程式系によって多種多様な自発的パターン形成の問題がモデル化され、それによって現象と数学の双方の理解が進んできていることはここで改めていうまでもない。ここでは、電気化学反応系で、最近活発に研究され始めている動的パターンダイナミクスの問題から派生した振動場の反応拡散系の解の分岐解析を紹介したい。

自励的な2次元ODE系と拡散項からなる2コンポーネントの反応拡散系を考えよう。ノイマン境界条件など適当な境界条件の下では、ODE系の軌道を与えれば、それに対応する空間的に一様な反応拡散系の解がある。しかしながら、ODE系での軌道の安定性は、一般に反応拡散系での対応する解の安定性を意味しない。よく知られている Turing 不安定化は、仮に2次元ODE系が漸近安定な平衡点を持ってもそれに対応する空間一様な定常解が拡散の影響で不安定化され得るという例である。ここで、Turing 不安定化における分岐は、Hopf 分岐ではなく常に定常分岐の形で現れることを注意しておく。すなわち不安定化の結果、適当な非線形項を加えれば、安定な空間非一様な定常解が現れ、通常これをもって我々はパターン形成の onset を理解している。

さて次に、超臨界 Hopf 分岐を伴う平衡点をもつ2次元ODE系を考えよう。すると、反応拡散系は Hopf 分岐で得られた周期軌道に対応する空間一様な時間周期解をもつ。実はこの時間周期解が反応拡散系に現れる唯一の安定な時間周期解であることがわかる。すなわち、この反応拡散系では定常解から分岐する空間非一様な時間周期解で安定なものはないことが簡単な計算でわかる。こうして時空間的なパターンを分岐的に扱うには2コンポーネントの反応拡散系では不十分で何らかの付加的因子を加えなければならないことがわかる。

そこで、環状の電極での電気化学の実験結果 ([1], [2], [5]) に関連して次のような大域的な抑制効果をもつ2コンポーネントの反応拡散系を考えることにする。

$$\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + f(u, v) - s \frac{1}{L} \int_0^L u dx \\ v_t = D_2 \Delta v + g(u, v), x \in [0, L] \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $D_1, D_2, L > 0, s \geq 0$ でさらに $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ かつその線形部は

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u, v) = (0, 0)} = \begin{pmatrix} p & -p \\ q & -1 \end{pmatrix}$$

とする。すなわち (f, g) で定まるベクトル場は定数 q が $q > 1$ を満たすとき $p = 1$ で Hopf 分岐を起こす。なお境界条件は周期境界条件とする。

このとき 0 解の線形化固有値問題を調べると、0-モードの Hopf 分岐が $p = 1 + s$ で起こり、 ± 1 -モードの Hopf 分岐が $p = 1 + (D_1 + D_2)(\frac{2\pi}{L})^2$ で起こることがわかる。大域抑制の効果はその強度に応じて 0-モードの Hopf 分岐を遅らせることにある。その結果として、あとから起きていて元々見えていなかった ± 1 -モードの Hopf 分岐が観測可能になる。実際 $s = (D_1 + D_2)(\frac{2\pi}{L})^2$ ととれば $p = 1 + s$ は 3 重の退化 Hopf 臨界点になる。この退化 Hopf 臨界点のまわりの局所分岐構造を調べることがこの研究の最終的な目標である。 $\mu_0 = \nu_0 + i\omega_0$, $\mu_1 = \nu_1 + i\omega_1$ をそれぞれ 0, ± 1 -モードの固有値とすれば中心多様体理論と対称性などから次のことがわかる。

定理 1.1 $\omega_0 \neq 0, \omega_1 \neq 0, \omega_0 \pm 2\omega_1 \neq 0$ とする。このとき周期境界条件下では退化 Hopf 臨界点のまわりでの (1.1) のダイナミクスは 5 個の複素定数 $g_{00}, g_{01}, g_{10}, g_{11}, g_{12}$ を用いて次の複素 3 次元の ODE 系と同値である。

$$\begin{cases} \dot{z}_0 &= \mu_0 z_0 - z_0(g_{00}|z_0|^2 + g_{01}|z_1|^2 + g_{01}|z_{-1}|^2) + O(\|(z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1, z_{-1}, \bar{z}_{-1})\|^4) \\ \dot{z}_1 &= \mu_1 z_1 - z_1(g_{10}|z_0|^2 + g_{11}|z_1|^2 + g_{12}|z_{-1}|^2) + O(\|(z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1, z_{-1}, \bar{z}_{-1})\|^4) \\ \dot{z}_{-1} &= \mu_1 z_{-1} - z_{-1}(g_{10}|z_0|^2 + g_{12}|z_1|^2 + g_{11}|z_{-1}|^2) + O(\|(z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1, z_{-1}, \bar{z}_{-1})\|^4) \end{cases}$$

ここで $z_i \in \mathbb{C}$ は解の第 i Fourier 係数 α_i の近似で

$$z_i = \alpha_i + O(\|\alpha\|^2).$$

さらに、(1.1) は (u, v) の偶関数性を保ち、そのとき次の複素 2 次元の ODE 系と同値である。

$$\begin{cases} \dot{z}_0 &= \mu_0 z_0 - z_0(g_{00}|z_0|^2 + 2g_{01}|z_1|^2) + O(\|(z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1)\|^4) \\ \dot{z}_1 &= \mu_1 z_1 - z_1(g_{10}|z_0|^2 + (g_{11} + g_{12})|z_1|^2) + O(\|(z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1)\|^4) \end{cases}$$

この 3 重退化点では、 ± 1 -モードの固有値が共に μ_1 で等しいので、Hopf-Hopf 型退化臨界点の一般論に必要な非共鳴条件 ([3]) を満たさない。しかし一般論ではなく、そのかわりに方程式の phase shift から来る $SO(2)$ 不変性を用いることで得られる。さて、上の定理における z_j の方程式の 3 次までの部分、いわゆる標準形には有限確定性はないが、少なくとも極座標表示した振幅方程式の平衡点に対応する不変トーラスが分岐することは結論することができる。すなわち truncated dynamics の振幅方程式は $z_j = r_j e^{i\theta_j}$ を用いて次のように表せる。

$$\begin{cases} \dot{r}_0 &= \nu_0 r_0 - r_0(\Re g_{00} r_0^2 + \Re g_{01} r_1^2 + \Re g_{01} r_{-1}^2) \\ \dot{r}_1 &= \nu_1 r_1 - r_1(\Re g_{10} r_0^2 + \Re g_{11} r_1^2 + \Re g_{12} r_{-1}^2) \\ \dot{r}_{-1} &= \nu_1 r_{-1} - r_{-1}(\Re g_{10} r_0^2 + \Re g_{12} r_1^2 + \Re g_{11} r_{-1}^2) \end{cases}$$

この方程式系が平衡点 $(r_0, r_1, r_{-1}) = (r_0^*, r_1^*, r_2^*)$ をもてばそれに対応する不変トーラス： $\{(z_0, z_1, z_{-1}); (|z_0|, |z_1|, |z_{-1}|) = (r_0^*, r_1^*, r_2^*)\}$ が存在する。3 次の係数 g_{jk} と μ_i により、一般に次のような不変トーラスがある。

1. 一様振動解 (Uniform Oscillation) : $(r_0^*, r_1^*, r_2^*) = (r, 0, 0)$ のとき。
2. 回転波 (Rotating Wave) : $(r_0^*, r_1^*, r_2^*) = (0, r, 0)$ または $(0, 0, r)$ のとき。
3. 定在波 (Standing Wave) : $(r_0^*, r_1^*, r_2^*) = (0, r, r)$ のとき。
4. 複合回転波 (Mixed Rotating Wave) : $(r_0^*, r_1^*, r_2^*) = (r, r', 0)$ または $(r, 0, r')$ のとき。

5. 複合定在波 (Mixed Standing Wave) : $(r_0^*, r_1^*, r_2^*) = (r, r', r')$ のとき.

ただし上で r, r' は適当な正数とする.

なお, 方程式 (1.1) でノイマン境界条件を課した場合も周期境界条件に帰着できることを注意しておく. すなわち, (u, v) を $[-L, L]$ に偶関数として拡張すれば自然に周期境界条件を満たす. 従って周期 $L' = 2L$ として方程式 (1.1) を周期境界条件かつ偶関数対称性で考えることと同値である. よって上の定理の sub dynamics に含まれる.

我々の目標は分岐解析の結果得られる標準形の係数により, 種々の時空間パターンに対応する不変トーラスの安定性を分類することである. 特に ± 1 -モードの競合を解析すると, Rotating Wave(RW) と Standing Wave(SW) の競合を議論することができる. そのためには必ずしも $s = (D_1 + D_2)(2\pi/L)^2$ かつ $p = 1 + s$ という 3 重の退化点である必要はなく $s > (D_1 + D_2)(2\pi/L)^2, p = 1 + (D_1 + D_2)(2\pi/L)^2$ の ± 1 -モードが臨界である点で考えれば十分である. したがって ± 1 -モードのみの標準形方程式を考えればよい. なお, 電気化学の実験では複合定在波のようなものも安定に観測されるので, 上の 3 つのモードの標準形の全体を解析することも重要である. しかしここでは, 煩雑さを避けるため ± 1 -モードのみの解析結果を紹介する.

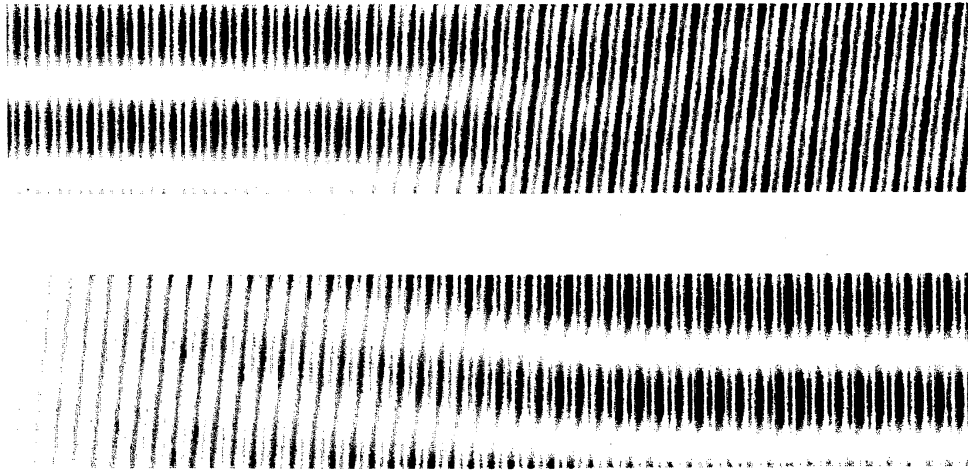


図 1: 方程式 (1.1) のシミュレーション結果. 縦軸が空間方向, 横軸が時間 (右が正の向き). 境界条件は周期的. 上下ともに $L = 2\pi, p = 2.01, q = 1.5, s = 2.0, D_1 = 0.8, D_2 = 0.2, a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. さらに上では $a_2 = 1, b_2 = 0$ で, 下では $a_2 = 0, b_2 = 1$ とした. 上では SW の初期値からスタートし RW に収束, 逆に下では RW の初期値からスタートし SW に収束している. なお, 3 次の非線形項のみのときは上図と同様の結果になる.

ここで典型的な数値計算結果を紹介しておこう. 非線形項を

$$\begin{aligned} f(u, v) &= p(u - v) + a_1 u^2 + 2b_1 uv + c_1 v^2 - c_3 u^3 \\ g(u, v) &= qu - v + a_2 u^2 + 2b_2 uv + c_2 v^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

とする. 非線形項が 3 次項のみの時は RW しか現れないが, 2 次項をうまくコントロールすると SW が現れるようになる (図 1). このようなパラメーター探索も分岐解析の結果可能になっ

たといえる。定理 1.1 からわかるようにノイマン境界条件を課すと、当然のことながら RW が現れるパラメーター値でも SW が現れる (図 2)。

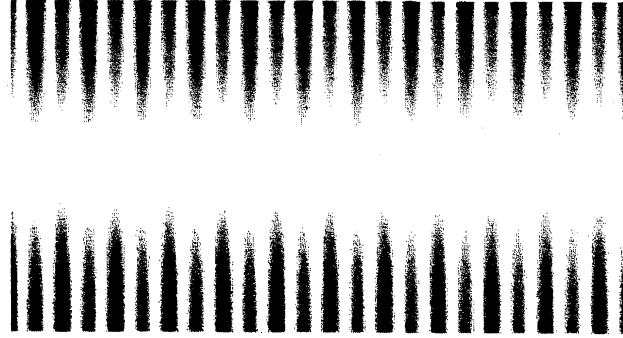


図 2: 方程式 (1.1) のノイマン境界条件でのシミュレーション結果. $L = \pi, p = 2.01, q = 1.5, s = 2.0, D_1 = 0.8, D_2 = 0.2, a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0, c_3 = 1$. なお, 代わりに $a_2 = 1, c_3 = 0$ や $b_2 = 1, c_3 = 0$ としても上図と同様 SW が現れる.

さて, 上で考えてきた大域抑制を伴う 2 コンポーネントの反応拡散系は次のような 3 コンポーネントの反応拡散系の極限 (D_∞ を大きく $\tau > 0$ を小さく取る) とも考えられることを付け加えておく.

$$\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + f(u, v) - sw \\ v_t = D_2 \Delta v + g(u, v) \\ \tau w_t = D_\infty \Delta w + u - w \end{cases}$$

2 線形化固有値問題と多重 Hopf 分岐

方程式 (1.1) を定常解 $(u, v) = (0, 0)$ のまわりで線形化して固有値問題を考えよう. 周期境界条件を課したことから固有関数が三角関数で表されるので, その振動数 m により m モードの固有値と呼ぶことにする. まず始めに $s = 0$ とする. m モードの固有値問題は行列

$$A_m = \begin{pmatrix} p - D_1 m^2 k_0^2 & -p \\ q & -1 - D_2 m^2 k_0^2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

で記述される. ただし $k_0 = 2\pi/L$ は基本波数である. したがって, ただちにわかるように, 第 0 モードの Hopf 分岐点が $p = 1$ であるのに対し, 第 m モードは Hopf 分岐するとしたら $p = 1 + m^2(D_1 + D_2)k_0^2$ が分岐点である. これは次のことを意味する. すなわち第一番目の分岐は常に空間一様解への分岐であり, (超臨界の場合は) これが安定に観測される. 空間的非一様解への分岐は第一番目の分岐ではないのですでに安定性が失われており (分岐点近傍で) 安定に観測されることはない.

これに対し、一般の s の場合、0 モードの固有値問題が次のように替わる。

$$A_m = \begin{cases} \begin{pmatrix} p-s & -p \\ q & -1 \end{pmatrix} & m=0 \\ \begin{pmatrix} p-D_1m^2 & -p \\ q & -1-D_2m^2 \end{pmatrix} & m \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

したがって 0-モードの Hopf 分岐点は $p = 1 + s$ となり、大域抑制の効果により空間一様な 0-モード解の分岐点が遅れて出現することになる。特に $s > (D_1 + D_2)k_0^2$ ととれば空間非一様な ± 1 -モードのほうが 0-モードよりも早く Hopf 分岐を起こすようにすることができる。ただし、 ± 1 -モードの対応する固有値が実際に $p = 1 + (D_1 + D_2)k_0^2$ で虚数固有値を持つためには $D_1 > D_2 + D_2k_0^2$ が必要である。なお、 $D_1 > D_2$ であれば ± 2 以降の固有値も $p = 1 + (D_1 + D_2)k_0^2$ で実部負であることがわかる。したがって、以下次を仮定する。

仮定 2.1 方程式 (1.1) で $D_1 > D_2 + D_2k_0^2$ かつ $D_1 > D_2$ で $p \approx 1 + (D_1 + D_2)k_0^2$ とする。

定理 2.2 仮定 2.1 の下で (1.1) のダイナミクスは 2 つの臨界モードをもち、周期境界条件のときは 2 個の複素定数 g_{11}, g_{12} を用いて次の複素 2 次元の ODE 系と同値である。

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \mu_1 z_1 - z_1(g_{11}|z_1|^2 + g_{12}|z_{-1}|^2) + O(\|(z_1, \bar{z}_1, z_{-1}, \bar{z}_{-1})\|^4) \\ \dot{z}_{-1} = \mu_1 z_{-1} - z_{-1}(g_{12}|z_1|^2 + g_{11}|z_{-1}|^2) + O(\|(z_1, \bar{z}_1, z_{-1}, \bar{z}_{-1})\|^4) \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで $z_i \in \mathbb{C}$ は解の第 i Fourier 係数 α_i の近似で

$$z_i = \alpha_i + O(\|\alpha\|^2).$$

さらに、 (u, v) が偶関数のとき（ノイマン境界条件のときはこれにあたる）次の複素 1 次元の ODE 系と同値である。

$$\dot{z}_1 = \mu_1 z_1 - (g_{11} + g_{12})z_1|z_1|^2 + O(\|(z_1, \bar{z}_1)\|^4)$$

注意 2.3 仮定 2.1 でノイマン境界条件のときは単なる Hopf 分岐である。

3 退化 Hopf 分岐解析

第 ± 1 -モードのみが臨界であるという仮定 2.1 の下で、退化特異点まわりの分岐解析を行い、定理 2.2 における g_{11}, g_{12} を求めるのがこの節での目標である。 $u(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m(t) e^{imx}, v(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m(t) e^{imx}$ とフーリエ展開して、方程式 (1.1) を書き直すと、

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_m \\ \dot{\beta}_m \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} + (h.o.t), \quad m \in \mathbb{Z}$$

となる。ここで、 $u, v \in \mathbb{R}$ なのでフーリエ係数は $\alpha_m = \overline{\alpha_{-m}}, \beta_m = \overline{\beta_{-m}}$ のエルミート対称性をもつ。さて、 $m = \pm 1$ の二つの Hopf モードは同じ固有値 $\mu_1 = \nu_1 + i\omega_1$ をもつので、いわゆ

る Double Hopf の標準形理論には乗らないが、系の並進対称性から来る $SO(2)$ 不変性を考慮すると、定理 1.1 で述べたような標準形に帰着されることが示せる。しかしここでは分岐解析を行うことが目標である。そのためには行列 A_1 を実標準形にする座標を使うと便利である。すなわち

$$T_1 A_1 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} \nu_1 & -\omega_1 \\ \omega_1 & \nu_1 \end{pmatrix}$$

なる行列 T_1 により

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\pm 1} \\ \tilde{\beta}_{\pm 1} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} \alpha_{\pm 1} \\ \beta_{\pm 1} \end{pmatrix}$$

と座標変換を施す。さらに $z_{\pm 1} = \tilde{\alpha}_{\pm 1} + i\tilde{\beta}_{\pm 1}$ とおく。エルミート対称性に注意すれば、

$$\tilde{\alpha}_{\pm 1} = \frac{z_{\pm 1} + \bar{z}_{\mp 1}}{2}, \quad \tilde{\beta}_{\pm 1} = \frac{z_{\pm 1} - \bar{z}_{\mp 1}}{2i},$$

であり¹、この座標を用いて方程式を書き直すと以下ようになる。

$$\dot{z}_1 = \mu_1 z_1 + Q(z_1, z_{-1}, \bar{z}_1, \bar{z}_{-1}, \alpha, \beta) + C(z_1, z_{-1}, \bar{z}_1, \bar{z}_{-1}, \alpha, \beta)$$

$$\dot{z}_{-1} = \mu_1 z_{-1} + Q(z_{-1}, z_1, \bar{z}_{-1}, \bar{z}_1, \alpha, \beta) + C(z_1, z_{-1}, \bar{z}_1, \bar{z}_{-1}, \alpha, \beta)$$

ここで、 Q, C はそれぞれ同じ 2 次、3 次多項式であり、 (α, β) は正確には $\{(\alpha_m, \beta_m); |m| \neq 1\}$ のことである。中心多様体上の方程式を導くには一般には隸属変数を臨界変数で解く必要があるが、ここでは標準形変換の方法を用いる。まず中心多様体は臨界モードの固有空間に接しているの、臨界モード $|z_{\pm 1}| = O(\delta)$ である限り、隸属モードの大きさは $|\alpha_m| = O(\delta^2)$ である。従って上の式の $O(\delta^3)$ までの項を拾うと次の式が得られる。

$$\begin{aligned} z_1 = & \mu_1 z_1 + F_{00} z_1 \alpha_0 + F_{01} z_1 \beta_0 + F_{10} \bar{z}_{-1} \alpha_0 + F_{11} \bar{z}_{-1} \beta_0 \\ & + G_{00} z_{-1} \alpha_2 + G_{01} z_{-1} \beta_2 + G_{10} \bar{z}_1 \alpha_2 + G_{11} \bar{z}_1 \beta_2 \\ & + H_{11} z_1 |z_1|^2 + H_{12} z_1 |z_{-1}|^2 + (\text{other cubic terms}) + O(\delta^4) \end{aligned}$$

ここで $F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, G_{00}, G_{01}, G_{10}, G_{11}, H_{11}, H_{12}$ はもちろん方程式から決まる定数である。(Appendix 参照。実際に F, G を計算すれば対称性: $F_{00} = G_{00}, F_{01} = G_{01}, F_{10} = G_{10}, F_{11} = G_{11}$ が成立することもわかる。) これらはもともと $\sum_{m_1+m_2=1} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2}$ や $\sum_{m_1+m_2+m_3=1} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3}$ から現れる項だが、例えば上式の項以外の 2 次の項はすべて $O(\delta^4)$ の項となるので、無視してよい。一方、隸属モードの中でも 0, 2-モードは 2 次の項を通して $O(\delta^3)$ の影響を与えるのでこれらを協調モードと呼ぶことにする。協調モードが 2 次の項を通してどのような影響を及ぼすかは 0, 2-モードの方程式を $O(\delta^2)$ まで見てやればよい。それらを次のように表す。

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_0 \\ \dot{\beta}_0 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{00}^1 z_1 z_{-1} + D_{01}^1 z_1 \bar{z}_1 + D_{10}^1 \bar{z}_{-1} z_{-1} + D_{11}^1 \bar{z}_{-1} \bar{z}_1 \\ D_{00}^2 z_1 z_{-1} + D_{01}^2 z_1 \bar{z}_1 + D_{10}^2 \bar{z}_{-1} z_{-1} + D_{11}^2 \bar{z}_{-1} \bar{z}_1 \end{pmatrix} + O(\delta^3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_0^1 z_1^2 + E_1^1 z_1 \bar{z}_{-1} + E_2^1 \bar{z}_{-1}^2 \\ E_0^2 z_1^2 + E_1^2 z_1 \bar{z}_{-1} + E_2^2 \bar{z}_{-1}^2 \end{pmatrix} + O(\delta^3)$$

¹符号は複合同順とする。添字の符号の反転に注意されたし。

さてこれらを用いて中心多様体上のダイナミクスを得るには、次のような2次の near identity 変換を行ってすべての2次の項を消去すればよい。

$$w_1 = z_1 + S_{00}z_1\alpha_0 + S_{01}z_1\beta_0 + S_{10}\bar{z}_{-1}\alpha_0 + S_{11}\bar{z}_{-1}\beta_0 \\ + T_{00}z_{-1}\alpha_2 + T_{01}z_{-1}\beta_2 + T_{10}\bar{z}_1\alpha_2 + T_{11}\bar{z}_1\beta_2$$

ここで $S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}, T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ は2次の項を消去するように後に定める未知係数である。この新しい座標を用いて z_1 の方程式を書き換えると

$$w_1 = \mu_1 w_1 + \tilde{F}_{00}z_1\alpha_0 + \tilde{F}_{01}z_1\beta_0 + \tilde{F}_{10}\bar{z}_{-1}\alpha_0 + \tilde{F}_{11}\bar{z}_{-1}\beta_0 \\ + \tilde{G}_{00}z_{-1}\alpha_2 + \tilde{G}_{01}z_{-1}\beta_2 + \tilde{G}_{10}\bar{z}_1\alpha_2 + \tilde{G}_{11}\bar{z}_1\beta_2 \\ + \tilde{H}_{11}z_1|z_1|^2 + \tilde{H}_{12}z_1|z_{-1}|^2 + (\text{other cubic terms}) + O(\delta^4)$$

ただし $\tilde{F}$ などは次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_{00} \\ \tilde{F}_{01} \end{pmatrix} = {}^t A_0 \begin{pmatrix} S_{00} \\ S_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{00} \\ F_{01} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{F}_{10} \\ \tilde{F}_{11} \end{pmatrix} = ({}^t A_0 + (\bar{\mu}_1 - \mu_1)I) \begin{pmatrix} S_{10} \\ S_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{11} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{G}_{00} \\ \tilde{G}_{01} \end{pmatrix} = {}^t A_2 \begin{pmatrix} T_{00} \\ T_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{00} \\ G_{01} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{G}_{10} \\ \tilde{G}_{11} \end{pmatrix} = ({}^t A_2 + (\bar{\mu}_1 - \mu_1)I) \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{10} \\ G_{11} \end{pmatrix} \\ \tilde{H}_{11} = H_{11} + S_{00}D_{01}^1 + S_{01}D_{01}^2 + T_{10}E_0^1 + T_{11}E_0^2 \\ \tilde{H}_{12} = H_{12} + S_{00}D_{10}^1 + S_{01}D_{10}^2 + S_{10}D_{00}^1 + S_{11}D_{00}^2 + T_{00}E_1^1 + T_{01}E_1^2$$

さて今 ± 1 -モードが臨界であるとしているので $\mu_1 = i\omega_1 \neq 0$ なので、 $\bar{\mu}_1 - \mu_1 = -2i\omega_1$ で従って上に現れた4つの行列はすべて正則である。よって、適当な標準形変換の未知係数をとれば2次項がすべて消去されることがわかる。その結果その影響が $\tilde{H}$ を通して反映される。さらに同様の3次の標準形変換を行うことにより $z_1|z_1|^2, z_1|z_{-1}|^2$ 以外のすべての3次の項も消去することができる。この影響は $O(\delta^4)$ に出るので3次のダイナミクスを得るためには無視して構わない。こうして $g_{11} = -\tilde{H}_{11}, g_{12} = -\tilde{H}_{12}$ とすれば中心多様体上の方程式は二つの臨界モード $z_{\pm 1}$ を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mu_1 z_1 - z_1(g_{11}|z_1|^2 + g_{12}|z_{-1}|^2) + O(4) \\ \dot{z}_{-1} &= \mu_1 z_{-1} - z_{-1}(g_{12}|z_1|^2 + g_{11}|z_{-1}|^2) + O(4) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、(3.1) を振幅と偏角の式に分ければ3次項の係数が重要な意味を持つことが直ちにわかる。すなわち $\Re g_{11}, \Re g_{12}$ 共に正としたとき、 $\Re g_{11} < \Re g_{12}$ ならば (3.1) で単一モードが安定で、逆に $\Re g_{11} > \Re g_{12}$ ならば (3.1) で複合モードが安定になる。前者が RW が安定な場合で、後者が SW が安定な場合である。 $\Re g_{11}, \Re g_{12}$ が共に負の場合は3次の truncated dynamics では分岐が亜臨界になり安定な解が得られないことを注意しておく。また $\Re g_{11}, \Re g_{12}$ が異符号の場合は $|\Re g_{11}| > |\Re g_{12}|$ のときのみ安定な複合波すなわち SW が存在することが簡単な考察でわかる。こうして、与えられた方程式ごとに ± 1 モードの退化 Hopf 分岐の分岐解析をすることができて、RW, SW の安定性を定めることができる。始めにあげた数値計算例はこのようにしてパラメーター探索したものである。まとめると以下のように書き表せる。

定理 3.1 定理 2.2 と同じ設定の下で、中心多様体上の方程式 (2.9) の係数は $g_{11} = -\tilde{H}_{11}, g_{12} = -\tilde{H}_{12}$ である。ただし $\{S_{jk}, T_{jk}; 0 \leq j, k \leq 1\}$ は $\tilde{F}_{jk} = \tilde{G}_{jk} = 0, 0 \leq j, k \leq 1$ の解とする。さ

らに $\Re g_{11} > 0$ かつ $\Re g_{12} > 0$ であれば RW, SW に対応する不変トラスが超臨界に分岐する。その際、 $\Re g_{11} < \Re g_{12}$ であれば RW に、 $\Re g_{11} > \Re g_{12}$ ならば SW に対応する不変トラスが安定である。また $\Re g_{11}, \Re g_{12}$ が異符号のときは $|\Re g_{11}| > |\Re g_{12}|$ のときのみ安定な不変トラスが存在しそれは SW に対応する不変トラスである。

4 discussion

前節では $g_{11} = -\tilde{H}_{11}, g_{12} = -\tilde{H}_{12}$ という計算手順を与えただけであるが、実際これで、与えられた方程式に対して3次の標準形を求めることができる。一般の公式の形で書くのは煩雑だしあまり意味がないので省くが、上の手順から明らかなように、 $g_{11} = -\tilde{H}_{11}, g_{12} = -\tilde{H}_{12}$ への影響を3次の項からくる部分と2次の項からくる部分と独立に計算してそれぞれ加えればいいことがわかる。さて、方程式が3次の非線形性のみ持つ場合、 $c_3 > 0$ とすると、 $2H_{11} = H_{12} < 0$ であることがわかる。(Appendix 参照。) 従って3次項のみのときは RW が安定に現れる。2次の項の中で SW の安定性に寄与するものを見つけよう。すべての組み合わせは試していないが、次のように6個の2次の項それぞれ単独ではどのような寄与をするか g_{11}, g_{12} を s を変えながら計算して考察した。なお、 $L = 2\pi, p = 2(= 1 + (D_1 + D_2)k_0^2), q = 1.5, D_1 = 0.8, D_2 = 0.2, c_3 = 0$ とした。

1. a_1 のみ非零で $a_1 = 1$ のとき： $\Re g_{11} < 0, \Re g_{12} < 0$ したがって分岐が亜臨界。
2. b_1 のみ非零で $b_1 = 1$ のとき： $1.06 \dots < s < 2.5 \dots$ のときは $\Re g_{11}, \Re g_{12}$ が異符号で $|\Re g_{11}| > |\Re g_{12}|$ 。それ以外のときは $\Re g_{11} < 0, \Re g_{12} < 0$ したがって分岐が亜臨界。
3. c_1 のみ非零で $c_1 = 1$ のとき： $\Re g_{11} > 0, \Re g_{12} > 0$ したがって分岐が超臨界。さらに $s < 1.411 \dots$ のとき $\Re g_{11} > \Re g_{12}$ 。
4. a_2 のみ非零で $a_2 = 1$ のとき： $\Re g_{11} > 0, \Re g_{12} > 0$ したがって分岐が超臨界。さらに $s < 1.411 \dots$ のとき $\Re g_{11} > \Re g_{12}$ 。
5. b_2 のみ非零で $b_2 = 1$ のとき： $\Re g_{11} > 0, \Re g_{12} > 0$ したがって分岐が超臨界。さらに $s < 2.59 \dots$ のとき $\Re g_{11} > \Re g_{12}$ 。
6. c_2 のみ非零で $c_2 = 1$ のとき： s により $\Re g_{11} < 0, \Re g_{12} < 0$ の場合と異符号のときがあるが、異符号のときでも $|\Re g_{11}| < |\Re g_{12}|$ したがって常に分岐が亜臨界。

こうして、2,3,4,5の場合で s を比較的小さく取ると、仮に3次項が共存しても SW が安定になることがわかる。またいずれの場合も s を大きくすると、 $\Re g_{11} < \Re g_{12}$ と RW が安定に転じるようであるが、これは本当ならば証明を要することであろう。いずれにせよ、与えられたパラメータ値で標準形が厳密に計算できるようにはなったが、依然多くの重要な問題が残されているように思われる。

ここでは、仮定2.1の下で、 ± 1 -モードのみが臨界の場合の標準形計算手順を扱ったが、 $0, \pm 1$ -モードの3重の退化 Hopf 点のまわりの標準形計算手順もほぼ同様である。ただし、今度は0-モードの式も A_0 を実標準形に変換して臨界モードとして扱う。2-モードだけが協調モードになることに注意して計算を行えば良い。その際、定理1.1に仮定した条件： $\omega_0 \neq 0, \omega_1 \neq 0, \omega_0 \pm 2\omega_1 \neq 0$ が必要になる。

この計算はまだバグ取りの段階なので、対応しそうな数値計算結果のみ以下図3に示す。これは、 $0, +1, -1$ の三つのモードが複合した安定な複合定在波であると考えられる。

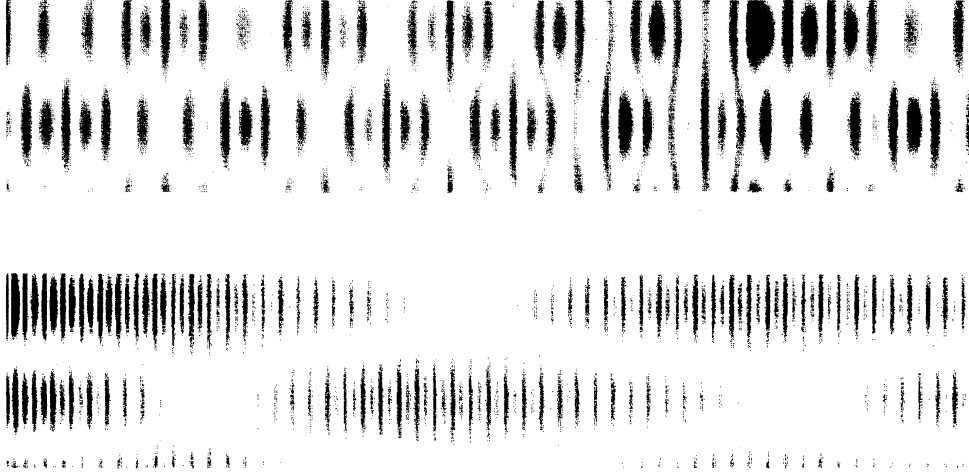


図 3: 方程式 (1.1) のシミュレーション結果. 縦軸が空間方向, 横軸が時間. 境界条件は周期的. 上は $L = 2\pi, p = 2.01, q = 1.5, s = 1.005, D_1 = 0.7, D_2 = 0.3, a_1 = b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0, a_2 = 1, c_3 = 0.3$. 下は $L = 2\pi, p = 2.005, q = 1.5, s = 1.06, D_1 = 0.999, D_2 = 0.001, a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0, a_2 = 1, b_2 = 0.3, c_3 = 0.3$. 下図でのパラメーターは A_0, A_1 の固有値の虚部の大きさが近くなるように工夫した.

5 Appendix

標準形の係数の計算に用いる定数を以下に記す. なお, 以下に現れる t_{ij}, t'_{ij} は行列の成分: $T_1 = (t_{ij}), T_1^{-1} = (t'_{ij})$ を表すものとする.

$$\begin{aligned}
 F_{00} &= (a_1 t_{11} + a_2 t_{12})(t'_{11} - it'_{12}) + (b_1 t_{11} + b_2 t_{12})(t'_{21} - it'_{22}) \\
 &\quad + i\{(a_1 t_{21} + a_2 t_{22})(t'_{11} - it'_{12}) + (b_1 t_{21} + b_2 t_{22})(t'_{21} - it'_{22})\}, \\
 F_{01} &= (b_1 t_{11} + b_2 t_{12})(t'_{11} - it'_{12}) + (c_1 t_{11} + c_2 t_{12})(t'_{21} - it'_{22}) \\
 &\quad + i\{(b_1 t_{21} + b_2 t_{22})(t'_{11} - it'_{12}) + (c_1 t_{21} + c_2 t_{22})(t'_{21} - it'_{22})\}, \\
 F_{10} &= (a_1 t_{11} + a_2 t_{12})(t'_{11} + it'_{12}) + (b_1 t_{11} + b_2 t_{12})(t'_{21} + it'_{22}) \\
 &\quad + i\{(a_1 t_{21} + a_2 t_{22})(t'_{11} + it'_{12}) + (b_1 t_{21} + b_2 t_{22})(t'_{21} + it'_{22})\}, \\
 F_{11} &= (b_1 t_{11} + b_2 t_{12})(t'_{11} + it'_{12}) + (c_1 t_{11} + c_2 t_{12})(t'_{21} + it'_{22}) \\
 &\quad + i\{(b_1 t_{21} + b_2 t_{22})(t'_{11} + it'_{12}) + (c_1 t_{21} + c_2 t_{22})(t'_{21} + it'_{22})\}, \\
 G_{00} &= F_{00}, \\
 G_{01} &= F_{01}, \\
 G_{10} &= F_{10}, \\
 G_{11} &= F_{11}, \\
 D_{00}^1 &= a_1(t'_{11} - it'_{12})^2/2 + b_1(t'_{11} - it'_{12})(t'_{21} - it'_{22}) + c_1(t'_{21} - it'_{22})^2/2, \\
 D_{11}^1 &= a_1(t'_{11} + it'_{12})^2/2 + b_1(t'_{11} + it'_{12})(t'_{21} + it'_{22}) + c_1(t'_{21} + it'_{22})^2/2, \\
 D_{01}^1 &= a_1(t'_{11}^2 + t'_{12}^2)/2 + b_1(t'_{11}t'_{21} + t'_{12}t'_{22}) + c_1(t'_{21}^2 + t'_{22}^2)/2, \\
 D_{10}^1 &= D_{01}^1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_0^1 &= a_1(t'_{11} - it'_{12})^2/4 + b_1(t'_{11} - it'_{12})(t'_{21} - it'_{22})/2 + c_1(t'_{21} - it'_{22})^2/4, \\
E_2^1 &= a_1(t'_{11} + it'_{12})^2/4 + b_1(t'_{11} + it'_{12})(t'_{21} + it'_{22})/2 + c_1(t'_{21} + it'_{22})^2/4, \\
E_1^1 &= a_1(t'_{11}{}^2 + t'_{12}{}^2)/4 + b_1(t'_{11}t'_{21} + t'_{12}t'_{22})/2 + c_1(t'_{21}{}^2 + t'_{22}{}^2)/4,
\end{aligned}$$

D_{lm}^2, E_l^2 は D_{lm}^1, E_l^1 のそれぞれ a_1, b_1, c_1 を a_2, b_2, c_2 に替えたものに等しい.

$$H_{11} = -\frac{3}{8}(t_{11} + it_{21})(t'_{11} - it'_{12})(t'_{11}{}^2 + t'_{12}{}^2),$$

$$H_{12} = -\frac{6}{8}(t_{11} + it_{21})(t'_{11} - it'_{12})(t'_{11}{}^2 + t'_{12}{}^2).$$

参考文献

- [1] J.CHRISTOPH AND M.EISWIRTH, *Theory of electrochemical pattern formation*, Chaos (AIP), 12(1), 2002, 215-230.
- [2] S.FUKUSHIMA, S.NAKANISHI, K.FUKAMI, S.SAKAI, T.NAGAI, T.TADA AND Y.NAKATO, *Observation of synchronized spatiotemporal reaction waves in coupled electrochemical oscillations of an NDR type*, Electrochemistry Communications 7, 2005, 411-415.
- [3] Y.A.KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer Applied Mathematical Sciences 112, 1998.
- [4] T.OGAWA, 電気化学系の時空パターンー *Global* 抑制効果をもつ興奮場反応拡散方程式系の *wave train* ー, 数理解析研究所講究録, 2005
- [5] F.PLENGE, Y.-J. LI AND K.KRISCHER, *Spatial bifurcations in the generic N-NDR electrochemical oscillator with negative global coupling: Theory and surface plasmon experiments*, J. Phys. Chem. B, 108(38), 2004.