

# MIXED EULERIAN NUMBER と PETERSON SCHUBERT CALCULUS の関係

宇部工業高等専門学校 堀口 達也

TATSUYA HORIGUCHI

NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, UBE COLLEGE

## 1. 序文

mixed Eulerian number は [15] で Postnikov により導入されたもので、カタラン数や二項係数, Eulerian number といった古典的な組合せ数を含むものである. mixed Eulerian number の組合せ的な公式は [7, 13, 15] など与えられている. 近年, mixed Eulerian number は色んな観点から研究されている ([5, 14]). 特に, [5] では  $A$  型において mixed Eulerian number の単純な計算方法を与えた. 本稿では, 任意の Lie type の mixed Eulerian number の単純な計算方法を Peterson Schubert calculus と関連付けて解説する. 本稿は [9] の結果の概説である. (本稿で扱うコホモロジーの係数は, 特に明示されていない場合は  $\mathbb{R}$  を表す.)

## 2. PERMUTOHEDRON

$n$  を正の整数とし,  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  とおく. 集合  $[n]$  上の置換群  $S_n$  は座標の入替により,  $\mathbb{R}^n$  に作用する. 点  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  を取り, 点  $a$  の  $S_n$ -軌道の点たちの convex hull を *permutohedron* といい,  $P_n(a)$  と書く.

$$P_n(a) := \text{ConvexHull}\{(a_{w(1)}, \dots, a_{w(n)}) \in \mathbb{R}^n \mid w \in S_n\}.$$

permutohedron  $P_n(a)$  は超平面  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i\}$  の中にある.  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  と仮定しても一般性を失わない.

**例 2.1.** (1)  $a = (1, 0, \dots, 0)$  とすると,  $\Rightarrow P_n(a)$  は *simplex*.

(2)  $1 \leq k \leq n-1$  に対し,  $a = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$  とおく. このとき,  $P_n(a)$  を

$\Delta_{k,n}$  と書き, *hypersimplex* と呼ぶ.

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  ( $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ) に対し,

$$u_1 = a_1 - a_2, u_2 = a_2 - a_3, \dots, u_{n-1} = a_{n-1} - a_n$$

とおく. このとき,

$$P_n(a) = u_1 \Delta_{1,n} + u_2 \Delta_{2,n} + \dots + u_{n-1} \Delta_{n-1,n}$$

と書けることが知られている. ここで, 右辺は Minkowski 和を表す. Postnikov は [15] において,  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  で  $c_1 + \dots + c_{n-1} = n-1$  を満たすものに対し, *mixed*

Eulerian number  $A_{c_1, \dots, c_{n-1}}$  を次で定義した.

$$\text{Vol}(P_n(a)) = \sum_{\substack{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1} \\ c_1 + \dots + c_{n-1} = n-1}} A_{c_1, \dots, c_{n-1}} \frac{u_1^{c_1}}{c_1!} \dots \frac{u_{n-1}^{c_{n-1}}}{c_{n-1}!}.$$

つまり, permutohedron  $P_n(a)$  の volume を  $u_1, \dots, u_{n-1}$  の多項式で表したときの単項式  $\frac{u_1^{c_1}}{c_1!} \dots \frac{u_{n-1}^{c_{n-1}}}{c_{n-1}!}$  の係数で mixed Eulerian number  $A_{c_1, \dots, c_{n-1}}$  を定義した. 言い換えると, mixed Eulerian number は hypersimplex  $\Delta_{k,n}$  たちの mixed volume に  $(n-1)!$  倍したものを表している. Postnikov は permutohedron  $P_n(a)$  の体積公式を与えた.

**定理 2.2.** ([15, Theorem 3.1])  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  を相異なる実数とする.  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  とする. このとき, permutohedron  $P_n(a)$  の体積は

$$(2.1) \quad \text{Vol}(P_n(a)) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{w \in S_n} \frac{(a_1 t_{w(1)} + \dots + a_n t_{w(n)})^{n-1}}{(t_{w(1)} - t_{w(2)})(t_{w(2)} - t_{w(3)}) \dots (t_{w(n-1)} - t_{w(n)})}$$

で与えられる. ここで, 右辺の  $t_i$  たちはキャンセルすることに注意.

(2.1) における右辺の式は Atiyah–Bott–Berline–Vergne formula の形をしている. そこで, mixed Eulerian number  $A_{c_1, \dots, c_{n-1}}$  をトポロジーの観点から調べてみようと思ったのが, [9] の motivation である.

### 3. PERMUTOHEDRAL VARIETY

旗多様体  $Fl(\mathbb{C}^n) := \{V_\bullet := (V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i, 1 \leq i \leq n\}$  の部分多様体  $X_n$  を次で定義する. 行列  $S$  を相異なる固有値を持つ対角行列

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$$

とし,

$$X_n := \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid SV_i \subset V_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}$$

と定める. このとき,  $X_n$  は  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$  とする permutohedron  $P_n(a)$  に付随する滑らかな toric 多様体であり,  $\dim_{\mathbb{C}} X_n = n-1$  である ([8]). この  $X_n$  は permutohedral variety と呼ばれている.  $B$  を一般線形群  $GL_n(\mathbb{C})$  の上三角行列全体とすると, よく知られているように自然に  $Fl(\mathbb{C}^n) \cong GL_n(\mathbb{C})/B$  と同一視される.  $GL_n(\mathbb{C})$  の中の対角行列全体を  $T$  とおくと,  $T$  は旗多様体  $Fl(\mathbb{C}^n) \cong GL_n(\mathbb{C})/B$  上に自然に作用するが, この  $T$ -作用は  $X_n$  を保つ. permutohedral variety の  $T$ -固定点集合  $X_n^T$  は旗多様体の  $T$ -固定点集合  $Fl(\mathbb{C}^n)^T$  と一致し,  $Fl(\mathbb{C}^n)^T$  は permutation flag 全体からなるため,  $X_n^T \cong S_n$  と自然に同一視される.

旗多様体  $Fl(\mathbb{C}^n)$  上の tautological vector bundles  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n$  は  $E_i := \{(V_\bullet, z) \in Fl(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C} \mid z \in V_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) により定義される. これらの商  $E_i/E_{i-1}$  を取ることで, line bundle が得られるが, この dual  $(E_i/E_{i-1})^*$  を取ったものの

$T$ -equivariant first Chern class を  $\tilde{\tau}_i \in H_T^2(Fl(\mathbb{C}^n))$ , (ordinary) first Chern class を  $\tau_i \in H^2(Fl(\mathbb{C}^n))$  とおく.  $\mathbb{C}_i$  を次で定義される  $T$  の 1 次元表現とする.

$$g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n) \in T \text{ と } z \in \mathbb{C}_i \text{ に対して, } g \cdot z = g_i z.$$

$\mathbb{C}_i$  の双対表現  $(\mathbb{C}_i)^*$  の  $T$ -equivariant first Chern class を  $t_i \in H_T^2(\text{pt})$  とおく. このとき,  $H_T^*(\text{pt}) = \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$  であり, よく知られているように旗多様体の (同変) コホモロジー環は

$$\begin{aligned} H_T^*(Fl(\mathbb{C}^n)) &\cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n] / (e_i(x) - e_i(t) \mid 1 \leq i \leq n) : x_i \mapsto \tilde{\tau}_i, t_i \mapsto t_i \\ H^*(Fl(\mathbb{C}^n)) &\cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / (e_i(x) \mid 1 \leq i \leq n) : x_i \mapsto \tau_i \end{aligned}$$

で与えられる. ここで,  $e_i$  は  $i$  次基本対称式を表す.

記号の乱用ではあるが, 制限写像  $H_T^*(Fl(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H_T^*(X_n)$  と  $H^*(Fl(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(X_n)$  による  $\tilde{\tau}_i \in H_T^2(Fl(\mathbb{C}^n))$  と  $\tau_i \in H^2(Fl(\mathbb{C}^n))$  の像をそれぞれ同じ記号  $\tilde{\tau}_i, \tau_i$  で表すことにする.  $\tilde{\tau}_i \in H_T^2(Fl(\mathbb{C}^n))$  を固定点  $w \in S_n \cong Fl(\mathbb{C}^n)^T$  に制限すると,  $\tilde{\tau}_i|_w = t_{w(i)}$  であるので, 包含写像から誘導される可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(Fl(\mathbb{C}^n)) & \xrightarrow{\text{injective}} & H_T^*(Fl(\mathbb{C}^n)^T) \cong \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n] \\ \downarrow & & \downarrow \text{identity map} \\ H_T^*(X_n) & \xrightarrow{\text{injective}} & H_T^*(X_n^T) \cong \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n] \end{array}$$

より,  $\tilde{\tau}_i \in H_T^2(X_n)$  に対しても, 固定点  $w \in S_n \cong X_n^T$  に制限すると,

$$\tilde{\tau}_i|_w = t_{w(i)}$$

が成立. Atiyah–Bott–Berline–Vergne formula [4, 6] より, equivariant Gysin map  $\text{pr}_!^T : H_T^*(X_n) \rightarrow H_T^{*-2(n-1)}(\text{pt})$  による  $(a_1 \tilde{\tau}_1 + \dots + a_n \tilde{\tau}_n)^{n-1}$  の像は次のように計算される.

$$\text{pr}_!^T((a_1 \tilde{\tau}_1 + \dots + a_n \tilde{\tau}_n)^{n-1}) = \sum_{w \in S_n} \frac{(a_1 \tilde{\tau}_1 + \dots + a_n \tilde{\tau}_n)^{n-1}|_w}{e_w}.$$

ここで,  $e_w$  は固定点  $w \in S_n \cong X_n^T$  の normal bundle の  $T$ -equivariant Euler class を表す. [8, Lemma 7] から  $e_w = (t_{w(1)} - t_{w(2)})(t_{w(2)} - t_{w(3)}) \cdots (t_{w(n-1)} - t_{w(n)})$  が分かるので, 次を得る.

(3.1)

$$\text{pr}_!^T((a_1 \tilde{\tau}_1 + \dots + a_n \tilde{\tau}_n)^{n-1}) = \sum_{w \in S_n} \frac{(a_1 t_{w(1)} + \dots + a_n t_{w(n)})^{n-1}}{(t_{w(1)} - t_{w(2)})(t_{w(2)} - t_{w(3)}) \cdots (t_{w(n-1)} - t_{w(n)})}.$$

この式の右辺は, (2.1) の右辺の式の  $(n-1)!$  倍である. 一方, (ordinary) Gysin map  $\mathrm{pr}_! : H^*(X_n) \rightarrow H^{*-2(n-1)}(\mathrm{pt})$  との可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(X_n) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_!^T} & H_T^{*-2(n-1)}(\mathrm{pt}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X_n) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_!} & H^{*-2(n-1)}(\mathrm{pt}) \end{array}$$

より,

(3.2)

$$\mathrm{pr}_!^T((a_1\tilde{\tau}_1 + \cdots + a_n\tilde{\tau}_n)^{n-1}) = \mathrm{pr}_!((a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n)^{n-1}) = \int_{X_n} (a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n)^{n-1}$$

を得る. (2.1), (3.1), (3.2) より,  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$  に対して,

$$(3.3) \quad \mathrm{Vol}(P_n(a)) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{X_n} (a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n)^{n-1}$$

が得られる. 次に  $1 \leq i \leq n-1$  に対して,  $\varpi_i := \tau_1 + \cdots + \tau_i \in H^2(X_n)$  とおくと,

(3.4)

$$\begin{aligned} a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n &= a_1\varpi_1 + a_2(\varpi_2 - \varpi_1) + \cdots + a_{n-1}(\varpi_{n-1} - \varpi_{n-2}) + a_n(-\varpi_{n-1}) \\ &= u_1\varpi_1 + \cdots + u_{n-1}\varpi_{n-1}. \end{aligned}$$

ここで, 最初の等号は  $H^*(Fl(\mathbb{C}^n))$  の関係式から来る  $\tau_1 + \cdots + \tau_n = 0$  を用いた. (3.3) と (3.4) より,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(P_n(a)) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{X_n} (u_1\varpi_1 + \cdots + u_{n-1}\varpi_{n-1})^{n-1} \\ &= \sum_{\substack{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1} \\ c_1 + \cdots + c_{n-1} = n-1}} \left( \int_{X_n} \varpi_1^{c_1} \varpi_2^{c_2} \cdots \varpi_{n-1}^{c_{n-1}} \right) \frac{u_1^{c_1}}{c_1!} \cdots \frac{u_{n-1}^{c_{n-1}}}{c_{n-1}!} \end{aligned}$$

が得られるので, mixed Eulerian number  $A_{c_1, \dots, c_{n-1}}$  の定義から次の等式が得られる.

$$(3.5) \quad A_{c_1, \dots, c_{n-1}} = \int_{X_n} \varpi_1^{c_1} \varpi_2^{c_2} \cdots \varpi_{n-1}^{c_{n-1}}.$$

**注意 3.1.** 上の公式 (3.5) は既に様々な観点から証明されている ([5, 14]). ただし, [5, 14] においては  $A$  型に限った議論であるが, 上記の議論は任意の *Lie type* でも通用する ([9] 参照).

## 4. PETERSON SCHUBERT CALCULUS との関係

行列  $N$  をジョルダンブロックが唯一つの冪零行列

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

とする。(簡単のためジョルダン標準形に取っておく。) Peterson variety は

$$\text{Pet}_n := \{V \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid NV_i \subset V_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}$$

で定義され,  $n \geq 3$  のとき特異点を持ち ([11, 12]),  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Pet}_n = n-1$  である ([12]). permutohedral variety  $X_n$  と Peterson variety  $\text{Pet}_n$  はともに旗多様体の既約な部分代数多様体であるので, これらは  $H^*(Fl(\mathbb{C}^n))$  のコホモロジー類を定めるが, 実はこれらが等しいことが [1] の結果から分かる. (任意の Lie type の場合は, [2] の結果より分かる. [1, 2] では, より一般の Hessenberg variety について議論している.) したがって, (3.5) は次のように書き直せる.

$$(4.1) \quad A_{c_1, \dots, c_{n-1}} = \int_{\text{Pet}_n} \varpi_1^{c_1} \varpi_2^{c_2} \cdots \varpi_{n-1}^{c_{n-1}}.$$

ここで, 再び記号の乱用ではあるが, 上記の式に現れる  $\varpi_i$  は制限写像  $H^*(Fl(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Pet}_n)$  による  $\tau_1 + \cdots + \tau_i \in H^2(Fl(\mathbb{C}^n))$  の像を表す. (4.1) の右辺が Peterson Schubert calculus を表している. 詳細については [3]. 少しだけ述べると, [3] では,  $\mathbb{Z}$  係数コホモロジー  $H^*(\text{Pet}_n; \mathbb{Z})$  の  $\mathbb{Z}$ -基底  $\{\varpi_J \mid J \subset [n-1]\}$  を構成した. この基底  $\{\varpi_J \mid J \subset [n-1]\}$  は, Peterson variety と opposite Schubert variety の交わりを反映するようなものであり, 通常の旗多様体上の Schubert calculus と似た振舞をする.  $\varpi_J$  は  $\prod_{j \in J} \varpi_j$  にある有理数  $\frac{1}{m_J}$  をかけたものと一致することに注意しておく. この基底に関する構造定数, すなわち

$$\varpi_J \cdot \varpi_K = \sum_{L \subset [n-1]} d_{JK}^L \varpi_L \quad \text{in } H^*(\text{Pet}_n; \mathbb{Z})$$

における係数  $d_{JK}^L$  の計算方法を与えることを Peterson Schubert calculus という. [3] では, この構造定数  $d_{JK}^L$  の組合せ的な計算方法も与えた. その鍵となったのが, 次の公式である ([3, Proposition 4.10 and Lemma 5.1]).

(1)  $1 \leq a \leq i \leq b \leq n-1$  に対して

$$(4.2) \quad \varpi_a \cdots \varpi_i^2 \cdots \varpi_b = \frac{b-i+1}{b-a+2} \varpi_{a-1} \varpi_a \cdots \varpi_b + \frac{i-a+1}{b-a+2} \varpi_a \cdots \varpi_b \varpi_{b+1}.$$

(2) 次が成立.

$$(4.3) \quad \int_{\text{Pet}_n} \varpi_1 \varpi_2 \cdots \varpi_{n-1} = (n-1)!.$$

mixed Eulerian number の話に戻ると, mixed Eulerian number  $A_{c_1, \dots, c_{n-1}}$  は (4.1) で与えられ, (4.1) の右辺で  $\varpi_i^2$  が現れたら (4.2) を用いて square free monomial の一次結合として書ける. この操作を繰り返行うと, 最終的に積分の中身は  $\varpi_1 \varpi_2 \cdots \varpi_{n-1}$

のスカラ一倍で明示的に表せるが, (4.3) を用いて mixed Eulerian number  $A_{c_1, \dots, c_{n-1}}$  が計算できる. なお, [3] で導入した組合せ的なゲーム (left-right diagram) を用いた  $A_{c_1, \dots, c_{n-1}}$  の記述もできる ([9] 参照).

**注意 4.1.** *mixed Eulerian number* の上記の計算方法は, 任意の *Lie type* に拡張できる ([9]). また, [5] において *Peterson Schubert calculus* の言葉では述べられていないが, 本質的には上記の計算方法と同じものが  $A$  型に限って既に与えられていることに注意.

## 5. 任意の LIE TYPE の結果

最後に, ここまで議論した内容の任意の *Lie type* バージョンを解説する.  $\Phi$  を rank  $n$  の既約なルート系,  $\Lambda$  を weight lattice とし,  $\Lambda_{\mathbb{R}} = \Lambda \otimes \mathbb{R}$  とおく. 点  $\chi \in \Lambda_{\mathbb{R}}$  の Weyl 群  $W$  による軌道の点たちの convex hull を *weight polytope* といい,  $P_{\Phi}(\chi)$  と書く.

$$P_{\Phi}(\chi) := \text{ConvexHull}\{w(\chi) \in \Lambda_{\mathbb{R}} \mid w \in W\}.$$

simple root たちからなる集合  $\Sigma := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$  を一つ取る.  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  上の volume form を, simple root  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  たちで生成される平行四辺形の volume を 1 として定める.  $\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$  を fundamental weight たちからなる集合とすると, これらは  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  の基底をなすので,  $\chi = u_1\varpi_1 + \dots + u_n\varpi_n$  と書ける. weight polytope  $P_{\Phi}(\chi)$  の volume は  $u_1, \dots, u_n$  を変数とする次数  $n$  の斉次多項式であり, 単項式  $\frac{u_1^{c_1}}{c_1!} \dots \frac{u_n^{c_n}}{c_n!}$  の係数を mixed  $\Phi$ -Eulerian number といい,  $A_{c_1, \dots, c_n}^{\Phi}$  と書く ([15]).

$$\text{Vol}(P_{\Phi}(u_1\varpi_1 + \dots + u_n\varpi_n)) = \sum_{\substack{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ c_1 + \dots + c_n = n}} A_{c_1, \dots, c_n}^{\Phi} \frac{u_1^{c_1}}{c_1!} \dots \frac{u_n^{c_n}}{c_n!}.$$

4 節で議論した内容が一般の *Lie type* でも議論できることを見ていく.  $G$  を  $\mathbb{C}$  上の単連結な半単純代数群とし<sup>1</sup>, そのボレル部分群  $B$  を一つ固定する.  $G$  と  $B$  の Lie 代数をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$  と書き, 対応するルート系を  $\Phi$  と書く.  $N \in \mathfrak{g}$  を regular nilpotent element とする. *Peterson variety*  $\text{Pet}_{\Phi}$  は次で定義される旗多様体  $G/B$  の部分多様体である.

$$\text{Pet}_{\Phi} := \left\{ gB \in G/B \mid \text{Ad}(g^{-1})(N) \in \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \right\}.$$

ここで,  $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$  は negative simple root  $-\alpha_i$  に付随する root space を表す.  $\text{Pet}_{\Phi}$  は既約で複素次元が  $n$  であることが知られている ([16]). 各 weight  $\chi$  に対して,  $\mathbb{C}_{\chi}$  を自然な射影  $B \rightarrow T$  と  $\chi: T \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  の合成写像  $\tilde{\chi}: B \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  によって得られる 1 次元の  $B$ -表現とする. 直積  $G \times \mathbb{C}_{\chi}$  上の  $B$ -作用を  $(g, z) \cdot b = (gb, \tilde{\chi}(b)^{-1}z)$  ( $g \in G, z \in \mathbb{C}_{\chi}, b \in B$ ) で定め, 旗多様体  $G/B$  上の line bundle  $L_{\chi} = G \times_B \mathbb{C}_{\chi}$  を考える. 記号の乱用ではあるが, 各  $i \in [n]$  に対して fundamental weight  $\varpi_i \in \Lambda$  に付随する line bundle  $L_{\varpi_i}$

<sup>1</sup>4 節までは  $G = GL_n(\mathbb{C})$  で議論していたが,  $G = SL_n(\mathbb{C})$  の場合でも同様に議論できる.

の dual  $L^*_{\varpi_i}$  を Peterson variety  $\text{Pet}_\Phi$  上に制限した  $L^*_{\varpi_i}|_{\text{Pet}_\Phi}$  の first Chern class をまた  $\varpi_i$  と書くことにする.

(5.1) 
$$\varpi_i := c_1(L^*_{\varpi_i}|_{\text{Pet}_\Phi}) \in H^2(\text{Pet}_\Phi).$$

$\Phi$  の Dynkin 図形の頂点集合と simple system  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  の間には 1 対 1 対応があることを思い出しておく.  $\Phi$  の Dynkin 図形の頂点に simple root を付ける順序は [10] のものとする.  $K \subset \Sigma$  が *connected* であるとは, 頂点集合  $K$  が持つ Dynkin 図形が  $\Phi$  の Dynkin 図形の連結部分グラフであるときをいう.

今, mixed  $\Phi$ -Eulerian numbers の単純な計算方法を紹介する.

**定理 5.1.** ([9, Theorem 1.1])  $\Phi$  を既約なルート系とする.  $c_1, \dots, c_n$  を非負整数で  $c_1 + \dots + c_n = n$  を満たすものとする.

(1) *mixed  $\Phi$ -Eulerian number*  $A^{\Phi}_{c_1, \dots, c_n}$  は次で与えられる.

$$A^{\Phi}_{c_1, \dots, c_n} = \int_{\text{Pet}_\Phi} \varpi_1^{c_1} \varpi_2^{c_2} \cdots \varpi_n^{c_n}.$$

(2)  $K \subset \Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  が *connected* かつ  $K \ni \alpha_i$  のとき,

$$\varpi_i \cdot \prod_{\alpha_k \in K} \varpi_k = \sum_{\substack{J \subset \Sigma: \text{connected} \\ J \supset K \text{ and } |J|=|K|+1}} m^J_{i,K} \prod_{\alpha_j \in J} \varpi_j \text{ in } H^*(\text{Pet}_\Phi)$$

と書ける. ここで, 係数  $m^J_{i,K}$  のリストを [9, Section 7 の Table 2] で明示的に作成した.

(3) 次が成立.

$$\int_{\text{Pet}_\Phi} \varpi_1 \varpi_2 \cdots \varpi_n = \frac{|W|}{\det(C_\Phi)}.$$

ここで,  $C_\Phi$  はカルタン行列を表す. 右辺については *Lie type* 毎に明示的に計算されていることに注意 ([9, Section 6 の Table 1 参照]).

定理 5.1 は mixed  $\Phi$ -Eulerian number の計算方法を与えている. 実際, (2) を繰り返し使うことで  $\varpi_1^{c_1} \varpi_2^{c_2} \cdots \varpi_n^{c_n}$  ( $c_1, \dots, c_n \geq 0, c_1 + \dots + c_n = n$ ) はある  $q \in \mathbb{Q}$  を用いて単項式  $q \cdot \varpi_1 \varpi_2 \cdots \varpi_n$  の形に帰着される. ここで, 係数  $q$  は [9, Section 7 の Table 2] を用いることで, 明示的に計算できる. この等式  $\varpi_1^{c_1} \varpi_2^{c_2} \cdots \varpi_n^{c_n} = q \cdot \varpi_1 \varpi_2 \cdots \varpi_n$  を  $\text{Pet}_\Phi$  上で積分することで, (1) と (3) より  $A^{\Phi}_{c_1, \dots, c_n} = q \cdot \frac{|W|}{\det(C_\Phi)}$  が得られる.

REFERENCES

[1] H. Abe, L. DeDieu, F. Galetto, and M. Harada, *Geometry of Hessenberg varieties with applications to Newton–Okounkov bodies*, *Selecta Math. (N.S.)* **24** (2018), no. 3, 2129–2163.  
[2] H. Abe, N. Fujita, and H. Zeng, *Geometry of regular Hessenberg varieties*, *Transform. Groups* **25** (2020), no. 2, 305–333.  
[3] H. Abe, T. Horiguchi, H. Kuwata, and H. Zeng, *Geometry of Peterson Schubert calculus in type A and left-right diagrams*, arXiv:2104.02914.  
[4] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, *Topology*, **23**, no. 1 (1984), 1–28.  
[5] A. Berget, H. Spink, and D. Tseng, *Log-concavity of matroid h-vectors and mixed Eulerian numbers*, arXiv:2005.01937.

- [6] N. Berline and M. Vergne, *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295**, no. 9 (1982), 539–541.
- [7] D. Croitoru, *Mixed Volumes of Hypersimplices, Root Systems and Shifted Young Tableaux*, Thesis (Ph.D.)—Massachusetts Institute of Technology. 2010.
- [8] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529–534.
- [9] T. Horiguchi, *Mixed Eulerian numbers and Peterson Schubert calculus*, arXiv:2104.14083.
- [10] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.
- [11] E. Insko and A. Yong. *Patch ideals and Peterson varieties*, Transform. Groups 17, no. 4 (2012): 1011–1036.
- [12] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the toda lattice, and the representation with highest weight  $\rho$* , Selecta Math. (N.S.) 2, no. 1 (1996): 43–91.
- [13] G. Liu, *Mixed volumes of hypersimplices*, Electron. J. Combin. **23**, no. 3 (2016), Paper 3.19, 19 pp.
- [14] P. Nadeau and V. Tewari, *The permutahedral variety, mixed Eulerian numbers, and principal specializations of Schubert polynomials*, arXiv:2005.12194.
- [15] A. Postnikov, *Permutahedra, associahedra, and beyond*, Int. Math. Res. Not. IMRN., **2009**, no. 6, 1026–1106.
- [16] M. Precup, *The Betti numbers of regular Hessenberg varieties are palindromic*, Transform. Groups 23 (2018), no. 2, 491–499.