

# リー群が表すホモトピー要素について

大阪市大 南 春男 (Haruo Minami)

コンパクト・連結リー群を  $G$ , その左不変な枠組を  $\mathcal{L}$  とする。ここで  $(G, \mathcal{L})$  からトム・ポントリャーギン構成法によってえられるホモトピー要素  $[G, \mathcal{L}] \in \pi_{\alpha}^S$  (但し,  $\alpha = \dim G > 0$ ) について一つの補足(命題1)とこれまでの結果及びその二, 三について証明に用いられた主な道具を紹介する。

1. 命題1  $G$  がその固定集合  $K$  の余次元が奇数であるような対合的自己同型をもつとき,

$$[G, \mathcal{L}]_{(odd)} = 0.$$

例 この命題が適用出来る  $G$  としては,  $SU(4n+3)$ ,  $SU(4n)$ ,  $SO(2n)$ ,  $Spin(2n)$  がある。

この内  $SO(2n)$  については後で述べるように Becker-Schultz によって  $\mathcal{L}[SO(2n), \mathcal{L}] = 0$  であることが知られている。また次に示す Ossa の定理から命題が意味をもつのは3成分のみ

である。

2.  $[G, \mathcal{L}]$  の位数の評価で最も一般的なものは次の Ossa の結果である。

定理 (Ossa [6], 1982)  $\gamma_2[G, \mathcal{L}] = 0$ 。

定義から次のことが分かるが、このことは  $[G, \mathcal{L}]$  の決定は半単純群の問題に帰着されることを示す。

$$1) \quad [S', \mathcal{L}] = \gamma \in \pi_{\gamma'}^S \quad (\text{ホップ写像})$$

$$2) \quad G \text{ は非可換, 且つ } Z(G) \cap T \text{ (輪環群) を含ばず}$$

$$[G, \mathcal{L}] = [T, \mathcal{L}][G/T, \mathcal{L}]$$

$$3) \quad [G, \mathcal{L}][H, \mathcal{L}] = [G \times H, \mathcal{L}]$$

1) と同様に  $[S', \mathcal{L}]$  は  $\pi_{\gamma'}^S$  のホップ写像  $\gamma$  を表すことが分かる。更に  $SO(3)$  については  $[SO(3), \mathcal{L}] = 2\gamma$  が示されている [7]。

又 2) から  $[U(n), \mathcal{L}] = \gamma[SU(n), \mathcal{L}]$  をえる。

階数 2 の単純群については、最初に Smith [7] によって  $[Sp(2), \mathcal{L}] = \beta, (3) \in \pi_{\beta,0}^S$ ,  $[SU(3), \mathcal{L}] = \bar{\nu} \in \pi_{\bar{\nu}}^S$  が証明され、つづいて Steer [8] と Wood [9] によって  $[SU(3), \mathcal{L}] = \bar{\nu} \in \pi_{\bar{\nu}}^S$ ,  $[G_2, \mathcal{L}] = \kappa \in \pi_{\kappa,4}^S$  が証明された。その後 Becker-Schultz [2], Knapp [4] と続くが結果については Ossa の表を次に掲げて

おく。Becker-Schultz はこれらの結果から [2] (1977) の中で次の予想を立てた。  $\text{rank } G \geq 10$  ? 否  $[G, \mathbb{Z}] = 0$

| $\text{rk}$ | $d$ | $G$       | $[G, \mathbb{Z}]$             | $\pi_{\alpha}^S$                    |
|-------------|-----|-----------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1           | 3   | $SU(2)$   | $\nu$                         | $Z_{24} \nu$                        |
|             |     | $SO(3)$   | $2\nu$                        |                                     |
| 2           | 8   | $SU(3)$   | $\bar{\nu}$                   | $Z_2 \oplus Z_2 \bar{\nu}$          |
|             | 10  | $Sp(2)$   | $B_1(3)$                      | $Z_6$                               |
|             |     | $SO(5)$   | $-B_1(3)$                     |                                     |
|             | 14  | $G_2$     | $\kappa$                      | $Z_2 \oplus Z_2 \kappa$             |
|             | 6   | $SO(4)$   | 0                             |                                     |
| 3           | 15  | $SU(4)$   | $\kappa\eta$                  | $Z_{480} \oplus Z_2 \kappa\eta$     |
|             |     | $SO(6)$   | 0                             |                                     |
|             | 21  | $Spin(7)$ | 0                             | $Z_2 \oplus Z_2$                    |
|             |     | $SO(7)$   | 0                             |                                     |
|             |     | $Sp(3)$   | $\sigma^3 + \bar{\kappa}\eta$ |                                     |
| 4           | 24  | $SU(5)$   | $\eta^* \sigma \eta$ or 0     | $Z_6 \oplus Z_2 \eta^* \sigma \eta$ |
|             | 36  | $Spin(9)$ | 0                             | $Z_6$                               |
|             |     | $SO(9)$   | 0                             |                                     |
|             |     | $Sp(4)$   | ?                             |                                     |
|             | 28  | $Spin(8)$ | 0                             | $Z_2$                               |
|             |     |           |                               |                                     |

|       |         |   |                               |
|-------|---------|---|-------------------------------|
|       | $SO(8)$ | 0 |                               |
| $F_4$ | $F_4$   | ? | $Z_3 \oplus 2\text{-primary}$ |

註) 岡氏から  $[SU(5), \mathbb{Z}] = 0$  であることを教えられた (H. U. Schöen の結果)。

3 先の四氏の主定理を述べる。

**Becker-Schultz**  $K$  を  $G$  の閉部分群とする。  $K \times G \rightarrow K$  を  $K$  上の積バンドル,  $f: K \times G \rightarrow K \times G$  を  $f(k, g) = (k, kg)$ ,  $k \in K, g \in G$  で定義されるバンドル写像とする。また Dold の  $f$  の不動点指数  $I(f) \in \pi_5^0(K_+)$  を  $I_K(G)$  で表す。

$U \subset G$  を単位元の局所座標近傍とし, 自然な射影  $G_+ \rightarrow G/G-U = S^d$  を  $\pi$  で表す。このとき,  $\pi_*^S = \pi_*^0(S^d) \xrightarrow{\pi^*} \pi_*^0(G_+)$  は単射で, 且つ  $\pi^*[G, \mathbb{Z}] = I_G(G)$  なることが分かる。

**定理**  $I_K(G) = \chi(G/K) I_K(K)$ ,

とくに  $G \supset K$  なら  $I_K(G) = 0$ , 即ち  $\chi(G/K)[K, \mathbb{Z}] = 0$ 。

但し,  $\chi(-)$  は Euler の標数を示す。

**例**  $\chi(SO(2n)/U(n)) = 2^{n-1}$ ,  $\chi(SU(n+1)/U(n)) = n+1$ ,

$\chi(SO(2n+1)/SO(2n)) = 2$ ,  $\chi(G_2/SO(4)) = \chi(F_4/Spin(9)) = 3$ 。

これより  $[U(2n), \mathbb{Z}] = 2[SO(2n), \mathbb{Z}] = 3[SO(4), \mathbb{Z}] = 3[Spin(9), \mathbb{Z}] = 0$  をえる。

Knapp Adams スペクトル系列

$$E_2^{i,j} = Ext_{BP_*BP}^{i,j}(BP_*, BP_*) \Rightarrow \pi_{j-i}^S$$

のフィルター付けを

$$\pi_d^S \supset \dots \supset F^{k,d+k} \supset F^{k+1,d+k+1} \supset \dots$$

とするとき、次の結果を証明した。

定理  $[G, \mathbb{Z}]_{(p)} \in F^{\text{rank } G, d + \text{rank } G}$

註) この言葉で Atiyah-Smith [1] の結果は次の様に記述される:  $e_c [G, \mathbb{Z}]_{(p)} = 0$  であるための必要十分条件は  $[G, \mathbb{Z}]_{(p)} \in F^{2, d+2}$  である。

この定理と  $E_2^{i,j}$  の消滅に関する Zahler, Miller の結果を用いて次の結果を得た。

$$[SU(2n+1), \mathbb{Z}]_{(p)} = 0 \quad (2n < p(p-1)-2),$$

$$[F_4, \mathbb{Z}]_{(p)} = [E_6, \mathbb{Z}]_{(p)} = [E_7, \mathbb{Z}]_{(p)} = 0 \quad (p \geq 5), \quad [E_8, \mathbb{Z}]_{(p)} = 0 \quad (p \geq 7).$$

他の手法によって  $[F_4, \mathbb{Z}]_{(3)} = 0$  が証明されている。

Q.1.1a  $S$  を  $G$  のサークル部分群,  $V$  を  $S$  の非自明な

一次元複素表現とする。また  $\tau: \Sigma' CP_+^\infty \rightarrow QS^0$  を  $S'$ -物送写像とする。このとき  $\tau_*: \pi_{\alpha-1}^S(CP_+^\infty) \rightarrow \pi_\alpha^S$  は  $[G/S, \mathcal{L}, \mathcal{S}]$  を  $[G, \mathcal{L}]$  に移すことが知られている。こゝで  $\mathcal{S}: G \times_S V \rightarrow G/S$ ,  $B \in \tilde{K}(S^0)$  を Bott 要素,  $[G/S] \in \pi_{\alpha-1}^S(G/S_+)$  を  $G/S$  の基本類とするとき, 次の定理を証明した。

定理  $\tau_*[G/S, \mathcal{L}, \mathcal{S}] = -\langle J(B\mathcal{S}), [G/S] \rangle$

即ち  $[G, \mathcal{L}] = -\langle J(B\mathcal{S}), [G/S] \rangle$ 。但し,  $J$  は複素  $J$ -写像を,  $\langle, \rangle$  はクロネッカー積を表す。

これは次の Knapp の結果を用いて示される:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma' CP_+^\infty & \xrightarrow{\tau} & QS^0 \\ R \downarrow & \nearrow J & \\ U & & \end{array}$$

は反可換である。こゝで  $R$  は反射写像を示す。

$S$  をうまく選べ,  $J(B\mathcal{S})$  に Adams 予想を適用して  $\mathcal{S}$  の冒頭に述べた定理を証明した。

4. 命題 7 の証明  $M$  を  $(n+8)$  次元可微分  $S^2$ -閉多様体で, その接バンドル  $\tau$  について次のバンドル同型をもつとする。

$$\bar{\Phi} : \tau \otimes \underline{R^L \oplus jL} \xrightarrow{\cong} \underline{R^{L+j} \oplus (j+P)L}$$

(ある  $\bar{\alpha}_j$  に対して)。こゝで  $L$  は  $R$  の非自明な一次元実表現

を,  $A$  は  $A$  をファイバーにもつ積バンドルを表す。このとき

$(M, \bar{\Phi})$  を  $(p, g)$ -枠組をもつ多様体と呼ぶことにする。

$(M, \bar{\Phi})$  で  $R$  の作用を忘れるとき, またその固定点集合を考えると, それは枠組をもつ多様体になる。それらを

$(M, \varphi\bar{\Phi}), (M^Z, \varphi\bar{\Phi})$  で表す。

$\pi_{p,g}^S$  を Landweber [5] の同変安定ホモトピー群, i.e.

$$\pi_{p,g}^S = \varinjlim_{\bar{c}, \bar{g}} [\Sigma^{p+\bar{c}, g+\bar{g}} / \Sigma^{\bar{c}, \bar{g}}, \Sigma^{\bar{c}, \bar{g}}], \Sigma^{\bar{c}, \bar{g}} = (R^{\bar{c}} \otimes jL) \cup \{0\}, \text{ とすると,}$$

$(M, \bar{\Phi})$  は同変トム・ポントラーゲン構成法で  $\pi_{p,g}^S$  の要素  $[M, \bar{\Phi}]$  を定義する。この  $M$  に対して次の結果を得る。

命題2  $p$  が奇数なら,  $[M, \varphi\bar{\Phi}]_{(odd)} = 0$

例  $M$  として命題1の  $G$  をとると,  $G$  は  $(d-\dim K, \dim K)$ -枠組をもつ多様体になる。従って, これから命題1を得る。

命題2の証明  $\lambda_{p,g}^S = \varinjlim_{\bar{c}, \bar{g}} [\Sigma^{p+\bar{c}, g+\bar{g}} / \Sigma^{\bar{c}, \bar{g}}, \Sigma^{\bar{c}, \bar{g}}]$  とおく

と, コファイブレーション  $\Sigma^{0,g} \rightarrow \Sigma^{p,g} \rightarrow \Sigma^{p,g} / \Sigma^{0,g}$  は完全列

$$\rightarrow \lambda_{p,g}^S \rightarrow \pi_{p,g}^S \xrightarrow{\varphi} \pi_g^S \rightarrow \lambda_{p,g-1}^S \rightarrow \dots$$

を定義する[5]。こゝで  $\varphi$  は  $\varphi[M, \bar{\Phi}] = [M^Z, \varphi\bar{\Phi}]$  を満たす。

$\mathbb{Z}_2$ -同型  $J: R^{i+\varepsilon} \oplus (j+p)L \rightarrow R^{i+\varepsilon} \oplus (j+p)L$  を  $J(x_1, \dots, x_{2+\varepsilon}, y_1, \dots, y_{j+p}) = (x_1, \dots, x_{2+\varepsilon}, -y_1, y_2, \dots, y_{j+p})$  で定義するとき,  $\psi[M, \Phi] = \psi[M, J \cdot \Phi]$ , 更に  $\psi: \pi_{p, \varepsilon}^S \rightarrow \pi_{p+\varepsilon}^S$  を忘却写像とすると,  $\psi[M, J \cdot \Phi] = -\psi[M, \Phi] = -[M, \psi\Phi]$ .

ところで, 双対定理を用いて同型  $\lambda_{p, \varepsilon}^S \cong \pi_{2^a + \varepsilon}^S (P^\infty / P^{2^a - p - 1})$  ( $a \gg p, \varepsilon$ ) を得る[3]. ここで  $P^i$  は実射影  $i$ -空間を表す.

$\tilde{H}_*(P^{2N}/P^{2\ell}, \mathbb{Z})$  は 2-torsion であるので, Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列から,  $p$  が奇数なら  $\lambda_{p, \varepsilon}^S, \lambda_{p, \varepsilon-1}^S$  は 2-torsion であることが分かる. 従って上の完全列から  $[M, \Phi]_{(odd)} = [M, J \cdot \Phi]_{(odd)}$ , 従って  $[M, \psi\Phi]_{(odd)} = -[M, \psi\Phi]_{(odd)}$  を得る.

## 文 献

- 1 Atiyah - Smith: Compact Lie groups and stable homotopy of spheres, *Topology* 13 (1974), 135-142.
- 2 Becker - Schultz: Fixed point indices and left invariant framings, *Lecture Notes in Math.* 657, Springer, 1978, 1-31.
- 3 Bredon: Equivariant stable stems, *Bull.*

- Amer. Math. Soc. 73 (1967), 269-273.
4. Knapp: Rank and Adams filtration of a Lie groups, *Topology* 17 (1978), 41-52.
  5. Landweber: On equivariant maps between spheres with involutions, *Ann. of Math.* 89 (1969), 125-137.
  6. Ossa: Lie groups as framed manifolds, *Topology* 21 (1982), 315-323.
  7. Smith: Framings of sphere bundles over spheres, the plumbing pairing, and the framed cobordism classes of rank 2 simple Lie groups, *Topology* 13 (1974), 401-415.
  8. Steer: Orbits and the homotopy class of a compactification of a classical map, *Topology* 15 (1976), 383-393.
  9. Wood: Framing the exceptional Lie group  $G_2$ , *Topology* 15 (1976), 303-320.