

K_0 and K_1 -groups of C^ -algebras associated with skew product transformations*

山形大理 河村新蔵 (Shinzô Kawamura)

本稿の目的は T^2 上の skew product transformation

$$(x, y) \longrightarrow (x + \theta, y + nx)$$

に付随して決まる C^* -接合積の分類について述べることである。分類の道具として K_0 -群と K_1 -群を用いる。ここに紹介する内容は、昭和 58 年 5 月に綿谷氏 (大阪教育大) よりいただいた私信を基に、市原氏 (大阪大学) と小高氏 (慶応大学) の計算を加えて完全にしたものである。本研究会の時点においては、問題の C^* -環の分類はできていなかったわけであるが、それ以後、最近の情報によれば、この問題について、Packer [6] や Ronghui [8] によって完全な解決がなされたようである。この事については第 2 章で述べておく。

筆者は武元氏との共著 [3] において、ヒルベルト空間上の推移作用素の族から生成される C^* -環の研究を行ってきた。

skew product transformation に付随する C^* -環はこのクラ

スの C^* -環であり、このクラスの他の C^* -環との関連についても興味あるところである。このことについても最後に述べておく。

§1. $T^2 = [0, 1) \times [0, 1)$ 上の skew product transformation を、 $\sigma : (x, y) \rightarrow (x + \theta, y + nx)$ で表わす。ここで θ は $(0, 1)$ 区間内の無理数である。 ^{n は整数} $C(T^2)$ を T^2 上の連続関数全体とする。 T^2 の写像 σ によって導かれる $C(T^2)$ 上の $*$ -自己同型写像も σ で表わす。則ち

$$\sigma(f)(x, y) = f(x + \theta, y + nx), \quad f \in C(T^2)$$

である。 $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ の $C(T^2)$ の $*$ -自己同型写像としての表現であり、 $C(T^2)$ との接合積を $A_{\theta, n}$ で表わす。

$$A_{\theta, n} = C(T^2) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}.$$

$A_{\theta, n}$ の K -群を計算するわけであるが、このために次の Pimsner-Voiculescu [7] の六項完全系列を用いる。

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(T^2)) & \xrightarrow{id_*^{(0)} - \sigma_*^{(0)}} & K_0(C(T^2)) & \xrightarrow{i_*^{(0)}} & K_0(A_{\theta, n}) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_2 \\ K_1(A_{\theta, n}) & \xleftarrow{i_*^{(1)}} & K_1(C(T^2)) & \xleftarrow{id_*^{(1)} - \sigma_*^{(1)}} & K_1(C(T^2)) \end{array}$$

ここで図の説明をしておこう。 C^* -環 A に対し、 $K_0(A)$ は $\bigcup_{m=1}^{\infty} A \otimes M_m$ (M_m は $m \times m$ 行列全体) の射影子 P, Q の同

値類の差 $[P] - [Q]$ として表わされ、 $K_1(A)$ は $\bigcup_{m=1}^{\infty} A \otimes M_m$ の中のユニタリ元 $u \in A \otimes M_m$ の $1 \in A \otimes M_m$ の connected component による同値類 $[u]$ によって表わされる。 C^* -環 A から B に対し写像 α が与えられた時、 $A \otimes M_n$ から $B \otimes M_n$ に $(a_{ij}) \in A \otimes M_m \rightarrow (\alpha(a_{ij}))_{i,j} \in B \otimes M_m$ によって定義される写像があり、これにより $K_0(A) \rightarrow K_0(B)$, $K_1(A) \rightarrow K_1(B)$ の自然な写像がきまる。これを $\alpha_*^{(0)}$, $\alpha_*^{(1)}$ とする。特に $A = B = C(T^2)$, $\alpha = \sigma$ のときは、

$$\sigma_*^{(0)}([P] - [Q]) = [\tilde{\sigma}(P)] - [\tilde{\sigma}(Q)], \quad (\tilde{\sigma}(P)(x, y) = P(\sigma(x, y)))$$

$$\sigma_*^{(1)}([u]) = [\tilde{\sigma}(u)], \quad (\tilde{\sigma}(u)(x, y) = u(\sigma(x, y)))$$

となる。又、 $\alpha = id (= \text{identity map}) (A \rightarrow A)$ の時は、

$\alpha_*^{(i)} = \text{identity} (i = 1, 2)$ である。 i は $C(T^2)$ から

$A_{\theta, n} = C(T^2) \times_{\theta} \mathbb{Z}$ への自然な埋め込みである。(参[5])

定理 1.1. $K_0(A_{\theta, n}) \cong \mathbb{Z}^3 (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$

$K_1(A_{\theta, n}) \cong (\mathbb{Z}/|m|\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^3$ ($|m|$ は n の絶対値)

この定理の証明のために、次の三つの補助定理を示す。まず小高氏 [4] によって次の事が分る。

補助定理 1.2. (i) $K_0(C(T^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ であり、その生成元は

次の二つである。

$$[P_{21}] = [q_{21}]; \quad P_{21}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad q_{21} = 0.$$

$$[P_{22}] = [q_{22}];$$

$$P_{22}(x, y) = R(x) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(x)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(x) \begin{bmatrix} e^{2\pi i y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(x)^*$$

$$\text{但し } R(x) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} x & -\sin \frac{\pi}{2} x \\ \sin \frac{\pi}{2} x & \cos \frac{\pi}{2} x \end{bmatrix} \quad \text{である.}$$

$$q_{22}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(注) [4] による表現での s_1 を y , s_2 を x とした。

(2) $K_1(C(T^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ であり、その生成元は次の二つである。

$$[u_{21}]; \quad u_{21}(x, y) = e^{2\pi i x}$$

$$[u_{22}]; \quad u_{22}(x, y) = e^{2\pi i y}$$

補助定理 1.2. $\alpha: (x, y) \rightarrow (x, y + nx)$ とする。このとき、 $\text{id}_*^{(10)} - \alpha_*^{(10)} = 0$ である。

証明. $\tilde{\alpha}(P_{21})(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{21}(x, y)$. $\tilde{\alpha}(q_{21}) = 0 = q_{21}$ より、 $\alpha_*^{(10)}([P_{21}] - [q_{21}]) = [P_{21}] - [q_{21}]$ である。一方、

$$\tilde{\alpha}(P_{22})(x, y) = P_{22}(x, y + nx)$$

$$= R(x) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i(y+nx)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(x)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(x) \begin{bmatrix} e^{2\pi i(y+nx)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(x)^*$$

である。こゝで

$$P_*(x, y) = P_{22}(x, y + \pm nx)$$

とする。 $P_0 = P_{22}$, $P_1 = \sigma(P_{22})$ である。 P_t は $T^2 = [0, 1) \times [0, 1)$ 上で well-defined であることを示そう。

$$P_t(0, y) = P_{22}(0, y) = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_t(1, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2\pi i(y+nt)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i(y+nt)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故に $P_t(0, y) = P_t(1, y)$ である。

$$P_t(x, 1) = P_{22}(x, 1+ntx) = P_{22}(x, ntx) = P_t(x, 0).$$

従って P_{22} と $\alpha(P_{22})$ は homotopic となり $[\alpha(P_{22})] = [P_{22}]$ である。明らかに $\alpha(P_{22}) = P_{22}$ であるから、

$$\alpha_*^{(0)}([P_{22}] - [P_{22}]) = [P_{22}] - [P_{22}]$$

となり、 $\alpha_*^{(0)} = id$ である。 (終)

補助定理 1.3. $\alpha: (x, y) \rightarrow (x, y+nx)$ とする。このとき、 $id_*^{(1)} - \alpha_*^{(1)}$ は $\begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と表わされる。

$$\text{証明. } \alpha(u_{21})(x, y) = u_{21}(x, y+nx) = e^{2\pi i x} = u_{21}(x, y).$$

$$\alpha(u_{22})(x, y) = u_{22}(x, y+nx) = e^{2\pi i(y+nx)} = e^{2\pi i n x} e^{2\pi i y} = u_{21}(x, y)^n u_{22}(x, y).$$

$$\text{従って, } \alpha_*^{(1)}([u_{21}]) = [u_{21}]$$

$$\alpha_*^{(1)}([u_{22}]) = [u_{21}^*] \oplus [u_{22}] = n[u_{21}] \oplus [u_{22}]$$

となり、 $\alpha_*^{(1)}$ は $K_1(C(T^2)) \cong \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}[u_{21}] \oplus \mathbb{Z}[u_{22}]$ 上の行列表現として $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。則ち、

$$id_*^{(1)} - \alpha_*^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{終})$$

定理の証明. $\sigma_* : (x, y) \rightarrow (x + \pi\theta, y + nx)$ とすれば,
 $\sigma_0 = \alpha$, $\sigma_1 = \sigma$ であるから, α と σ は *homotopic* となり,
 σ の代りに α で計算して良い事になる。再び六項完全系列を眺めてみよう。補助定理を用いれば、上の系列は下図のようになる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow[\textcircled{1}]{0} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow[\textcircled{2}]{i_*^{(0)}} & K_0(A_{\theta,n}) \\ \delta_1 \uparrow \textcircled{5} & & & & \textcircled{3} \downarrow d_2 \\ K_1(A_{\theta,n}) & \xleftarrow[\textcircled{5}]{i_*^{(1)}} & \mathbb{Z}^2 & \xleftarrow[\textcircled{4}]{\begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

この系列は完全であるから, ①, ②, ③ は

$$\textcircled{1} \quad \text{Im } 0 = \text{Ker } i_*^{(0)}, \quad \textcircled{2} \quad \text{Im } i_*^{(0)} = \text{Ker } d_2, \quad \textcircled{3} \quad \text{Im } d_2 = \text{Ker } \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。従って ① より $i_*^{(0)}$ は *injective* である。又

$$\begin{aligned} \text{Ker } \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -nl \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{ (k, 0) \in \mathbb{Z}^2 \mid k \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z} \oplus 0. \end{aligned}$$

故に

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_*^{(0)}} K_0(A_{\theta,n}) \xrightarrow{d_2'} \mathbb{Z} \oplus 0 \longrightarrow 0$$

となるから, $K_0(A_{\theta,n})/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ であり $\mathbb{Z}$ は *projective* なの
 で *split* して $K_0(A_{\theta,n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}^3$ である。又 ④,
 ⑤, ⑥ は.

$$\textcircled{4} \operatorname{Im} \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} i_*^{(0)}, \textcircled{5} \operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} \delta_1, \textcircled{6} \operatorname{Im} \delta_1 = \operatorname{Ker} 0$$

となる。⑥より δ_1 は surjective である。

$$\operatorname{Im} \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mid (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -nl \\ 0 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cong m\mathbb{Z} \oplus 0$$

故に

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*^{(0)}} K_1(A_{\theta,n}) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}^2$$

となり、 $K_1(A_{\theta,n})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$ であり、 $\mathbb{Z}^2$ は projective なので、 $K_1(A_{\theta,n}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^3$ である。(終)

§2. $\sigma : (x, y) \longrightarrow (x + \theta, y + nx)$ は Furstenberg homomorphism [2] の一種で、 T^2 上 minimal かつ uniquely ergodic であることがわかっている。従って $A_{\theta,n}$ は simple で、unique trace を持つ。このとき $K_0(A_{\theta,n})$ から実数全体 $\mathbb{R}$ への写像

$$T : K_0(A_{\theta,n}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が定義される。この T は射影子 $P, q \in A_{\theta,n} \otimes M_n$ に対し、

$$T([P] - [q]) = (\mathbb{Z} \otimes \operatorname{Tr}_n)(P) - (\mathbb{Z} \otimes \operatorname{Tr}_n)(q)$$

によって決まっている。 Tr_m は M_m 上の trace で $\operatorname{Tr}(1) = m$ である。このとき Ronghui, Packer によれば、

$$T(K_0(A_{\theta,n})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

である。従って、 $K_1(A_{\theta,n}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^3$ であることを用いると、 A_{θ_1,n_1} と A_{θ_2,n_2} が C^* -同型であれば、

$\theta_1 = \theta_2$ (又は $\theta_1 = 1 - \theta_2$) かつ $|n_1| = |n_2|$ である。逆にこの条件をみたせば、 $\sigma_1: (x, y) \rightarrow (x + \theta_1, y + n_1 x)$ と

$\sigma_2: (x, y) \rightarrow (x + \theta_2, y + n_2 x)$ は *topologically conjugate* となるので、 A_{θ_1, n_1} と A_{θ_2, n_2} は C^* -同型である。即ち、

$h: (x, y) \rightarrow (-x, y)$ に対し、

$$h \sigma_1 h^{-1}: (x, y) \rightarrow (x - \theta_1, y + n_1 x)$$

であり、 $k: (x, y) \rightarrow (x, -y)$ に対し、

$$k \sigma_1 k^{-1}: (x, y) \rightarrow (x + \theta_1, y - n_1 x)$$

である。上記の事を定理として述べておこう。

定理 2.1. $A_{\theta_1, n_1} \cong A_{\theta_2, n_2}$ (C^* -同型) であることと、
 $\theta_1 = \theta_2$ (又は $\theta_1 = 1 - \theta_2$) かつ $|n_1| = |n_2|$ であることは同値。

次に離散トラス群 T_d の部分群 G に付随する C^* -環との関係を眺めてみよう。 G の双対群 Γ はコンパクト群で $\mathbb{Z}$ を部分群として稠密に含む。

$$\beta: \gamma \rightarrow \gamma + 1 \quad (\gamma \in \Gamma)$$

とすると、 β は Γ 上の *minimal, strictly ergodic transformation* であり、 $\Sigma_G = (\Gamma, \beta)$ は *topologically transitive dynamical system* である。これに対応する C^* -環 $C^*(\Sigma_G)$ は *simple* 且 *unique trace* を持つ。又、

$K_0(C^*(\Sigma_G))$ から $\mathbb{R}$ への自然な写像 T に対し

$$T(K_0(C^*(\Sigma_G))) = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i t} \in G\}$$

である ([3: Theorem 2.2])。

定理 2.2. 任意の無理数 $\theta \in [0, 1)$, 整数 n と任意の $G \subset T_d$ について $A_{\theta, n}$ と $C^*(\Sigma_G)$ は C^* -同型ではない。

これは $A_{\theta, n} \cong C^*(\Sigma_G)$ とすれば, $T(C^*(\Sigma_G)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ で, この値をとるのは $G = \{e^{2\pi i m \theta} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ に限る。このとき $K_0(C^*(\Sigma_G)) \cong \mathbb{Z}^2$ であり, $K_0(A_{\theta, n}) \cong \mathbb{Z}^3$ と矛盾するから, $A_{\theta, n} \not\cong C^*(\Sigma_G)$ である。

参考文献

- [1] T. Anzai, Ergodic skew product transformations on the torus, Osaka Math. J., 3(1951), 83-99.
- [2] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transformations of the torus, Amer. J. Math., 83(1961), 573-601.
- [3] S. Kawamura and H. Takemoto, C^* -algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan 36(1984), 279-293.

- [4] K. Kodaka (小高一則), *Toral automorphism* について, 京大数理研・講究録本号.
- [5] Y. Nakagami (中神祥臣), C^* -環と K -理論, 京大数理研・講究録 488 (1983), 1-26.
- [6] J. A. Packer, *K-theoretic invariants for C^* -algebras associated to transformations and induced flows*, (Preprint. 1984).
- [7] M. Pimsner and D. Voiculescu, *Exact sequences for K -groups and Ext -groups of certain cross-products of C^* -algebras*, *J. Operator Theory* 4 (1980), 93-118.
- [8] Ronghui, Ji, *Classification of the C^* -algebras associated with Furstenberg homomorphism on the two dimensional torus*, (Preprint. 1985).