

再配分をもつ競合的在庫問題の再考

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理科学専攻 北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
Dept. of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science
Osaka Prefecture University

1 はじめに

競合的在庫問題というとは既知需要分布のもとでの小売業者間の問題として扱われているものが多く、顧客の意思決定は含まれていない [6, 10]. 通常、小売業者の戦略は顧客の行動に依存し、顧客の行動は小売業者の戦略に依存する. それゆえ、小売業者だけでなく、顧客も意思決定者として捉えたモデルを構築する必要があると考える. 文献 [9] では、2 人の小売業者と n 人の顧客に対して、小売業者の費用関数が線形で与えられ、顧客が購入に向かう前あるいは 1 つ目の小売業者を訪れた後に購買意欲を失う仮定をもつ競合的在庫問題について考察した. 本稿では、費用関数を一般化し、増加関数の条件下における問題を数理的モデルとして定式化し、小売業者および顧客に対する Nash 平衡点を導出する.

2 仮定と記号

同一商品を販売する 2 つの小売業者 (Retailer j , $j = 1, 2$) と n 人の顧客 (Customer i , $i = 1, 2, \dots, n$) をもつ移動距離を考慮した 1 期間競合的在庫問題に対する収益管理について考える. 顧客は期首の時点で購買行動を起こすか、起こさないかを定める. もし購買行動に移るのであれば、顧客はそれぞれ未知の時刻に出発し、商品を 1 単位ずつ購入するためにいずれかの小売業者まで移動する. 顧客は初めて訪れた小売業者である Retailer j に商品の在庫があれば、そこで購入してもとの位置へ戻る. もし商品が在庫切れの状態で購入することができなければ、確率 q_j でもう一方の小売業者まで移動して購入を試み、残りの確率 $1 - q_j$ であきらめて戻る. 2 番目に訪れた小売業者に商品の在庫があれば、そこで購入してもとの位置に戻るが、品切れ状態であれば購入することなくあきらめて戻る. いずれの場合にも商品を購入できないときには、顧客は損失費用を被る. 顧客の目的は、商品の価格、移動、購入できなかったことに対する損失、小売業者に対する嗜好価値を考慮した期待総費用 C_i^e を最小にするような最初に訪れる小売業者を購買行動を起こすか否かを含めて期首の時点で決定することである.

一方、供給者側である Retailer j は期首のみに発注を行い、発注後の在庫水準を z_j 単位まで引き上げる. 小売業者は両者共通の販売時間 $[0, 1]$ において商品がある限り訪問してきた顧客に商品を販売し、収益を得ようとする. 期末の在庫レベルに対して在庫がある場合には在庫保管費用を負い、不足している場合には品切れ損失費用を負う. 顧客の合計数は小売業者および顧客には事前に知られているが、各顧客の出発時間は未知であるとする. Retailer j の目的は、発注、在庫保管、商品不足による品切れ損失、販売による収益を考慮に入れた期待総費用 C_j^e を最小にするような発注後の在庫水準を期首の時点で決定することである.

本モデルでは、以下の記号を用いる：

- n : 顧客の総数
- λ : 小売業者間の距離
- λ_{ij} : Customer i と Retailer j との間の距離
- $c_j[x]$: Retailer j における x 個の商品の発注費用
- r_j : Retailer j による商品の販売価格
- $h_j[x]$: 期末の x 個の商品の在庫に対して課せられる Retailer j での在庫保管費用

- $p_j[x]$: 期末の x 個の商品不足に対して課せられる Retailer j での品切れ損失費用
 e_{ij} : Customer i が Retailer j に対してもっている嗜好に関する価値
 d_i : Customer i が移動時に負う単位距離当たりの移動費用
 s_i : Customer i が商品を購入できない時に負う損失費用

Retailer j のとりうる戦略は Retailer j の発注後の期首在庫水準 z_j であり, Customer i のとりうる戦略は Customer i の行動決定

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{商品を購入しない} \\ 1, & \text{初めの訪問先に Retailer 1 を選択} \\ 2, & \text{初めの訪問先に Retailer 2 を選択} \end{cases}$$

である. 需要量 n は既知であり, 小売業者は n より多くの量を発注すると維持費用が増加するため, Retailer j は発注量 z_j を $[0, n]$ に制限することができる.

このモデルでは購入可能時間 $[0, 1]$ 内に 2 番目の小売業者への訪問 (これを再配分とよぶ) がすべての顧客に対して可能である場合のみを扱う. すなわち, 顧客の出発時刻を $[0, 1 - \lambda - \max\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}\}]$ に制限する. 費用関数 $c_j[x], h_j[x], p_j[x]$ は量 x の増加関数であるとする.

3 小売業者の目的関数の導出

まず, 小売業者の期待総費用関数の導出から始める. 今, Retailer j ($j = 1, 2$) には k_j 人の顧客が初めに向かうと仮定する. そこで, k_1, k_2 は $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 \leq n$ を満たす値である. 解析上, 考慮すべき領域 $[0, n] \times [0, n]$ を次のように分割して考える:

- Case(1) $k_1 \leq z_1 \leq n, k_2 \leq z_2 \leq n$
 Case(2) $0 \leq z_2 < k_2, k_1 + (k_2 - z_2)q_2 \leq z_1 \leq n$
 Case(3) $0 \leq z_1 < k_1, k_2 + (k_1 - z_1)q_1 \leq z_2 \leq n$
 Case(4) $0 \leq z_2 < k_2, k_1 \leq z_1 < k_1 + (k_2 - z_2)q_2$
 Case(5) $0 \leq z_1 < k_1, k_2 \leq z_2 < k_2 + (k_1 - z_1)q_1$
 Case(6) $0 \leq z_1 < k_1, 0 \leq z_2 < k_2$

ここでは, Case(4) における小売業者の費用関数の導出についてのみ説明する. この状況では, 初めに Retailer 2 へ向かった k_2 人の顧客のうち, z_2 人がそこで需要を満たされる. 満たされなかった $k_2 - z_2$ 人の顧客のうち, $(k_2 - z_2)(1 - q_2)$ 人があきらめて戻り, $(k_2 - z_2)q_2$ 人が Retailer 1 への再配分を望む. その中で m_2 人が Retailer 1 で需要を満たすことができる. そこで, m_2 は $z_1 - k_1, \dots, (k_2 - z_2)q_2$ の値をとる. 一方の Retailer 1 には初めに k_1 人の顧客が向かうが, Retailer 2 から再配分された顧客との到着時間の順序によりその一部が Retailer 1 で需要を満たされないことがある. Retailer 1 から再配分された顧客は確率 q_1 で Retailer 2 へ向かうが, Retailer 2 ではすでに品切れの状態になっているため, 需要を満たすことはできない.

小売業者の費用関数の導出においては, 各顧客の到着順序により m_2 の値が異なってくる. そこで本稿では, m_2 の値による $k_1 - z_1 + (k_2 - z_2)q_2 + 1$ 個の各状況がそれぞれ同様に確からしく起こると仮定して, 費用関数の期待値により評価することとする. このとき, 小売業者の期待費用関数は

$$C_r^1 = c_1[z_1] - r_1 z_1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{m_2=z_1-k_1}^{(k_2-z_2)q_2} p_1[k_1 - z_1 + m_2 + (k_2 - z_2)q_2]$$

$$C_r^2 = c_2[z_2] - r_2 z_2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{m_2=z_1-k_1}^{(k_2-z_2)q_2} p_2[k_2 - z_2 + (k_1 - z_1 + m_2)q_1]$$

となる．そこで， $\alpha = k_1 - z_1 + (k_2 - z_2)q_2 + 1$ である．他の Case でも Case(4) のようにいくつかの状況が発生する場合には，各状況がそれぞれ等確率で起こると仮定して期待値を計算すると，以下の結果が得られる：

状況	関数 C_r^j
Case (1)	$C_r^1 = c_1[z_1] + h_1[z_1 - k_1] - r_1 k_1$
Case (2)	$C_r^1 = c_1[z_1] + h_1[z_1 - k_1 - (k_2 - z_2)q_2] - r_1(k_1 + (k_2 - z_2)q_2)$ $C_r^2 = c_2[z_2] + p_2[k_2 - z_2] - r_2 z_2$
Case (4)	$C_r^1 = c_1[z_1] - r_1 z_1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{m_2=z_1-k_1}^{(k_2-z_2)q_2} p_1[k_1 - z_1 + m_2 + (k_2 - z_2)q_2]$ $C_r^2 = c_2[z_2] - r_2 z_2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{m_2=z_1-k_1}^{(k_2-z_2)q_2} p_2[k_2 - z_2 + (k_1 - z_1 + m_2)q_1]$
Case (6)	$C_r^1 = c_1[z_1] - r_1 z_1 + \frac{1}{\beta} \sum_{m_2=0}^{(k_2-z_2)q_2} p_1[k_1 - z_1 + m_2 + (k_2 - z_2)q_2]$ $+ \frac{1}{\beta} \sum_{m_1=1}^{(k_1-z_1)q_1} p_1[k_1 - z_1 + (k_2 - z_2 + m_1)q_2]$

そこで， $\beta = (k_1 - z_1)q_1 + (k_2 - z_2)q_2 + 1$ である．Case(3),(5) はそれぞれ Case(2),(4) において小売業者の役割を交換した関数となる．また，Case(1),(6) の C_r^2 は C_r^1 と同じ形となる．

4 顧客の目的関数の導出

次に，顧客の期待総費用関数について考える．本稿の仮定より，顧客の行動パターンは4通り存在し，各パターンでの顧客の総費用関数は次のようになる：

- (1) Customer i が Retailer j を最初に訪問して購入できる場合

$$C_c^i = 2d_i \lambda_{ij} + r_j + e_{ij}$$

- (2) Customer i は最初 Retailer j' に向かうが，そこでは購入できず，再配分された他方の Retailer $j(\neq j')$ によって満たされる場合

$$C_c^i = d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_j + e_{ij}$$

- (3) Customer i は最初 Retailer j に向かうが，そこでは購入できず，あきらめる場合

$$C_c^i = 2d_i \lambda_{ij} + e_{ij} + s_i$$

- (4) Customer i は最初 Retailer j' に向かうが，そこでは購入できず，他方の Retailer $j(\neq j')$ でも購入できないことを知ってあきらめる場合

$$C_c^i = d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + e_{ij} + s_i$$

- (5) 購入しない場合

$$C_c^i = s_i$$

今，Case(2) について顧客の期待総費用関数を導出する．

- (I) Customer i が $y_i = 1$ を選ぶとき，Customer i は Retailer 1 によって需要を満たされる．ゆえに，期待総費用は

$$C_c^i = 2d_i\lambda_{i1} + r_j + e_{i1}$$

となる。

(II) Customer i が $y_i = 2$ を選ぶとき、初めに Retailer 2 へ向かう k_2 人の顧客のうち、 z_2 人がそこで需要を満たされるが、残りの顧客は需要を満たされない。 $(k_2 - z_2)(1 - q_2)$ 人はその時点であきらめ、 $(k_2 - z_2)q_2$ 人は再配分により Retailer 1 で満たされることになる。顧客の出発時刻に関する順序が、Customer i がどちらに含まれるのかを決定する。そこで、本稿では、顧客の到着順は同様に確からしいと仮定して期待値をとることにする。このとき、期待総費用は

$$C_c^i = \frac{z_2}{k_2} \{2d_i\lambda_{i2} + r_2 + e_{i2}\} + \frac{(k_2 - z_2)q_2}{k_2} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_1 + e_{i1}\} \\ + \frac{(k_2 - z_2)(1 - q_2)}{k_2} \{2d_i\lambda_{i2} + e_{i2} + s_i\}$$

となる。

(III) Customer i が $y_i = 0$ を選ぶとき、

$$C_c^i = s_i$$

である。

他の場合についても、各状況が起こる確率および顧客の到着順については同様に確からしい確率で起こると仮定して期待値を計算すると、以下の結果が得られる：

状況	戦略	関数 C_c^i
Case (1)	$y_i = 1$	$2d_i\lambda_{i1} + r_1 + e_{i1}$
Case (2)	$y_i = 2$	$\frac{z_2}{k_2} \{2d_i\lambda_{i2} + r_2 + e_{i2}\} + \frac{(k_2 - z_2)q_2}{k_2} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_1 + e_{i1}\} \\ + \frac{(k_2 - z_2)(1 - q_2)}{k_2} \{2d_i\lambda_{i2} + e_{i2} + s_i\}$
Case (4)	$y_i = 1$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{m_2=z_1-k_1}^{(k_2-z_2)q_2} \left[\frac{z_1 - m_2}{k_1} \{2d_i\lambda_{i1} + r_1 + e_{i1}\} \right. \\ \left. + \frac{(k_1 - z_1 + m_2)q_1}{k_1} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + e_{i2} + s_i\} \right. \\ \left. + \frac{(k_1 - z_1 + m_2)(1 - q_1)}{k_1} \{2d_i\lambda_{i1} + e_{i1} + s_i\} \right]$
	$y_i = 2$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{m_2=z_1-k_1}^{(k_2-z_2)q_2} \left[\frac{z_2}{k_2} \{2d_i\lambda_{i2} + r_2 + e_{i2}\} + \frac{m_2}{k_2} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_1 + e_{i1}\} \right. \\ \left. + \frac{(k_2 - z_2)q_2 - m_2}{k_2} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + e_{i1} + s_i\} \right. \\ \left. + \frac{(k_2 - z_2)(1 - q_2)}{k_2} \{2d_i\lambda_{i2} + e_{i2} + s_i\} \right]$
Case (6)	$y_i = 1$	$\frac{1}{\beta} \sum_{m_2=0}^{(k_2-z_2)q_2} \left[\frac{z_1 - m_2}{k_1} \{2d_i\lambda_{i1} + r_1 + e_{i1}\} \right. \\ \left. + \frac{(k_1 - z_1 + m_2)q_1}{k_1} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + e_{i2} + s_i\} \right. \\ \left. + \frac{(k_1 - z_1 + m_2)(1 - q_1)}{k_1} \{2d_i\lambda_{i1} + e_{i1} + s_i\} \right] \\ + \frac{1}{\beta} \sum_{m_1=1}^{(k_1-z_1)q_1} \left[\frac{z_1}{k_1} \{2d_i\lambda_{i1} + r_1 + e_{i1}\} \right. \\ \left. + \frac{(k_1 - z_1)(1 - q_1)}{k_1} \{2d_i\lambda_{i1} + e_{i1} + s_i\} \right. \\ \left. + \frac{m_1}{k_1} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_2 + e_{i2}\} \right. \\ \left. + \frac{(k_1 - z_1)q_1 - m_1}{k_1} \{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + e_{i2} + s_i\} \right]$

$y_i = 0$ ならば、すべての状況において $C_c^i = s_i$ である。また、Case (2) の $y_i = 1$ は Case (1) の $y = 1$ と同一である。Case(3),(5) はそれぞれ Case(2),(4) において小売業者の役割を交換したものであり、 $y_i = 1$ と $y_i = 2$ が入れ替わったような形となる.. また、Case(1),(6) の $y_i = 2$ における C_c^i は $y_i = 1$ と同じ形となる。

5 平衡解析

このモデルにおける問題は、すべての起こりうる戦略対 $(z_1, z_2, y_1, \dots, y_n)$ に対して

$$\begin{aligned} C_r^1(z_1^*, z_2^*, y_1^*, \dots, y_n^*) &\leq C_r^1(z_1, z_2^*, y_1^*, \dots, y_n^*) \\ C_r^2(z_1^*, z_2^*, y_1^*, \dots, y_n^*) &\leq C_r^2(z_1^*, z_2, y_1^*, \dots, y_n^*) \\ C_c^i(z_1^*, z_2^*, y_1^*, \dots, y_i^*, \dots, y_n^*) &\leq C_c^i(z_1^*, z_2^*, y_1^*, \dots, y_i, \dots, y_n^*) \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

を満たす平衡点 $(z_1^*, z_2^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ を求めることにある。

小売業者に対する平衡解析において費用関数の増加性より次の結果が得られる。前節で述べた6つの領域のうち、Case(1),(2)において $\frac{\partial C_r^1}{\partial z_1} > 0$ 、Case(1),(3)において $\frac{\partial C_r^2}{\partial z_2} > 0$ であるので、平衡点はCase(1),(2),(3)の中には存在しない。よって、平衡解析はCase(4),(5),(6)に限定することができる。さらに、費用関数が量に関して比例するときには、Case(3)-(6)において $\frac{\partial C_r^1}{\partial z_1} < 0$ 、Case(2),(4)-(6)において $\frac{\partial C_r^2}{\partial z_2} < 0$ が得られるため、与えられた顧客の行動政策の組 $(y_1^*, \dots, y_n^*)$ に対する小売業者の平衡戦略は $(z_1^*, z_2^*) = (k_1, k_2)$ となる。これは各小売業者は再配分された顧客かどうかに関係なく、初めに向かってくる顧客の数だけ商品を発注すればよいことを示している。

一方、顧客に対する平衡解析においては与えられた z_1, z_2 に対して Customer i 以外の他の $n-1$ 人のうち、 k_1-1 人が Retailer 1 を、 k_2 人が Retailer 2 を選択したとして、Customer i がどの戦略を選ぶのがよいかを関数 C_c^i 上で比較すればよい。

これらの議論により、次のアルゴリズムが導かれる。

アルゴリズム

- Step 0. ある値 (k_1, k_2) を与える。
- Step 1. 与えられた (k_1, k_2) に対して小売業者の費用関数 C_r^j より (z_1^*, z_2^*) を求める。
- Step 2. $z_1 = z_1^*, z_2 = z_2^*$ を代入した顧客の費用関数 C_c^i の値を比較することにより、Customer i の戦略 y_i を決定する。
- Step 3. $y_i = j$ を選んだ顧客の総数 $k'_j = \# \{i | y_i = j\}, j = 1, 2$ を計算し、 $k_j = k'_j$ ならば停止。そうでなければ k を k' に更新し、Step 1 へ戻る。

6 最後に

本稿では、単一の商品を販売する2つの小売業者と購買意欲が少ない顧客を含む顧客間における行動戦略に関する数理的モデルを提案した。一般的関数に対するモデルに対して平衡点を求めるためのアルゴリズムを与えた。顧客の再配分される確率 q_1, q_2 がともに0に近ければ費用関数の値に関係なく小売業者は初めに訪れる顧客のみに対応するような戦略をとるであろう。また、各状況において起こりうる確率が同様に確からしく、コスト関数が線形構造である場合にも小売業者に対して簡単な結果が得られる。

参考文献

- [1] R.J.Aumann, Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders, *Econometrica*, **34**, 1–17, (1966).
- [2] J.Bryant, Competitive equilibrium with price setting firms and stochastic demand, *International Economic Review*, **21**, 619–626, (1980).
- [3] G.Cachon and M.Lariviere, Capacity choice and allocation: strategic behavior and supply chain performance, *Management Science*, **45**, 1091–1108, (1999).
- [4] G.D.Eppen, Effect of centralization on expected cost in a multi-location newsboy problem, *Management Science*, **25** 498–501, (1979).
- [5] D.P. Heyman and M.J. Sobel, *Stochastic Models, Handbooks in Operations Research and Management Science* 2, Elsevier Science Publishers, North-Holland, (1990).
- [6] H. Hohjo, A competitive inventory model with the customer's general choice probability, *Computers & Mathematics with Applications*, **41** (3-4), 523–530, (2001).
- [7] H.Hohjo, Y.Teraoka, Nash Equilibrium for Three Retailers in an Inventory Model with a Fixed Demand Rate, *Recent Advances in Stochastic Operations Research*, (Eds.) T.Dohi, S.Osaki, K.Sawaki, World Scientific, 265–276, (2007).
- [8] H.Hohjo, A competitive Inventory Problem Between Two Retailers to Customers with Uncertain Departure Time, *Proceedings of the 11th Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty*, Sendai, 123–128, (2008).
- [9] 北條仁志, 小売業者と顧客の振る舞いに関する一考察, 京都大学数理解析研究所講究録 1636 「不確実性と意思決定の数理」, 88–92 (2009).
- [10] S.A.Lippman and K.F.McCardle, The competitive newsboy, *Operations Research*, **45** (1), 54–65, (1997).
- [11] A.Müller, M.Scarsini, M.Shaked, The newsvendor game has a nonempty core, *Games Economic Behavior*, **38**, 118–126, (2002).
- [12] S.Netessine, N.Rudi, Centralized and competitive inventory models with demand substitution, *Operations Research*, **51**, 329–335, (2003).
- [13] M.Parlar, Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands, *Naval Research Logistics*, **35**, 397–409, (1988).
- [14] N.C.Petruzzi and M.Dada, Pricing and the newsvendor problem: a review with extensions, *Operations Research*, **47**, 183–194, (1999).
- [15] M.Slikker, J.Fransoo, M.Wouters, Cooperation between multiple news-vendors with transshipments, *European J. Oper. Res.*, **167**, 370–380, (2005).
- [16] Q.Wang, M.Parlar, A three-person game theory model of the substitutable product inventory problem with random demands, *European Journal of Operational Research*, **76**, 83–97, (1994).