

# 乱流での縦と横の構造関数の局所的 ESS による解析

中大理工物理

中野 徹 (Tohru Nakano)

中大理工物理

深山大元 (Daigen Fukayama)

中大理工物理

Alexander Bershadskii

Department of Physics, Chuo University

名工大生産システム 後藤俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

Department of Systems Engineering, Nagoya Institute of Technology

乱流での揺らぎの統計的性質のスケール依存性を調べるために、最もよく用いられてきたのが縦速度差のモーメントであった。その理由は、実験においても、テイラーの凍結仮説を用いることにより、1点での流れ方向の速度の時系列データが空間列データに近似的に読み替えられるからである。しかし最近実験でも横速度が測定できるようになり、横速度差の構造関数を求めることが可能になりだした。そのような雰囲気の中で、縦と横の構造関数のスケーリングに違いがあるのか、それともないのかとの疑問が問題になってきた。この問題はまだ決着していない。スケーリングが同じという主張もあれば [1]、違うとの主張もある [2]。

2次と3次の構造関数は非圧縮条件を通じて、縦と横は関係付けられているので、スケーリングは同じである。しかし4次以上になると、縦と横の構造関数の間には、単純な関係はない。本講演では、シミュレートされた強制乱流の縦と横の構造関数の ESS スケーリング指数の間には、どのような違いがあるのかを調べた結果を報告する。

まず結果をまとめておく。(1) 縦速度差の絶対値  $u_r$  と横速度差の絶対値  $v_r$  の  $p$  次モーメントでもって、縦と横の構造関数  $S_p^{(L)}(r)$ ,  $S_p^{(T)}(r)$  を定義し、これらより ESS スケーリング指数  $\zeta_p^{(L)}(r)$  と  $\zeta_p^{(T)}(r)$  を計算する。(2)  $\zeta_p^{(L)}(r)$  が、 $u_r$  が対数正規分布 (lognormal distribution, LD と呼ぶ) に従うとして求められた公式

$$\zeta_p^{(L)}(r) = \frac{p}{3} - \frac{\mu(r)}{18} p(p-3) \quad (1)$$

をよく満たすのに対して、 $\zeta_p^{(T)}(r)$  はその公式を満たさないことを示す。(3)  $v_r$  の確率密度分布が、対数正規分布より一般的な引き伸ばされた対数正規分布に従うと仮定すれば、 $\zeta_p^{(T)}(r)$  の振舞いが、公式

$$\zeta_p^{(T)}(r) = \frac{p}{3} - \frac{\nu(r)}{18} p(p^{\alpha(r)} - 3^{\alpha(r)}) \quad (2)$$

でうまく説明できる。ここで  $\alpha(r)$  は  $r$  に依存するパラメータである。

## §1. 乱流の縦構造関数の ESS スケーリング指数

シミュレーションは理研と名大のスーパーコンピュータを用いて行われた。乱流は外部からランダムな力を加え続ける強制乱流であり、メッシュ数は  $256^3$  から  $1024^3$  まで、

マイクロレイノルズ数  $R_\lambda$  は 69 から 459 までの値を取る。最大レイノルズ数 459 は実験室のレイノルズ数とそれほど遜色ない。シミュレーション詳細は参考文献 [3] を見て欲しい。

乱流が統計的に等方的であることを確かめるために、等方的乱流が満たさなければならない 2 次と 3 次の縦と横の構造関数の関係式をチェックした。さらに等方的乱流が満たさなければならない 3 次構造関数に対する Karman-Howarth-Kolmogorov の関係式も確かめた [4]。

まず  $r$  だけ離れた 2 点の縦速度差の絶対値  $u_r$  の  $p$  次モーメント  $S_p^{(L)}(r)$  を計算する。出来るだけ長時間に渡っての平均値を求めなければならない。計算された  $S_p^{(L)}(r)$  を用いて、局所的な ESS 勾配 [5] を計算する：

$$\zeta_p^{(L)}(r) = \frac{\partial \ln S_p^{(L)}(r)}{\partial \ln S_3^{(L)}(r)}. \quad (3)$$

$\zeta_p^{(L)}(r)$  を  $r$  に対してプロットすると、図 1 のようになる。

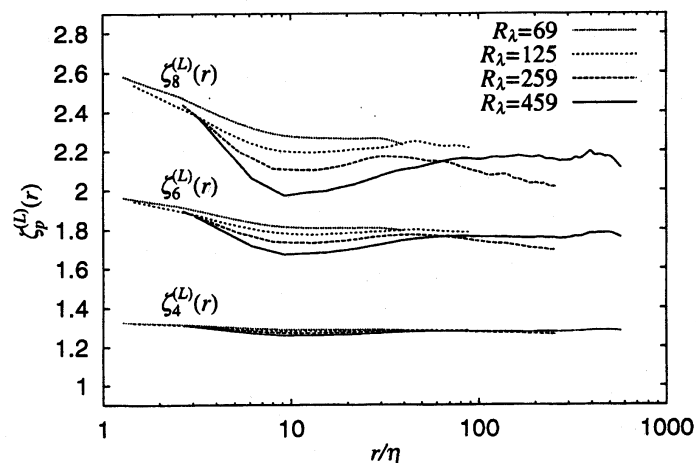


図 1

図 1 から引き出せるポイントは次のようにまとめられる [6]。

- ある値より大きなレイノルズ数では、 $\zeta_p(r)$  には  $r = 14\eta$  付近に極小値があり、その位置はレイノルズ数によらない。すなわちこのあたりのスケールでは、乱流の散逸構造は非常に間欠的で、その性質はレイノルズ数と共に強くなる。
- レイノルズ数が 459 の場合は、 $100 \leq r/\eta \leq 300$  にスケーリング指数が平坦な領域が見いだされる。 $R_\lambda = 69$  でも  $10 \leq r/\eta \leq 30$  に平坦な領域が見られるが、この領域はレイノルズ数の増加と共に消滅するので、普遍的な領域と考えられない。

## §2. 対数正規分布に基づいた縦構造関数のスケーリング指数

次に  $\zeta_p^{(L)}(r)$  の  $p$  依存性について注目しよう。その依存性を説明するモデルとして、沢山のモデルが過去に考えられた。代表的なものとしては、対数正規、 $\beta$ -モデル、 $p$ -モデル、対数ポアソン等がある。そのいずれも  $\zeta_p^{(L)}(r)$  の慣性領域での平均的なスケーリング指数（したがって以後これを大域的な指数と呼ぶ）に対して定義されている。しかしここでは、 $r$  を固定した局所的な指数  $\zeta_p^{(L)}(r)$  がどのような  $p$  依存性を持つかに注意を払う。局所的指数の特徴は大域的指数にも反映されるのに対して、反対は必ずしも成り立たないから、局所的指数の特徴の方がより一般的である。

$u_r$  の分布が対数正規分布

$$P(u_r) = \frac{u_r^{-1}}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2}} \exp\left(-\frac{(\ln u_r - a)^2}{2\sigma_r^2}\right) \quad (4)$$

に従えば、

$$\langle u_r^p \rangle \sim \langle u_r^3 \rangle^{p/3+b(r)p(p-3)} \quad (5)$$

の関係が満たされることは容易に示される [7]。ここで  $b(r)$  は任意の関数である。これより  $b(r) = -\mu(r)/18$  と置き換えれば、ESS スケーリング指数は (1) と表される。

シミュレートされた乱流の ESS スケーリング指数が、(1) を満たすかどうかを調べるために、(1) を

$$\frac{\zeta_p^{(L)}(r)}{p} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu(r)}{6}\right) - \frac{\mu(r)}{18}p \quad (6)$$

と書き変える。すなわち  $\zeta_p^{(L)}(r)/p$  対  $p$  のプロットは直線になるはずである。

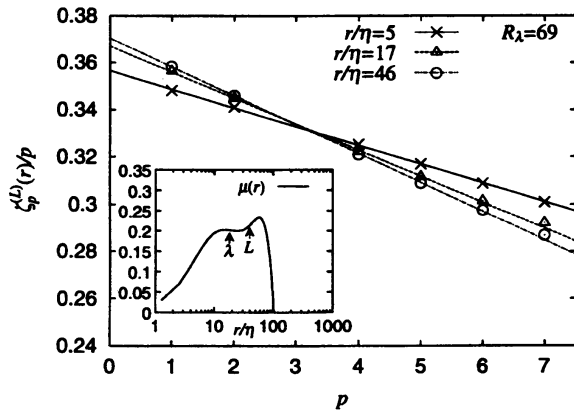


図 2

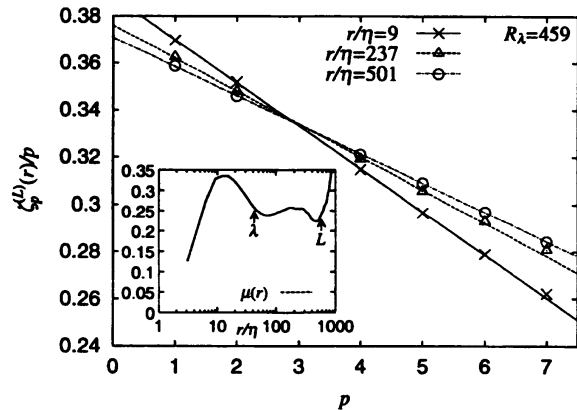


図 3

種々のレイノルズ数に対して、 $r$  を変えながら  $\zeta_p^{(L)}(r)/p$  を  $p$  に対してプロットした。その結果は、散逸領域から慣性領域、それにエネルギー保持領域までの殆ど全てのスケールで、 $1 \leq p \leq 6$  の範囲で  $\zeta_p^{(L)}(r)/p$  は  $p$  に対する直線性を示した。その勾配と切片から

間欠指数  $\mu(r)$  を  $r$  の関数として求められる。図2と図3は  $R_\lambda = 69$  と  $R_\lambda = 459$  の場合の  $\zeta_p^{(L)}(r)/p$  プロットと  $\mu(r)$  の振舞いである。

$\mu(r)$  の振舞いを要約すると次の通りである。(1)  $\mu(r)$  は2個の極大値を持つ。(2) 小さなスケールでのピークは  $r/\eta = 14$  の所にあり、この位置  $l_1$  はレイノルズ数によらない。(3)  $\mu(l_1)$  の値は  $R_\lambda$  と共に、 $\mu(l_1) \sim R_\lambda^{0.26}$  のようにスケールする。(4) テイラーのマイクロスケール  $\lambda$  は、 $l_1$  でのピークの右下がりの傾斜に位置している。(5)  $R_\lambda = 459$  の場合のみ、 $100 \lesssim r/\eta \lesssim 300$  に  $\mu(r)$  の一定の領域があり、その一定値 0.25 は慣性領域での乱流の間欠指数として知られている値 [8] と一致する。

上で導かれた結果は、最近明らかになりつつある発達した乱流の描像「発達した乱流では、渦管が局所的に分布しており、渦管の半径はレイノルズ数によらず、ほぼ  $10\eta$  である [9]。また渦管の間の平均距離は、 $\lambda$  とほぼ同じである [10]」と矛盾しない。 $\lambda$  より大きなスケールで乱流を眺めると、渦構造に伴う散逸構造は個別に見えずに、全体として散逸の強い所と、弱い所が分布している。一方  $\lambda$  より小さなスケールで乱流を見れば、個々の渦管が見えて、構造関数はそれらから直接的な影響を受ける。

### §3. 横構造関数の ESS スケーリング指数

縦構造関数と同じように、横構造関数の ESS スケーリング指数が

$$\zeta_p^{(T)}(r) = \frac{\partial \ln S_p^{(T)}(r)}{\partial \ln S_3^{(T)}(r)} \quad (7)$$

より求められる。直ぐに浮かぶ疑問は、 $\zeta_p^{(T)}(r)$  も  $\zeta_p^{(L)}(r)$  と同じ振舞いをするかどうかである。それを確かめるために、 $\zeta_p^{(T)}(r)/p$  を  $p$  に対してプロットする。 $R_\lambda = 459$  に対する結果が図4に示される。慣性領域のスケール  $r/\eta = 237$  では、対数正規分布の公式をよく満たすが、それ以外のスケールでは対数正規分布の公式を満たさない。この傾向は他のレイノルズ数でも見られる。

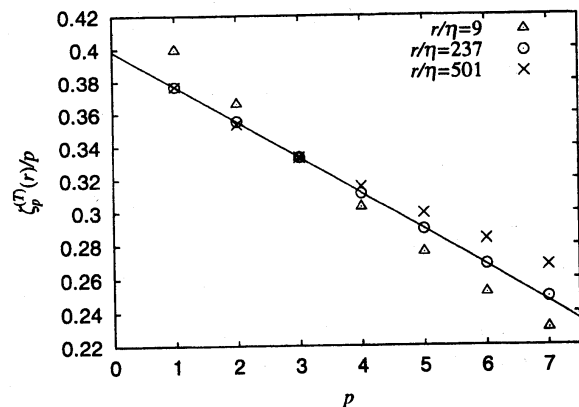


図 4

### §4. 引き伸ばされた対数正規分布

通常の空間でのブラウン運動の変位の分布は、中央極限定理によりガウシアンとなるが、フラクタル空間でのブラウン運動の変位の分布は、

$$P(x) \sim \exp\left(-\frac{|x|^{2d}}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

となると Bershadskii [11] は主張する。ここで  $d$  は branching dimension と呼ばれ、 $d = 1$  はガウス分布に帰着する。この議論を用いれば、対数正規分布は

$$P(v_r) \sim \frac{1}{v_r} \exp\left(-\frac{|\ln v_r - a|^{2d}}{2\sigma^2}\right) \quad (9)$$

に拡張されるはずだ。この分布による  $v_r$  の  $p$  次モーメントの計算は厳密には出来ないが、最急降下法によりその値を評価できる。詳しいことは他に譲ることにして [12]、結果だけを書くと、ESS スケーリング指数は

$$\zeta_p^{(T)}(r) = \frac{p}{3} - \frac{\nu(r)}{18} p(p^\alpha - 3^\alpha). \quad (10)$$

ここで

$$\alpha = \frac{1}{2d-1} \quad (11)$$

である。今回は、パラメータは2個である。すなわち  $\alpha(r)$  を上手く選んで、 $\zeta_p^{(T)}(r)/p$  を  $p^{\alpha(r)}$  に対してプロットすれば、やはりデータ点は直線に乗るはずである。

図5は、 $R_\lambda = 459$  のシミュレーションのそのようなプロットである。例えば、 $r/\eta = 9$  では、 $\alpha = 0.782$  と選べば、直線に乗る。

種々のレイノルズ数に対して、 $\alpha$  を  $r$  の関数として計算された結果を図6に示す。 $r/\eta \sim 20$  位では、 $\alpha$  は1より少し小さく、0.8 程の値を取る。しかし  $r$  が大きくなると、 $\alpha$  は1に近くなる。すなわち分布は対数正規分布である。

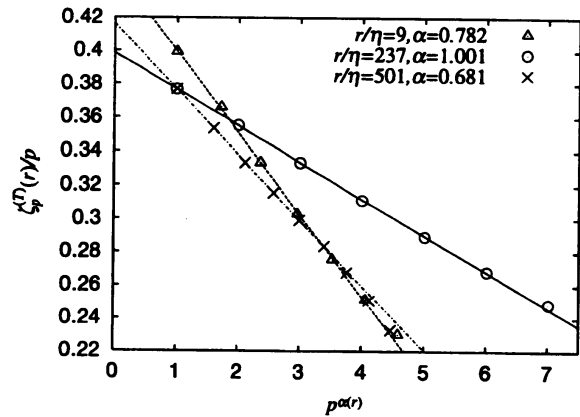


図 5

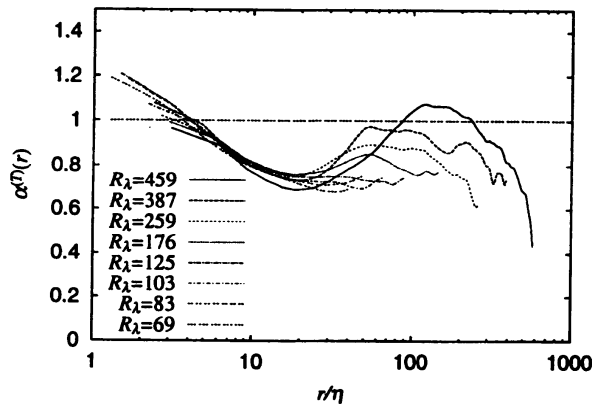


図 6

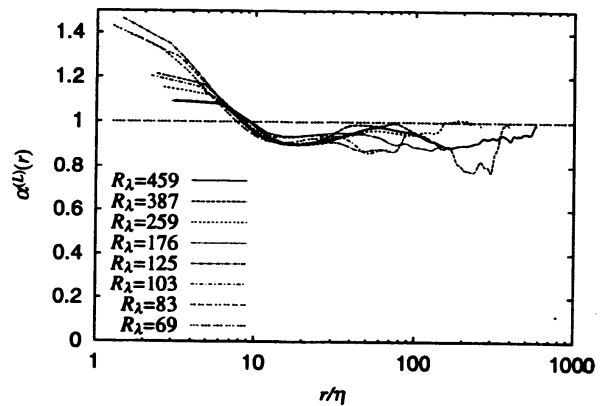


図 7

$\zeta_p^{(T)}(r)$  に対して、(10) のプロットが有効なら、 $\zeta_p^{(L)}(r)$  に対して同様のプロットが出来るはずである。そのようにして得られた  $\alpha$  の振舞いが図7に示される。明らかに、縦

速度差に対する  $\alpha$  は、横速度差に対するものより 1 に近く、縦速度差の分布を対数正規分布 ( $\alpha = 1$ ) と最初に仮定したと矛盾しない。

## §5. 対数正規並びに引き伸ばされた対数正規分布の正当化

我々が示したことは、殆ど 全てのスケール に対して、 $u_r$  の分布は中間ぐらいの振幅領域で、対数正規或いは、引き伸ばされた対数正規分布に従うことである。従来からよく喧伝される対数正規分布の根拠は、「スケール  $r$  の空間的拡がりの中で平均された散逸率  $\varepsilon_r$  は、 $\varepsilon_r = \varepsilon_L a_1 a_2 \cdots a_n$  ( $a_i = \varepsilon_{L/2^i} / \varepsilon_{L/2^{i-1}}$ ,  $r = L/2^n$ ) のように書けるから、 $\ln \varepsilon_r = \ln \varepsilon_L + \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n$  となる。もし  $\ln a_i$  が独立なランダムな量であり、慣性領域が無限に長ければ中央極限定理が成り立ち、 $\ln \varepsilon_r$  は正規分布に従うことが期待される」というものである。このために必要な条件は、(1)  $\ln a_i$  が  $i$  に依らない、(2) 沢山の  $i$  について和を取る、である。しかしこのような条件は実際の乱流で満たされる可能性は小さい。条件 (2) が満たされるレイノルズ数を評価しよう。最も緩い条件を導くために、 $r = \eta$  としよう。 $L/\eta \sim R_\lambda^{3/4} \sim R_\lambda^{3/2}$  であるから、 $\ln a$  の総数  $N$  は  $(3/2) \log_2 R_\lambda$  の大きさである。最もレイノルズ数が多い ( $R_\lambda \approx 10^4$ ) 大気乱流でも、 $N = 20$  である。 $r \sim 100\eta$  をとれば、 $N = 13$  である。そのうえ、和に寄与する領域はエネルギー領域に近いから、 $\ln a_i$  が  $i$  によらない領域の拡がりは一層限定される。このような理由でよく引用される対数正規分布の根拠は薄弱である。

以下で、対数正規分布を正当化する根拠について述べる。2 点  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  での速度差の  $i$  成分  $w_i$  は、方程式

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + V_k(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial X_k} \right) w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) = -w_k(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial X_i} \delta p(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) + \nu \left( \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{X} + 2 \nabla^2 \mathbf{r} \right) w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t), \quad (12)$$

により記述される。ここで  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  である。 $\delta p$  は 2 点間の圧力差である。また  $\mathbf{V}$  は  $(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1)/2$  で定義された平均速度である。この方程式の中で最も重要な項は、右辺の第 1 項である。その項だけを残すと、

$$\frac{\partial w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} = -S_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) w_k(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) \quad (13)$$

である。ここで  $S_{ik}$  は

$$S_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) = \frac{\partial w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)}{\partial r_k} = \frac{\partial V_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)}{\partial X_k} \quad (14)$$

で定義された平均速度場の勾配である。 $S_{ik}$  が対角化された座標系に移ると、

$$\frac{\partial w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} = -a_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) \quad (15)$$

となるが、 $\ln w_i = Y_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)$  と置けば、

$$\frac{\partial Y_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} = -a_i(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) \quad (16)$$

となり、 $a_i$  が相関時間ゼロのランダムな変数であれば、 $Y_i(\mathbf{X}, \mathbf{r})$  はランダムな量の和で表され、 $Y_i$  の分布はガウシアンになる。もし  $a_i$  がフラクタル的な性質を持てば、 $Y_i$  の分布は引き伸ばされたガウシアンになることが期待される。縦成分と、横成分で分布が異なる理由は、 $i = 1$  と、 $i = 2, 3$  では  $a_i$  の分布が異なるためと考えればよい。

最後に圧力の寄与を考えよう。圧力勾配は、 $w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r})$  の振幅の小さな領域では、外の空間から揺らぎを流入させ、 $w_i(\mathbf{X}, \mathbf{r})$  の振幅の大きな領域では、外へ流出させる働きをするであろう。したがって、振幅の小さな領域と、振幅の大きな領域では圧力の寄与が重要となり、(13) が成り立たないのであろう。

## 参考文献

- [1] R. Camussi, D. Barbagallo, G. Guj and F. Stella: Phys. Fluids **8**, 1181 (1996), A. Noullez, G. Wallace, W. Lempert, R.B. Miles and U. Frisch: J. Fluid. Mech. **339**, 287 (1997).
- [2] R. Camussi and R. Benzi Phys. Fluids **9**, 257 (1997), S. Chen, K.R. Sreenivasan, M. Nelkin and N. Cao: Phys. Rev. Lett **79**, 2253 (1997), B. Dhruva, Y. Tsuji and K.R. Sreenivasan: Phys. Rev. E **56**, R4928 (1997).
- [3] 深山大元:「3次元乱流の間欠性—構造関数の解析—」、博士論文(2001)。入り用の方は daigen@phys.chuo-u.ac.jp に請求下さい。
- [4] D. Fukayama, T. Oyamada, T. Nakano, T. Gotoh and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 701 (2000).
- [5] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccion, C. Beudet, F. Massaioli and S. Succi: Phys. Rev. E **48**, R29 (1993).
- [6] D. Fukayama, T. Nakano, A. Bershadskii and T. Gotoh: in preparation (nlin/0006037)
- [7] A. Bershadskii, T. Nakano, D. Fukayama and T. Gotoh: Eur. Phys. J. B **18**, 95 (2000).
- [8] K.R. Sreenivasan and P. Kailasnath: Phys. Fluids A **5**, 512 (1993).
- [9] J. Jimenez and A.A. Wray: J. Fluid Mech. **373**, 255 (1998).
- [10] S. Kishiba, K. Ohkitani and S. Kida: J. Phys. Soc. Japan **62**, 3783 (1993).
- [11] A. Bershadskii: Europhys. Lett. **39**, 587 (1997).
- [12] T. Nakano, D. Fukayama, A. Bershadskii and T. Gotoh: in preparation.