

7次元ホモトピー球面の上の固定点をもたない $SO(3)$ -作用について

津田 勲 大 吉 田 朋 好

序

$SO(3)$ を 3次元ユークリッド空間の回転群とする。ホモトピー 7次元球面の上の、固定点をもたない、なめらかな $SO(3)$ -作用を、とくに軌道構造に重点をおいて調べるのが目的である。 α と β を、 $SO(3)$ の 3次元、5次元の実既約表現とする。このとき、 $\alpha \oplus \beta$ は 7次元球面 S^7 の上に $SO(3)$ の線形作用をもたらすか、この線形作用は、固定点をもたない。そして、固定点をもたない、線形作用は $\alpha \oplus \beta$ に限られることも容易にわかる。

$(\mathbb{Z}^7, \varphi)$ を 7次元ホモトピー球面の上のなめらかな $SO(3)$ -作用で固定点をもたないとする。我々は、 $(\mathbb{Z}^7, \varphi)$ の軌道構造が線形作用 $\alpha \oplus \beta$ の軌道構造と、どれ程異なりか (又は、一致するか) を問題にする。正確に述べると、次のようになる。 $x \in \mathbb{Z}^7$ を $\mathbb{Z}^7$ の点とし、

x の isotropy 群 G_x を $G_x = \{g \in SO(3) \mid gx = x\}$ で定義する。 $SO(3)$ の共役類の集合 $\{(G_x) \mid x \in \Sigma^k\}$ を (Σ^k, φ) の軌道構造と名付ける。線形作用 $\alpha \oplus \beta$ の軌道構造は $\{(e), (Z_2), (D_2), (SO(2)), (N)\}$ となる。ここに e は $SO(3)$ の単位元、 Z_2 は位数 2 の巡回群、 D_2 は位数 4 の 2 面体群、 N は $SO(2)$ の正規化群である。

我々は、次の 2 つの定理を得る。

定理 I.

(Σ^k, φ) を 1 次元ホモトピー球面の上の固定点をもたない、なめらかな、 $SO(3)$ -作用とする。このとき、 (Σ^k, φ) の軌道構造は、次の 2 つのタイプのうちの 1 つとなる。

$$(a) \{(e), (Z_2), (D_2), (SO(2)), (N)\}$$

$$(b) \{(e), (Z_2), (D_2), (SO(2)), (N), (Z_{2k+1}), (D_{2k+1})\}$$

(k : 正整数)

ここに、 Z_{2k+1} は位数 $2k+1$ の巡回群、 D_{2k+1} は位数 $4k+2$ の 2 面体群。

(b) の軌道構造をもつ線形作用は存在しない。

定理 II.

任意の正整数 k に対して、 7 次元標準球面 S^7 の上に (b) の軌道構造をもつ $SO(3)$ -作用が存在する。

我々は 定理 I の証明は省略し 定理 II の証明の概略を、次に述べる。

定理 II の証明の概略

5次元実既約表現 β は、次のようにして構成される。
 $SO(3)$ を 3×3 -行列 $g = (a_{ij})$ で $g \cdot g =$ 単位行列、
 $\det g = 1$ なるものの全体と同一視する。 K_β^5 を
 3×3 -対称行列 $S = (s_{ij})$ で $\text{trace } S = \sum s_{ii} = 0$ なるものの全体のつくる、5次元実ベクトル空間とし、
 $SO(3)$ の K_β^5 の上への作用を、 $g \in SO(3)$, $S \in K_\beta^5$ に対し、
 $g \cdot S = g S g^{-1}$ (行列の積) と定義する。 K_β^5 の元 S に対し S の norm $\|S\|$ を $\|S\|^2 = \text{trace of } S^2$ で定義する。この norm は $SO(3)$ -不変である。

次に、3次元実既約表現 α を次のように考える。 K_α^3 を3次元実ベクトル $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} ; v_i \text{ は実数} \right\}$ 全体のなる空間とし、 $SO(3)$ の作用を、 $g = (a_{ij}) \in SO(3)$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ に対し

おし. $g \cdot v = (a_{ij}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ (行列の積) で定義する。 $v \in \mathbb{R}_\alpha^3$

の norm $\|v\|$ は, $\|v\|^2 = \sum v_i^2$ で与えられる。

$\mathbb{R}_{\alpha\beta}^5 \in \mathbb{R}_\alpha^3$ と $\mathbb{R}_\beta^5$ の直和とする ($SO(3)$ -作用をこめて考える。) すなわち $\mathbb{R}_{\alpha\beta}^5 = \mathbb{R}_\alpha^3 \oplus \mathbb{R}_\beta^5$. $x \in \mathbb{R}_\alpha^3$, $y \in \mathbb{R}_\beta^5$ に對し. $x+y \in \mathbb{R}_{\alpha\beta}^5$ の norm $\|x+y\|$ を $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ と定める. $S^7 \in \mathbb{R}_{\alpha\beta}^5$ の単位球面とすれば, S^7 は $SO(7)$ の線形作用 $\alpha \oplus \beta$ をもった 7次元標準球面となる。

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}_\alpha^3$ を次のように定める。

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}_\beta^5$ を次のように定める。

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}_{\alpha\beta}^5$ の 4次元部分空間 W ($SO(3)$ -不変ではない) を次のように定める。

$$W = \{ v_3, v_1 + y_1, v_2 + y_2, y_3 \} \text{ によって} \text{ 張られる部分空間}$$

$S = W \cap S^7$ とおく。このとき次のことがわかる。

補題 $g \in SO(3)$ に対し

$$gS \cap S \neq \emptyset \iff g \in N.$$

この補題によって、 S^7 には、 S の orbit GS として、 $SO(3) \times_N S$ が embed されていることがわかる。 $\mathbb{R}_{S_2}^2$ を 2次元実ベクトル空間で、 N が $\delta_2: N \rightarrow N/\mathbb{Z}_2 = N \rightarrow O(2)$ によって作用しているものとする。 $SO(3) \times_N S$ の S^7 における normal bundle は $SO(3) \times_N (S \times \mathbb{R}_{S_2}^2)$ と equivariant に同型であることがわかる。従って、 $\mathbb{R}_{S_2}^2$ の単位球体を $D_{S_2}^2$ とした時、 $SO(3) \times_N (S \times D_{S_2}^2)$ は S^7 に embed されている。

W_k を 4次元実ベクトル空間で、 N が $\psi_k: N \rightarrow N/\mathbb{Z}_{2k+1} = N \subset SO(3) \subset SO(4)$ によって作用しているものとする。 $\partial D_{S_2}^2$ を $D_{S_2}^2$ の boundary とする。

補題 S_k を W_k の単位球面とする。このとき、 N -equivariant diffeomorphism $H: S \times \partial D_{S_2}^2 \rightarrow S_k \times \partial D_{S_2}^2$ が存在する。

よって、 $SO(3)$ -manifold Σ_k^7 を

$$\Sigma_k^7 = \overline{(S^7 - SO(3) \times_N (S \times D_{S^2}^2))} \cup_{\widetilde{H}} SO(3) \times_N (S_k \times D_{S^2}^2)$$

と定義する。ただし、 $\widetilde{H} = \{ \times_N H : SO(3) \times_N (S \times 2D_{S^2}^2) \rightarrow SO(3) \times_N (S_k \times 2D_{S^2}^2) \}$. $SO(3)$ -manifold Σ_k^7 の軌道構造は定理 I の (b) になる。 Σ_k^7 がホモトピー球面であることは Mayer-Vietoris 系列と van-Kampen の定理から出る。さらに、 Σ_k^7 を境界にもつ 指数 0 の 8 次元平行化可能な manifold が得られ、 Σ_k^7 は 7 次元標準球面と微分同相となる。

Reference.

T. Yoshida : On fixed point free $SO(3)$ -actions
on homotopy 7-spheres

(70L70 リント)