

放物型発展方程式について

阪大 理 八木 厚志

1. 序文

Banach 空間 X において放物型発展方程式

$$(E) \begin{cases} du/dt + A(t)u = f(t), & 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

を考える。ここで、 $\{A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ は稠密な定義域を持つ X の線型閉作用素であり、 f は $[0, T]$ から X への写像である。放物型であるとは、各 t について、 $-A(t)$ が解析的半群の生成作用素になっていることである。すなわち、次の条件が満たされているものとする：

$$(P) \quad \exists \theta \in (0, \pi/2) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\rho(A(t)) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} ; \arg \lambda \in [\theta, 2\pi - \theta]\},$$

$$\exists M \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \lambda \in \Sigma$$

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\| \leq M/(|\lambda| + 1) \quad .$$

この時、以下の性質を持つ X の有界作用素族（発展作用素

) $\{U(t, \delta)\}_{0 \leq \delta \leq t \leq T}$ を構成したい:

i) $U(t, \delta)$ は (t, δ) について強連続。

ii) $U(t, \pi)U(\pi, \delta) = U(t, \delta) \quad 0 \leq \delta \leq \pi \leq t \leq T$

$U(\delta, \delta) = I$ 。

iii) $t > \delta$ について $\mathcal{R}(U(t, \delta)) \subset \mathcal{D}(A(t))$ となり、

$A(t)U(t, \delta)$ は (t, δ) について、 $0 \leq \delta < t \leq T$ で強連続。さらに、

$$\|A(t)U(t, \delta)\| \leq C/(t - \delta)。$$

iv) f が連続であれば、 (E) の解 $u \in C([0, T]; X) \cap C^1((0, T]; X)$, $u(0) = u_0$, が存在するとすればそれは必ず

$$u(t) = U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, \delta)f(\delta) d\delta$$

と表わされる。

v) f が Hölder 連続であれば、任意の $u_0 \in X$ について上式で定義される u は (E) の解になる。

2. 既に得られていた結果と新しい結果について

初めは、 $\mathcal{D}(A(t))$ が t に依らず一定という条件の下で、発展作用素が構成できるための十分条件が考察されたが、ここでは、一般的に、 $\mathcal{D}(A(t))$ が t と共に変化する場合について考察する。過去に得られた十分条件を挙げると、次のようになる:

(1) 1962年 加藤・田辺に依る。

$$\exists N \geq 0 \quad \exists \rho \in (0, 1] \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \lambda \in \Sigma$$

$$\|\partial(\lambda - A(t))^{-1}/\partial t\| \leq N/|\lambda|^\rho,$$

$$\exists K \geq 0 \quad \exists \alpha \in (0, 1] \quad \forall t, s \in [0, T]$$

$$\|dA(t)^{-1}/dt - dA(s)^{-1}/ds\| \leq K|t - s|^\alpha$$

(2) 1964年 田辺に依る。

$$\exists N \geq 0 \quad \exists \rho \in (0, 1] \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\|A(t)^\rho dA(t)^{-1}/dt\| \leq N/|\lambda|^\rho$$

(3) 1976年 講演者に依る。

$$\exists N \geq 0 \quad \exists \rho \in (0, 1] \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \lambda \in \Sigma$$

$$\|A(t)(\lambda - A(t))^{-1} dA(t)^{-1}/dt\| \leq N/|\lambda|^\rho.$$

本講演では、新しい条件

(4)

$$\exists N \geq 0 \quad \exists \rho \in (0, 1] \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \lambda \in \Sigma$$

$$\|\partial(\lambda - A(t))^{-1}/\partial t\| \leq N/|\lambda|^\rho,$$

$$\exists K \geq 0 \quad \exists \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq k} \quad -1 \leq \alpha_i < \beta_i \leq 1$$

$$\forall t, s \in [0, T] \quad \forall \lambda \in \Sigma$$

$$\begin{aligned} & \|A(t)(\lambda - A(t))^{-1} dA(t)^{-1}/dt - A(s)(\lambda - A(s))^{-1} dA(s)^{-1}/ds\| \\ & \leq K \sum_{i=1}^k |\lambda|^{\alpha_i} |t - s|^{\beta_i} \end{aligned}$$

を紹介したい。これらの4つの条件の間には、次のような関係があることが分かっている。

$$(1) \quad (2)$$

$$\cap \quad \parallel$$

$$(4) \supset (3)$$

「 $(3) \subset (2)$ 」については、渡辺道昭氏が報告して載いた。

3. 発展作用素の構成について

仮定(4)の下での発展作用素の構成について、簡単に述べる。加藤・田辺は、Leviの方法を基にして仮定(1), (2)の下で、発展作用素を構成した。今の場合も、そのような方法は可能であると思われるが、ここでは、 $A(t)$ のYosida近似と積分方程式を使うやり方に従う。このような方法は、 $\mathcal{D}(A(t))$ が一定の場合などでの構成方法として、既に知られていた。

自然数 n について、 X の有界作用素族 $\{A_n(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ を

$$A_n(t) = A(t)(1 + n^{-1}A(t))^{-1}$$

と定義する。 $\{U_n(t, \delta)\}_{0 \leq \delta \leq t \leq T}$ を $\{A_n(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ に対応する発展作用素とし、 $\{W_n(t, \delta)\}_{0 \leq \delta < t \leq T}$ を

$$W_n(t, \delta) = A_n(t)U_n(t, \delta) - A_n(t)\exp(-(t-\delta)A_n(t))$$

で定義する。

$U_n(t, \delta)$ 及び $W_n(t, \delta)$ は、次の積分方程式を満足していることが分かる。

$$U_n(t, \delta) = \exp(-(t-\delta)A_n(t)) + \int_{\delta}^t U_n(t, \tau) P_n(\tau, \delta) d\tau$$

$$W_n(t, \delta) = R_{1,n}(t, \delta) + R_{2,n}(t, \delta) + \int_{\delta}^t W_n(t, \tau) P_n(\tau, \delta) d\tau$$

ただし、

$$P_n(t, \delta) = -(\partial/\partial t + \partial/\partial \delta) \exp(-(t-\delta)A_n(t))$$

$$R_{1,n}(t, \delta) = \int_{\delta}^t \{A_n(t) \exp(-(t-\tau)A_n(t)) - A_n(\tau) \exp(-(t-\tau)A_n(\tau))\} P_n(\tau, \delta) d\tau$$

$$R_{2,n}(t, \delta) = \int_{\delta}^t A_n(\tau) \exp(-(t-\tau)A_n(\tau)) P_n(\tau, \delta) d\tau$$

である。

次に、 $n \rightarrow \infty$ の時、各積分核 $P_n(t, \delta)$, $R_{1,n}(t, \delta)$, $R_{2,n}(t, \delta)$ は、それぞれある有界作用素 $P(t, \delta)$, $R_1(t, \delta)$, $R_2(t, \delta)$ に有界収束することが分かる。すなわち、 n に無関係なある定数 C があって、

$$\|P_n(t, \delta)\| \leq C(t-\delta)^{\rho-1}$$

$$\|R_{1,n}(t, \delta)\| \leq C(t-\delta)^{2\rho-1}$$

$$\|R_{2,n}(t, \delta)\| \leq C\{(t-\delta)^{\rho-1} + (t-\delta)^{\delta-1}\}, \quad \delta = \min_{1 \leq i \leq k} \{\beta_i - \alpha_i\}$$

であり、かつ、 $n \rightarrow \infty$ の時

$$P_n(t, \delta) \rightarrow P(t, \delta) \quad \text{強収束}$$

$$R_{1,n}(t, \delta) \rightarrow R_1(t, \delta) \quad \text{強収束}$$

$$R_{2,n}(t, \delta) \rightarrow R_2(t, \delta) \quad \text{強収束}$$

となることが分かる。

実際、 $P_n(t, \lambda)$ については、それが次のように積分表示されることから分かる。

$$P_n(t, \lambda) = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} e^{-\lambda(t-\lambda)} (\partial(\lambda - A_n(t))^{-1} / \partial t) d\lambda$$

ここで、 Γ は Σ に含まれ ∞e^{i0} から $\infty e^{i2\pi}$ に至る、滑らかな積分路である。次に、 $P_n(t, \lambda)$ について上の事実が成り立つという事から、直ちに $R_{1,n}(t, \lambda)$ についても成立する事が従う。最後に、 $R_{2,n}(t, \lambda)$ については少し複雑で、 $R_{2,n}(t, \lambda)$ を

$$\begin{aligned} R_{2,n}(t, \lambda) = & \int_{\lambda}^{\pi} A_n(\alpha) \exp(-(t-\alpha)A_n(\alpha)) P_n(\alpha, \lambda) d\alpha \\ & - \int_{\pi}^t \exp(-(t-\tau)A_n(\tau)) (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} e^{-(\tau-\lambda)\lambda} \lambda (\partial(\lambda - A_n(\tau))^{-1} / \partial \tau) d\lambda d\tau \\ & + \int_{\pi}^t A_n(\tau) \exp(-(t-\tau)A_n(\tau)) (dA_n(\tau)^{-1} / d\tau) \times \\ & \quad \{A_n(t) \exp(-(\tau-\lambda)A_n(t)) - A_n(\tau) \exp(-(\tau-\lambda)A_n(\tau))\} d\tau \\ & + \int_{\pi}^t \{A_n(t) \exp(-(t-\tau)A_n(t)) dA_n(t)^{-1} / dt \\ & \quad - A_n(\tau) \exp(-(t-\tau)A_n(\tau)) dA_n(\tau)^{-1} / d\tau\} A_n(t) \exp(-(\tau-\lambda)A_n(t)) d\tau \\ & + P_n(t, \pi) \exp(-(\pi-\lambda)A_n(t)) \quad , \quad \pi = (t+\lambda)/2 \end{aligned}$$

と分解することによって、評価式と収束性が得られる。

そこで、今得られた $P(t, \lambda), R_1(t, \lambda), R_2(t, \lambda)$ を用いて、積分方程式

$$\begin{aligned} U(t, \lambda) &= \exp(-(t-\lambda)A(t)) + \int_{\lambda}^t U(t, \tau) P(\tau, \lambda) d\tau \\ W(t, \lambda) &= R_1(t, \lambda) + R_2(t, \lambda) + \int_{\lambda}^t W(t, \tau) P(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

の解として、 $\{U(t, \lambda)\}_{0 \leq \lambda \leq t \leq T}$ 及び $\{W(t, \lambda)\}_{0 \leq \lambda < t \leq T}$ を定義

する。 $P_n(t, \Delta)$, $R_{1,n}(t, \Delta)$, $R_{2,n}(t, \Delta)$ が $P(t, \Delta)$, $R_1(t, \Delta)$, $R_2(t, \Delta)$ に、それぞれ有界収束することから、 $U_n(t, \Delta)$ 及び $W_n(t, \Delta)$ も $U(t, \Delta)$, $W(t, \Delta)$ にそれぞれ有界収束することが示される。

このようにして構成された $\{U(t, \Delta)\}_{0 \leq \Delta \leq t \leq T}$ が、実際に、求めるべき発展作用素になっているということが、同時に構成された $\{W(t, \Delta)\}_{0 \leq \Delta < t \leq T}$ を用いることによって証明される。例えば、定義より、 $t > \Delta$ について

$$A(t)(1+n^{-1}A(t))^{-1}U_n(t, \Delta) = W_n(t, \Delta) + A_n(t)\exp(-(t-\Delta)A_n(t))$$

であるが、 $n \rightarrow \infty$ の時

$$\text{右辺} \rightarrow W(t, \Delta) + A(t)\exp(-(t-\Delta)A(t)) \quad \text{強収束}$$

$$(1+n^{-1}A(t))^{-1}U_n(t, \Delta) \rightarrow U(t, \Delta) \quad \text{強収束}$$

であることと、 $A(t)$ が閉作用素であることから、

$$\mathcal{R}(U(t, \Delta)) \subset \mathcal{D}(A(t))$$

$$A(t)U(t, \Delta) = W(t, \Delta) + A(t)\exp(-(t-\Delta)A(t))$$

を得る。また、 $\varepsilon > 0$ とし

$$U_n(t, \Delta) - U_n(\Delta + \varepsilon, \Delta) = - \int_{\Delta + \varepsilon}^t A_n(\tau) U_n(\tau, \Delta) d\tau$$

が成り立っているが、

$$\|A_n(t)U_n(t, \Delta)\| \leq C(t-\Delta)^{-1}$$

かつ、 $n \rightarrow \infty$ の時

$$A_n(t)U_n(t, \Delta) \rightarrow A(t)U(t, \Delta) \quad \text{強収束}$$

であることより

$$U(t, \Delta) - U(\Delta + \varepsilon, \Delta) = - \int_{\Delta + \varepsilon}^t A(\tau) U(\tau, \Delta) d\tau$$

すなわち、 $t > \Delta$ について

$$\partial U(t, \Delta) / \partial t = -A(t) U(t, \Delta)$$

を得る。

4. 応用について。

Ω を、境界が C^{2m} 級である R^n の有界領域とする。 A は、

$$A(x, t, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha, \quad x \in \bar{\Omega}, t \in [0, T]$$

$$a_\alpha \in C^{0,1}(\bar{\Omega} \times [0, T]), \quad |\alpha| = 2m$$

$$a_\alpha \in B^{0,1}(\Omega \times [0, T]), \quad |\alpha| < 2m$$

であるような微分作用素で、ある $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ があって、任意の $\theta \in [\theta_0, 2\pi - \theta_0]$ について

$$L_\theta(x, t, D_x, D_y) = A(x, t, D_x) - e^{i\theta} D_y^{2m}$$

は $(x, y) \in \Omega \times (-\infty, \infty)$ について楕円型になっているものとする。次に、 B_j を

$$B_j(x, t, D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x, t) D^\beta, \quad j = 1, \dots, m$$

$$b_{j\beta} \in C^{2m-m_j,1}(\bar{\Omega} \times [0, T])$$

であるような微分作用素で、 $\{B_j(x, t, D)\}_{1 \leq j \leq m}$ は正規境界微分作用素となり、 $\theta \in [\theta_0, 2\pi - \theta_0]$ について

$$(L_\theta(x, t, D_x, D_y), \{B_j(x, t, D)\}_{1 \leq j \leq m}, \Omega \times (-\infty, \infty))$$

が補完条件を満足しているようなものとする。

この時、次の放物型方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t + A(x,t,D)u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, t \in [0, T] \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ B_j(x,t,D)u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases}$$

を $X = L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) で解くことを考える。そのために

$\{A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ を

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{u \in W_p^{2m}(\Omega); B_j(x,t,D)u(x)|_{\partial\Omega} = 0, 1 \leq j \leq m\}$$

$$\{A(t)u\}(x) = A(x,t,D)u(x)$$

と定義すると、この $\{A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ は条件 (P) 及び (3) (従って (2), (4)) を満たす。なお、(3) の定数 ρ は

$$\rho = \begin{cases} 1, & \forall j \quad (\partial/\partial t) B_j(x,t,D) \equiv 0 \text{ の場合} \\ \min\{m_j/2m; (\partial/\partial t) B_j(x,t,D) \not\equiv 0\}, & \exists j \quad (\partial/\partial t) B_j(x,t,D) \not\equiv 0 \end{cases}$$

で与えられる。

係数の t についての滑らかさについて

$$a_\alpha \in B^{0,1+\alpha}(\Omega \times [0,T])$$

$$b_{j\beta} \in B^{2m-m_j,1+\alpha}(\bar{\Omega} \times [0,T]), \quad \alpha > 0$$

を仮定すれば、上で定義された $\{A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ は条件 (1) を満たす。

もう一つ応用例を示す。H を Hilbert 空間とし、K を代数的にも位相的にも H の部分空間であるような、Hilbert 空間

とする。内積をそれぞれ $(\cdot, \cdot)$, $((\cdot, \cdot))$ で表わす。 $\{a(t; \cdot, \cdot)\}$
 $0 \leq t \leq T$ は $K \times K$ 上で定義された連続二次型式の族、 $\{V(t)\}$
 $0 \leq t \leq T$ は K の閉部分空間の族であり、次の仮定を満たすもの
 とする：

○ $V(t)$ は H で稠密。

○ K から $V(t)$ 上への射影 $P(t), Q(t)$ で

$$P, Q \in C^{1+\alpha}([0, T]; \mathcal{L}(K, K)), \quad \alpha > 0$$

となるものが存在する。

○ $\forall u, v \in K$ について

$$a(\cdot; u, v) \in C^1([0, T]; \mathbb{C})$$

さらに、 $\exists M \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall u, v \in K$

$$|(\partial/\partial t) a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\|,$$

$$\lim_{t \rightarrow s} \sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ \|v\| \leq 1}} |(\partial/\partial t) a(t; u, v) - (\partial/\partial s) a(s; u, v)| = 0.$$

○ $\exists \delta > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall u \in V(t)$

$$\operatorname{Re} a(t; u, u) \geq \delta \|u\|^2.$$

この時、 $\{A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ を

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{u \in V(t); \exists f \in H \quad \forall v \in V(t) \quad a(t; u, v) = (f, v)\}$$

$$A(t)u = f$$

で定義することになると、 $\{-A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ は条件 (P) 及び
 (4) を満足する。なお、(4) の $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ は今の場合

$$\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq K} = \{(-1/2, 0), (0, \alpha), (1/2, 1)\}$$

で与えられる。

$(\partial/\partial t) a(t; u, v)$ の滑らかさについて

$$\exists M \geq 0 \quad \exists \alpha \in (0, 1] \quad \forall t, s \in [0, T] \quad \forall u, v \in K$$

$$|(\partial/\partial t) a(t; u, v) - (\partial/\partial s) a(s; u, v)| \leq M |t - s|^\alpha \|u\| \|v\|$$

を仮定することによれば、 $\{-A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ は条件 (1) を満足する。

参 考 文 献

- [1] T. Kato and H. Tanabe, On the abstract evolution equation, Osaka Math. J., 14 (1962), 107-133.
- [2] H. Tanabe, Note on singular perturbation for abstract differential equations, Osaka J. Math., 1 (1964), 239-252.
- [3] A. Yagi, On the abstract linear evolution equations in Banach spaces, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 290-303.
- [4] A. Yagi, On the abstract evolution equations of parabolic type, to appear.
- [5] S. G. Krein, Linear Differential Equations in a Banach space, Moskow, 1967.

[6] H. Tanabe, *Evolution Equations*, Iwanami, Tokyo, 1975.