

## 有限群の $SK_1$ について

信州大教養部 大林忠夫 (Tadao Obayashi)

序. 有限可換群  $\pi$  の特殊  $K_1$ -群  $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$  は, 合同部分群問題の解決 (Bass-Milnor-Serre [3]) の成果に基づいて, Dennis, Stein 等により詳しく調べられている (Stein の総合報告 [16] を参照). また最近, surgery 理論に関連しての Wall による  $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$  の研究や, Rehman-Stukler, Bak 等による非可換環の  $K_2$ -群の研究を背景にして, Oliver は非可換有限群に対する  $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$  の研究を大きく前進させた.

この講演では, "SK<sub>1</sub> on finite group rings" と題された Oliver の一連の論文 (引用文献参照) の概要を紹介する.

### §1. 代数的 $K$ -理論からの準備.

環  $A$  上の一般線形群を  $GL_n(A)$ , 基本行列  $E_{ij}(a)$  全体で生成される部分群を  $E_n(A)$  とし,  $GL(A) = \varinjlim GL_n(A)$ ,  $E(A) = \varinjlim E_n(A)$  とおくと, 交換子群に対し,  $E(A) = [E(A), E(A)] = [GL(A), GL(A)]$  となる.

$A$  上の  $K_i$ -群 ( $i=1, 2$ ) は次によって定義される.

$$K_1(A) = H_1(GL(A)) \quad (\cong GL(A)/E(A))$$

$$K_2(A) = H_2(E(A))$$

$K_i$  は環の圏から、可換群の圏への covariant な関手を作る。

可換環  $A$  に対しては、通常 of 行列式から定義される写像

$\det: K_1(A) \rightarrow A^*$  ( $A$  の単数群) は split する。

$$K_1(A) \cong A^* \oplus SK_1(A) \quad (SK_1(A) = \ker(\det)).$$

特に (可換) 体  $F$  に対し、 $K_1(F) \cong F^*$ 。また、可換半局所環

や代数体の整数環  $A$  に対しても、 $K_1(A) \cong A^*$  であることが知ら

れている ([3], Bass [2])。

$B = M_n(D)$  が体  $F$  上の中心の単純多元環ならば、Dindoane determinant によって、 $K_1(B) \cong B^*/[B^*, B^*] \cong D^*/[D^*, D^*]$  となる。

また、被約ノルムによつて、写像  $\text{nr}_B: K_1(B) \rightarrow F^*$  が定義される。これは、 $B$  が半単純多元環の場合にも拡張される。

$R$  を Dedekind 整域  $\mathcal{R}$  の商体とし、 $B$  を  $R$  上の半単純多元環とする。 $B$  の  $R$ -order  $A$  に対して

$$SK_1(A) = \ker[\text{nr}_A: K_1(A) \rightarrow K_1(B) \xrightarrow{\text{nr}_B} \mathcal{R}(B)^*] \quad (\mathcal{R}(B) = B \text{ の中心})$$

と定義する。 $\mathcal{R}$  が代数体または  $p$ -進体の整数環ならば、 $\text{nr}_B$

は injective 故に  $SK_1(A) = \ker[K_1(A) \rightarrow K_1(B)]$  であり、このとき、

$SK_1(A)$  は有限群である ([2], Wall [17])。

Dedekind 整域  $\mathcal{R}$  の標数が 0 のとき、有限群  $\pi$  の  $\mathcal{R}$  上の群環

$R\pi$  に対して、 $K(R\pi) = \text{Im}(\text{nr}_{R\pi})$  とおくと、完全列の injection

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & SK_1(R) & \longrightarrow & K_1(R) \oplus \pi^{ab} & \longrightarrow & R^* \oplus \pi^{ab} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma = \text{urd} \\
0 & \longrightarrow & SK_1(R\pi) & \longrightarrow & K_1(R\pi) & \xrightarrow{\text{urd}} & K_1'(R\pi) \longrightarrow 0
\end{array}$$

が存在する。そこで,  $Wh(R\pi) = \text{Coker}(\beta)$ ,  $Wh'(R\pi) = \text{Coker}(\gamma)$  であり、完全列  $0 \rightarrow \text{Coker}(\alpha) \rightarrow Wh(R\pi) \rightarrow Wh'(R\pi) \rightarrow 0$  が得られる。特に  $R$  が代数的または  $p$  進的の整数環の場合は,  $Wh'(R\pi)$  は *torsion free* である (Wall [18])。このときは,  $SK_1(R) = 0$  で、また  $SK_1(R\pi)$  は有限群だから,  $SK_1(R\pi)$  が  $Wh(R\pi)$  の *torsion part* をなす。 $Wh(\mathbb{Z}\pi)$  は  $\pi$  の Whitehead 群と呼ばれてゐるもので、その幾何学的意義については、松田氏の講演を参照されたい。

任意の環  $A$  に対して,  $E(A)$  は *perfect* 群であるから,  $K_2(A) = H_2(E(A))$  は,  $E(A)$  の普通中心拡大の kernel に同型である。記号  $x_{ij}(a)$  ( $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $a \in A$ ) を生成元,  $x_{ij}(a+b) = x_{ij}(a)x_{ij}(b)$ ,  $[x_{ij}(a), x_{kl}(b)] = 1$  ( $i \neq l, j \neq k$ ),  $[x_{ij}(a), x_{je}(b)] = x_{ie}(ab)$  ( $i \neq l$ ) と基本関係として定義される群を  $St_n(A)$  とすると,

$$St(A) = \varinjlim St_n(A) \xrightarrow{\varphi} E(A) \quad (x_{ij}(a) \mapsto e_{ij}(a))$$

は普通中心拡大となり, したがって  $K_2(A) \cong \ker(\varphi)$  である。

$A^* \ni a$  に對し,  $w_{ij}(a) = x_{ij}(a)x_{ji}(-a')x_{ij}(a)$ ,  $h_{ij}(a) = w_{ij}(a)w_{ij}(-1)$  とおき,  $A^* \times A^* \ni (a, b)$  に對し

$$c^A(a, b) = h_{12}(a)h_{12}(b)h_{12}(ba)^{-1}$$

と定めると,  $\varphi(c^A(a, b)) = \begin{pmatrix} a b a^{-1} b^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  である。よって,

$ab=ba$  ならば,  $c^A(a, a) \in K_2(A)$  となる。

一般に, 可換群  $\mathcal{S}$  に値をとる行  $F$  上の双乗法的写像

$c: F^* \times F^* \rightarrow \mathcal{S}$  がさらに  $c(a, 1-a) = 1$  ( $a, 1-a \in A^*$ ) を満たすとき,  $F$  上の *symbol* と呼ばれる。  $c^F: F^* \times F^* \rightarrow K_2(F)$  は  $F$  上の普通 *symbol* である (Matsumoto [8])。

$B$  が行  $F$  上の中心的単純多元環ならば,  $c^B: F^* \times B^* \rightarrow K_2(B)$  から, 写像  $\bar{c}^B: F^* \times B^*/[B^*, B^*] \rightarrow K_2(B)$  が得られる。

右図に,  $\text{nrdb}$  が *bijective* になる

場合は, 写像  $\bar{c}^B \circ \text{nrdb}^{-1}: F^* \times F^* \rightarrow K_2(B)$

は  $F$  上の *symbol* であり, よって

$$\begin{array}{ccc} F^* \times B^*/[B^*, B^*] & \xrightarrow{\bar{c}^B} & K_2(B) \\ \uparrow \eta & & \uparrow \psi \\ F^* \times K_1(B) & & \\ \downarrow \text{nrdb} & \xrightarrow{c^F} & K_2(F) \\ F^* \times F^* & & \end{array}$$

図を可換にする準同型  $\psi: K_2(F) \rightarrow K_2(B)$  が一意的に定まる。

特に,  $B$  が  $p$ -進行  $\mathbb{Q}_p$  上の単純多元環ならば,  $\text{nrdb}$  は *bijective* であり,  $\psi$  が定まるが, このとき  $\psi$  は *surjective* になる (Rehman-Stuhler [14], Bak)。

環  $A$  の ideal  $\mathcal{O}$  に対して,  $GL_n(A, \mathcal{O}) = \ker [GL_n(A) \rightarrow GL_n(A/\mathcal{O})]$ , 基本行列  $E_{ij}(a)$  ( $a \in \mathcal{O}$ ) 全体で生成された  $GL_n(A)$  の正規部分群を  $E_n(A, \mathcal{O})$  とし,  $GL(A, \mathcal{O}) = \varinjlim GL_n(A, \mathcal{O})$ ,  $E(A, \mathcal{O}) = \varinjlim E_n(A, \mathcal{O})$  とおくと,  $E(A, \mathcal{O}) = [GL(A), GL(A, \mathcal{O})]$  が成り立つ。よって, 可換群  $SK_1(A, \mathcal{O}) = GL(A, \mathcal{O})/E(A, \mathcal{O})$  が定義される。  $SK_1(A)$  が考えられる場合は,  $SK_1(A) = SL(A)/E(A)$  なる  $GL(A)$  の正規部分群  $SL(A)$  に対して  $SL(A, \mathcal{O}) = SL(A) \cap GL(A, \mathcal{O})$  において,

可換群  $SK_1(A, \mathcal{O}) = SL(A, \mathcal{O})/E(A, \mathcal{O})$  を定義する。このとき、次の完全列が得られる。

$$K_2(A) \rightarrow K_2(A/\mathcal{O}) \rightarrow SK_1(A, \mathcal{O}) \rightarrow SK_1(A) \rightarrow SK_1(A/\mathcal{O})$$

特に  $A$  が代数体の整数環の場合は、 $SK_1(A, \mathcal{O})$  の構造は完全に決定されている ([3])。

右を環の pullback 図とする。  $f_2$  または  $g_2$  が surjective のとき、環の cartesian square と呼ぶことにする。また、右が位相環の pullback 図で、 $f_i$  が open,  $g_i$  が open かつ dense であるとき、環の approximation square という。環の cartesian square, または approximation square から、次の Mayer-Vietoris の完全列が得られる (詳しくは, Bak [1] 参照)。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & B \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\ C & \xrightarrow{f_2} & D \end{array}$$

$$K_2(A) \rightarrow K_2(B) \oplus K_2(C) \rightarrow K_2(D) \xrightarrow{\partial} K_1(A) \rightarrow K_1(B) \oplus K_1(C) \rightarrow K_1(D)$$

## 5.2. $\mathbb{Q}_p$ -群とその構造.

$\mathbb{Q}$  を有理数体,  $\mathbb{Q}_p$  を  $p$  進体とする。以下では、 $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大体と各々  $n$  体,  $p$  体 といひ、その整数環と  $n$  環,  $p$  環 と呼ぶことにする。  $R$  が  $\mathbb{Q}$  の部分環のとき、 $\mathbb{Q}$  上の半単純多元環  $B$  とその  $R$ -order  $A$  に対し、 $\widehat{A}_p = A \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}_p$ ,  $\widehat{B}_p = B \otimes_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathbb{Q}}_p$  とおく。 approximation square

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_p \hat{A}_p & \longrightarrow & \prod_p (\hat{B}_p, \hat{A}_p) \text{ (制限直積)},
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & A[\frac{1}{p}] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{A}_p & \longrightarrow & \hat{B}_p
 \end{array}$$

に、各々 Mayer-Vietoris を適用して、次の完全列を得る。

補題 1.

$$(1) \quad K_2(B) \rightarrow \sum_p \operatorname{Coker}[K_2(\hat{A}_p) \rightarrow K_2(\hat{B}_p)] \xrightarrow{\partial} SK_1(A) \rightarrow \sum_p SK_1(\hat{A}_p) \rightarrow 0$$

$$(2) \quad K_2(A[\frac{1}{p}]) \oplus K_2(\hat{A}_p) \rightarrow K_2(\hat{B}_p) \xrightarrow{\partial_p} SK_1(A) \rightarrow SK_1(A[\frac{1}{p}]) \oplus SK_1(\hat{A}_p) \rightarrow 0$$

そこで、(A の類群  $cl(A)$  に倣って) 次のように定義する。

$$cl_1(A) = \operatorname{Im}(\partial) = \ker[SK_1(A) \rightarrow \sum_p SK_1(\hat{A}_p)]$$

$SK_1(A)$  は  $cl_1(A)$  と局所的な場合の  $SK_1$  の研究に帰着される。

後者に関しては、群環の場合次のことが知られている。

定理 2 (Wall [17]).  $p$  環  $R$  と有限群  $\pi$  に対して

(1)  $SK_1(R\pi)$  は (有限)  $p$  群 である。

(2)  $\pi$  の Sylow  $p$  部分群  $\pi_p$  が可換ならば、 $SK_1(R\pi) = 0$ 。

特に  $\pi$  が可換群ならば、任意の  $n$  環  $R$  に対して、 $SK_1(R\pi) = 0$

( $\forall p$ ) となり、 $cl_1(R\pi) = SK_1(R\pi)$  が成り立つ。

$cl_1$  の研究は、 $K_2$ -群の研究に帰着される。

補題 3. (1)  $\varphi: B \rightarrow B'$  が  $\mathbb{Q}$  上の半単純多元環の surjection

ならば、 $\varphi(A) \subseteq A'$  なる  $B, B'$  の  $R$ -order  $A, A'$  に対し、

$\varphi_*: cl_1(A) \rightarrow cl_1(A')$  は surjective である。

(2)  $A \subseteq A'$  を  $B$  の  $R$ -order,  $\mathfrak{a} \subseteq A$  に含まれる  $A'$  の最大の

ideal とする。 $p \nmid \mathfrak{a}$  ならば、 $p$  成分について

$cl_1(A)_{(p)} \cong cl_1(A')_{(p)}$  が成り立つ。

(証明) (1) 任意の  $p$  に対して,  $K_2(\widehat{B}_p) \rightarrow K_2(\widehat{B}'_p)$  は surjective だから, 補題 1 の (1) より明らか。 (2) (1) より  $cl_1(A)_{(p)} \rightarrow cl_1(A')_{(p)}$  は surjective.  $p \nmid \alpha$  より,  $A/\alpha$  は位数が  $p$  と素な有限環だから  $K_2(A/\alpha)$  の位数も  $p$  と素である。

よって, 次の cartesian square に,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\alpha & \longrightarrow & A'/\alpha \end{array}$$

Mayer-Vietoris を適用して,  $cl_1(A)_{(p)} \rightarrow cl_1(A')_{(p)}$  の injectivity がいえる。

$cl_1$  の  $p$  成分については, 一般に次が成り立つ。

#### 補題 4

(1)  $\mathbb{Q}$  上の半単純多元環  $B$  の  $R$ -order  $A$  に対して,  $A[\frac{1}{p}]$  の各単純成分への像が hereditary ならば

$$K_2(A[\frac{1}{p}])_{(p)} \oplus K_2(\widehat{A}_p)_{(p)} \rightarrow K_2(\widehat{B}_p)_{(p)} \xrightarrow{\partial_p} cl_1(A)_{(p)} \rightarrow 0 \quad (\text{完全})$$

(2) 特に, 有限群  $\pi$  の  $n$  環上の群環  $R\pi$  に対しては

$$K_2(R[\frac{1}{p}]\pi)_{(p)} \oplus K_2(\widehat{R}_p\pi)_{(p)} \rightarrow K_2(\widehat{R}_p\pi)_{(p)} \xrightarrow{\partial_p} cl_1(R\pi)_{(p)} \rightarrow 0 \quad (\text{完全})$$

(証明) maximal order に対しては  $cl_1 = 0$  となる (Keating [6])

ことから, hereditary order に対しても  $cl_1 = 0$  が導かれるので,

$cl_1(A[\frac{1}{p}])_{(p)} = 0$  である。よって, 補題 1, (2) より, (1) を得る。

(2) についても,  $cl_1(R[\frac{1}{p}]\pi)_{(p)} = 0$  をいえる。一般に,

$K_1(R\pi)_{(p)}$ ,  $Wh(R\pi)_{(p)}$ ,  $SK_1(R\pi)_{(p)}$ , しなかく  $cl_1(R\pi)_{(p)}$  に

対して, Witt の誘導定理が成り立つ。よって,  $\pi$  は  $p$ -

$H$ -elementary としてよい。このとき,  $R[\frac{1}{p}]\pi$  の各単純成分

$\wedge$  の像は *hereditary* となり, (1) から (2) が示される。

$\pi$  は任意の有限群で,  $B$  は  $\mathbb{Q}\pi$  の単純成分とする。また,  $R$  を  $B$  の中心  $H$  の整数環とする。任意の素数  $p$  に対して,  $\hat{\psi}: K_2(\hat{R}_p) \rightarrow K_2(\hat{B}_p)$  が定義され, それは *surjective* である (§1).  
もしも  $\pi$  が *Eichler* 条件を満たす ( $R\pi$  の単純成分の *division* に 4 元数体が現われない) ならば,  $\text{nr}_B$  は *bijective*. よって  $\psi: K_2(H) \rightarrow K_2(B)$  が定義され, 次の可換図を得る。

$$\begin{array}{ccccc} K_2(R) & \xrightarrow{\alpha} & K_2(H) & \xrightarrow{\psi} & K_2(B) \\ \downarrow \beta & & \downarrow & & \downarrow \\ K_2(\hat{R}_p) & \xrightarrow{\gamma} & K_2^*(\hat{R}_p)_{(p)} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)} \end{array}$$

(ただし,  $K_2^*(\ ) = K_2(\ ) / (\text{divisible})$ ). Dennis-Stein ([4]) より,  $\gamma$  は *surjective* で, かつ十分大きな  $n$  に対して,  $K_2(\hat{R}_p) \cong K_2(R/p^n)$ .  
よって,  $\text{Coker}(\beta) \cong SK_1(R, p^n R)$ . ここでさらに,  $H$  が *not totally imaginary* ならば,  $SK_1(R, p^n R) = 0$  ([3]) より,  $\beta$  も *surjective* になる。すなわち, 任意の  $p$  に対して,  $K_2(R) \xrightarrow{\psi \circ \alpha} K_2(B) \rightarrow K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}$  は *surjective* である。よって, 写像

$$\text{Ker} [K_2(B) \rightarrow \sum_{p \neq p} K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}] \rightarrow K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}$$

は *surjective* となり, 補題 1, (1) と 補題 4, (2) の完全列より,

$$cl_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)} = 0 \quad (\forall p), \quad \text{したがって,} \quad cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0 \quad \text{となる。特}$$

に次の場合は, 上の諸条件が満たされる。

定理 5  $\pi$  の絶対既約表現がすべて実数体  $\mathbb{R}$  で実現される

ならば,  $cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ .

特に、対称群  $S_n$ , dihedral 2-群  $D(2^n)$  に対して

$$cl_1(\mathbb{Z}S_n) = cl_1(\mathbb{Z}D(2^n)) = 0.$$

$cl_1$  に対して, Witt の誘導定理 より強い, Brauer の誘導定理 が成り立つ。  $R$  を  $n$  環,  $F$  を その商環 とする。有限群  $\pi$  の  $p$ -elementary な部分群全体の類を  $\mathcal{E}_p$  とすると

定理 6. (1)  $cl_1(R\pi)_{(p)} = \sum_{\pi \in \mathcal{E}_p} \text{Im} [cl_1(R\pi)_{(p)} \rightarrow cl_1(R\pi)_{(p)}]$

(2)  $p$ -elementary な群  $\mathbb{Z}_n \times \pi$  ( $\pi$ :  $p$ -群,  $p \nmid n$ ) に対して,

$$F\mathbb{Z}_n = \sum F_i, \quad R_i = F_i \text{ の整数環 とすると}$$

$$cl_1(R[\mathbb{Z}_n \times \pi])_{(p)} \cong \sum cl_1(R_i \pi)_{(p)}$$

(証明) (2) は補題 3 の (2). (1) は Witt の誘導定理 と補題 4

の完全列より,  $p$ -群  $\pi$  が  $K/F$  の Galois automorphism とし

て作用してゐるとき,  $K_2(\hat{R}_p[\rho]) \rightarrow K_2(\hat{R}_p[\pi]^\dagger)$  (ただし,

$\rho$  は  $\pi$  の作用の kernel で,  $\hat{R}_p[\pi]^\dagger$  は twisted  $p$ -群環) の

surjectivity に帰着される。ここで inclusion  $\hat{R}_p[\rho] \hookrightarrow \hat{R}_p[\pi]^\dagger$

が同一の極大部分環  $E$  を有する単純環  $A \subseteq B$  による対

角写像  $A^\dagger \rightarrow M_r(B)$  の形の組で表されること, かつ  $\mathbb{Q}_p$  上

の単純多元環  $A$  の極大部分環  $E$  に対して,  $K_2(E) \rightarrow K_2(A)$

が surjective になることから,  $K_2(\hat{R}_p[\rho]) \rightarrow K_2(\hat{R}_p[\pi]^\dagger)$  の

surjectivity が示される。

$\pi$  の Sylow  $p$ -群  $\pi_p$  が可換ならば,  $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$  (定理 2) より

$SK_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)} = cl_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)}$ . また,  $p$  が不分岐な  $n$  環  $R$  に対して,

$SK_1(R\mathbb{Z}_p^n) = SK_1(R[\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^n]) = 0$  となることが分っている ([2]) ので、上定理より可換群の場合の Bass の結果 ([2]) が非可換群に拡張される。

系.  $\pi_p \cong \mathbb{Z}_p^n$  または  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^n$  ならば,  $SK_1(\mathbb{Z}\pi)_p = 0$ . 特に,

*metacyclic* 群  $\pi$  に対して,  $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$  である。

上誘導定理により,  $p$  群  $\pi$  と  $\pi$  環  $R$  ( $p$  は不分岐) に対する  $\mathcal{C}_1(R\pi)$  が問題となる。まず, Milnor ([9]) による transfer 写像  $tr: K_1(R\pi) \rightarrow K_1(\mathbb{Z}\pi)$  から得られる  $tr: \mathcal{C}_1(R\pi) \rightarrow \mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi)$  は *surjective* であることが示される。また,  $\mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi^{ab})$  も *surjective* (補題3) だから,  $\mathcal{C}_1(R\pi)$  の研究に可換  $p$  群  $\pi$  の  $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$  に関する諸結果 ([16]) が利用できる。

定理 7.  $R$  が *totally imaginary* ( $2$  は不分岐) なら,  $2$  群  $\pi$  に対して

$$\mathcal{C}_1(R\pi) = 0 \iff \pi \cong \mathbb{Z}_2^n \text{ または } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^n$$

(証明)  $\mathcal{C}_1(R\pi) = 0$  とすると, 上の注意より  $\mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi^{ab}) = SK_1(\mathbb{Z}\pi^{ab}) = 0$

(したがって,  $\pi$  または  $\pi^{ab} \cong \mathbb{Z}_2^k, (\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^m$  ([16])). 定

理の結果を得るには, 補題3 を用いて,  $\pi \cong Q(8), D(8),$

$(\mathbb{Z}_2)^3$  のとき,  $\mathcal{C}_1(R\pi) \neq 0$  を示すことに帰着されるが, こ

れは  $K_2$ -群に関するやや複雑な計算によって確かめられる。

$R (\neq \mathbb{Z})$  が *not totally imaginary* の場合に,  $\mathcal{C}_1(R\pi) = 0$  なる  $p$  群  $\pi$  を決定することは難かしいようである。ただし, *dihedral* 群  $D(2^n)$ , *quaternionic* 群  $Q(2^n)$ , *semidihedral* 群  $S(2^n)$  に対しては,

$SK_1(R, {}^2R)$  の構造に関する Bass-Milnor-Serre の結果 ([3]) と定理 7 より、次が成り立つ。

定理 8.  $R$ :  $n$  環 ( $2$  は不分割),  $\pi \cong D(2^n), Q(2^n), S(2^n)$  のとき,

$$cl_1(R\pi) = 0 \quad (R: \text{not totally imaginary})$$

$$cl_1(R\pi) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (R: \text{totally imaginary})$$

$R = \mathbb{Z}$  の場合は、非可換  $p$  群に対して次が示される。

定理 9. (1)  $cl_1(\mathbb{Z}\pi) \neq 0$  ( $p$ : odd)

$$(2) \quad cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0 \Rightarrow \pi^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^k \quad (p=2)$$

ここで、(2) の逆は一般には成り立たない。実際、 $\pi^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^3$  となる非可換 2 群  $\pi$  で、 $cl_1(\mathbb{Z}\pi) \neq 0$  となる例が得られる。

### §3. $SK_1$ の局所的構造.

以下では、 $\pi$  は  $p$  群とし、 $R$  は  $p$  環とする。 $R$  は  $p$  進位相で完備な位相環である。群環  $R\pi$  は局所環であるから、 $R\pi^* = GL_1(R\pi) \xrightarrow{i} K_1(R\pi)$  は surjective である ([2])。特に、 $I = I(R\pi) = \ker[R\pi \rightarrow R]$  を augmentation ideal とすると、 $1+I \subseteq R\pi^*$  であり、 $Wh(R\pi)$  は  $\uparrow(1+I)$  で生成され、また、 $K_1(R\pi, pI)$  は  $\uparrow(1+pI)$  で生成される。

$$\bar{I} = I / \langle x - g x g^{-1} \mid x \in I, g \in \pi \rangle$$

とみると、 $p\bar{I}$ ,  $K_1(R\pi, pI)$  は  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -自由加群と見なされ、両者の階数は一致する。特に  $K_1(R\pi, pI)$  は torsion free である。

$pI$  と  $1+pI$  においては,  $p$  進指数関数,  $p$  進対数関数

$$\text{Exp}(p\alpha) = 1 + p\alpha + \frac{p^2}{2!}\alpha^2 + \frac{p^3}{3!}\alpha^3 + \dots \quad (\alpha \in I)$$

$$\text{Log}(1+p\alpha) = p\alpha - \frac{p^2}{2}\alpha^2 + \frac{p^3}{3}\alpha^3 - \dots \quad (\alpha \in I)$$

が定義され, 互に逆写像となる。特に,  $\text{Exp}$  は  $1+pI \xrightarrow{\eta} K_1(R\pi, pI)$  を合成して, 同型

$$\exp: p\bar{I} \xrightarrow{\sim} K_1(R\pi, pI)$$

が得られる (群演算が保たれることは,  $pI \ni \alpha, \beta$  に対して, torsion free な群  $K_1(R\pi, pI)$  においては,  $(1+p^n\alpha)^{\frac{1}{p^n}}(1+p^n\beta)^{\frac{1}{p^n}} \equiv (1+p^n(\alpha+\beta))^{\frac{1}{p^n}} \pmod{p^n}$  が成り立つことと,  $\text{Exp}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+p^n\alpha)^{\frac{1}{p^n}}$  であることからいえる)。

一方, 十分大きな  $n$  に対して  $I^{\frac{1}{p^n}} \leq pI$  となるから,  $p$  進対数  $\text{Log}: 1+I \rightarrow I \otimes \mathbb{Q}$  が定義される。したがって, そのような  $n$  を一つ定めると,  $\text{Log}(1+\alpha) = \frac{1}{p^n} \text{Log}(1+\alpha)^{p^n}$  より次の可換図が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Log}: & 1+I & \xrightarrow{p^n \text{乗}} & 1+pI & \xrightarrow{\text{Exp}^{-1}=\text{Log}} & pI & \xrightarrow{\frac{1}{p^n} \text{倍}} & I \otimes \mathbb{Q} \\ & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{Wh}(R\pi) & \xrightarrow{p^n \text{乗}} & K_1(R\pi, pI) & \xrightarrow{\exp^{-1}} & p\bar{I} & \xrightarrow{\frac{1}{p^n} \text{倍}} & \bar{I} \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

下の写像の合成から, 導同型

$$\log: \text{Wh}(R\pi) \rightarrow \bar{I} \otimes \mathbb{Q}$$

が定義される。  $SK_1(R\pi)$  が  $\text{Wh}(R\pi)$  の torsion part であることより,  $\ker(\log) = SK_1(R\pi)$  となる。特に,  $1+I \ni 1+\alpha$  に対して,  $\eta(1+\alpha) \in SK_1(R\pi) \iff \text{Log}(1+\alpha) = 0 \text{ in } \bar{I} \otimes \mathbb{Q}$ 。この

判定条件と、やや複雑な考察から次の結果が得られるが、詳細は原論文を参照されたい。

定理 10.  $p$  群  $\pi$  に商群が巡回群となる可換正規部分群が存在すれば、任意の  $p$  環  $R$  に対して、 $SK_1(R\pi) = 0$  である。  
特に、*dihedral*, *quaternionic*, *semidihedral*  $2$  群  $\pi$  に対して、 $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ 。よって、定理 8 から次が得られる。(一般の *dihedral* 群  $D(2n)$  に対して、 $SK_1(\mathbb{Z}D(2n)) = 0$  が Magurn [7] によって示されている)。

$$\text{系} \quad SK_1(\mathbb{Z}D(2^n)) = SK_1(\mathbb{Z}Q(2^n)) = SK_1(\mathbb{Z}S(2^n)) = 0.$$

ここでは、 $\log: WH(R\pi) \rightarrow \bar{I} \otimes \mathbb{Q}$  を用いて、 $SK_1(R\pi)$  の一般的表現を求めることについて説明しよう。不分岐な  $p$  環  $R$  に対して、 $\varphi$  を  $R$  の Frobenius 置換:  $\varphi(\lambda) \equiv \lambda^p \pmod{p}$ 、 $\Phi: \bar{I} \rightarrow \bar{I}$  を  $\Phi(\sum \lambda_i g_i) = \sum \varphi(\lambda_i) g_i^p$  と定め、 $\log$  を

$$\Gamma(u) = \log(u) - \frac{1}{p} \Phi(\log(u)) \quad (u \in WH(R\pi))$$

と修正すると、 $\text{Im}(\Gamma) \subseteq \bar{I}$  となる。また、 $R$  の  $\mathbb{Z}_p$  に関する *trace* を用いて、写像  $\omega: \bar{I} \rightarrow \pi^{ab}$  を

$$\omega(\sum \lambda_i g_i) = \prod g_i^{\text{Tr}(\lambda_i)} \pmod{[\pi, \pi]}$$

と定めると、次の完全列が得られる。

$$\text{補題 11.} \quad 0 \rightarrow SK_1(R\pi) \rightarrow WH(R\pi) \xrightarrow{\Gamma} \bar{I} \xrightarrow{\omega} \pi^{ab} \rightarrow 0$$

さて、 $p$  群の拡大

$$1 \rightarrow \rho \rightarrow \tilde{\pi} \xrightarrow{\alpha} \pi \rightarrow 1$$

に対して、 $\text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$  は次のように記述さ

れる。  $R\rho, R\tilde{\pi}, R\pi$  に対する補題11の完全列のなす可換図に snake lemma を適用して, surjection

$$\Delta: \ker[\rho^{ab} \rightarrow \tilde{\pi}^{ab}] \rightarrow \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$$

が得られる。  $\rho_0 = \rho \cap [\tilde{\pi}, \tilde{\pi}]$ ,  $\rho_1 = \langle x \in \rho \mid x \text{ は } \tilde{\pi} \text{ の交換子} \rangle$  とおくと,  $\rho_0 \rightarrow \ker[\rho^{ab} \rightarrow \tilde{\pi}^{ab}]$  に  $\Delta$  を合成した写像は surjective で,  $\rho_1$  がその kernel をなす。 すなわち, 同型

$$\kappa_\alpha: \rho/\rho_1 \cong \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$$

が存在する。 一方,  $H_2^{ab}(\pi)$  を  $\pi$  の可換部分群  $\pi'$  の  $H_2(\pi')$  全体で生成された  $H_2(\pi)$  の部分群とすると,  $H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$  は,  $\pi$  の拡大に対する  $\rho/\rho_1$  の普遍表示を与えらる (Stammbach [15]) から, surjection  $\delta_\alpha: H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \rightarrow \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$  が存在する。 特に  $\pi$  の拡大で,  $\rho/\rho_1$  が普遍表示をもつものが作れる ([15])。 よって, そのような拡大に対する同型

$$\delta_\alpha: H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \cong \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$$

を通して, surjection  $\theta_{R\pi}: SK_1(R\pi) \rightarrow H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$  が得られるが, これは拡大の選び方に依らないことが分る。

この  $\theta_{R\pi}$  に関して, さらに

- (1)  $\theta_{R\tilde{\pi}}$  が同型になる surjection  $\tilde{\pi} \rightarrow \pi$  があれば,  $\theta_{R\pi}$  も同型,
- (2)  $SK_1(R\rho) = 0$  となる  $\pi$  の指数  $p$  の正規部分群  $\rho$  があれば,

$\theta_{R\pi}$  は同型

となることが示される。 これらの性質から, 任意の  $p$  群  $\pi$  に

対して  $\theta_{R\pi}$  が同型になることが、帰納法で証明できる。

定理 12. 任意の  $p$  群  $\pi$  と不分岐  $p$  環  $R$  に対して

$$\theta_{R\pi} : SK_1(R\pi) \cong H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$$

この定理は  $SK_1(R\pi)$  の構造が、不分岐  $p$  環  $R$  に無関係に決まることを示している。実際、一般に  $p$  環の完全分岐な拡大  $R \subseteq R'$  に対しては、自然な写像  $SK_1(R\pi) \rightarrow SK_1(R'\pi)$  が同型となり、不分岐な拡大  $R \subseteq R'$  に対しては、 $\text{tr} : SK_1(R'\pi) \rightarrow SK_1(R\pi)$  が同型で、次の図が可換になることが示される。

$$\begin{array}{ccc} SK_1(R'\pi) & \xrightarrow{\theta_{R'\pi}} & H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \\ \downarrow \text{tr} & \nearrow \theta_{R\pi} & \\ SK_1(R\pi) & & \end{array}$$

上定理より、homology 群を調べて、次の諸結果が得られる。

系  $\pi$  が次のいずれかの  $p$  群のとき、 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi) = 0$ 。

- (1)  $|\pi/\mathbb{Z}(\pi)| \leq p^3$  (2)  $\pi$  は商群が可換となる中心形巡回部分群をもつ (3)  $|\pi| \leq 32$  ( $p=2$ )

( $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi) \neq 0$  となる位数  $p^5$  ( $p$  odd) の群  $\pi$ , また  $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \neq 0$  となる位数 64 の群の例が存在する。)

系  $p$  群に対して

$$(1) SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p[\pi_1 \times \pi_2]) \cong SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi_1) \oplus SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi_2)$$

$$(2) SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p[\pi] \wr \mathbb{Z}_p) \cong SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi)$$

## §4. 誘導定理

有限群  $\pi$  と  $p$  環  $R$  の  $SK_1(R\pi)$  に対して, Brauer の誘導定理 (§2, 定理6 参照) が成り立つ。それを示すには,  $cl_1$  の場合と同様に Wall の誘導定理から,  $\pi$  が  $p$ - $R$ -elementary の場合に帰着される。すなわち,  $p$  群  $\pi$  から  $p$  環の不分岐拡大  $R \subseteq S$  の Galois 群への準同型  $t: \pi \rightarrow \text{Gal}(S/R)$  が与えられたとき,  $SK_1(SP) \rightarrow SK_1(S[\pi]^t)$  ( $\rho$  は  $t$  の kernel) が surjective であることを示せばよい。

まず,  $S[\pi]^t$  の  $K_1$ -群について, 次のことが成り立つ。

補題13.  $\rho$  に含まれる  $\pi$  の正規部分群  $\sigma$  に対して

$$\ker[K_1(SP) \rightarrow K_1(S[\rho])] \rightarrow \ker[K_1(S[\pi]^t) \rightarrow K_1(S[\sigma]^t)] : \text{surjective}$$

これは,  $\sigma = \langle x \rangle$ ,  $x^p = 1$  の場合の  $K_1(SP, (1-x)) \rightarrow K_1(S[\pi]^t, (1-x))$  の surjectivity に帰着させて証明される。その際,  $p$  環  $S$  上の order  $A$  とその ideal  $\mathcal{O}$  に対する Wall の一般的な結果:  $K_1(A, \mathcal{O}) = \varprojlim K_1(A/\mathcal{O}^{m_i}, \mathcal{O}^m/\mathcal{O}^{m_i})$  ([17]) が使われる。

上の補題で, 特に  $\sigma = \rho$  とおくと,  $S[\pi/\rho]^t$  が  $R$  上の全行列環になることと, 不分岐拡大  $R \subseteq S$  の norm 写像  $S^* \rightarrow R^*$  が surjective であることから,  $K_1(SP) \rightarrow K_1(S[\pi]^t)$  の surjectivity が得られる。  $\pi$  の  $K_1(SP)$  への自然な作用に関する cohomology 群を考察して, この surjectivity はさらに詳しく

$$H_0(\pi, K_1(SP)) \cong K_1(S[\pi]^t), \quad H_0(\pi, K_1'(SP)) \cong K_1'(S[\pi]^t)$$

と表わされ、かつ  $K_1'(SP) \cong K_1(SP)/SK_1(SP)$  が cohomologically trivial であることが示される。よって、次が成り立つ。

補題 14  $H_0(\pi, SK_1(SP)) \cong SK_1(S[\pi]^t)$

特に、 $SK_1(SP) \rightarrow SK_1(S[\pi]^t)$  は surjective.

定理 15  $SK_1(R\pi)$  に対して、Brauer の誘導定理が成り立つ。

特に  $p$ -elementary な群  $\mathbb{Z}_n \times \pi$  ( $\pi: p$  群,  $p \nmid n$ ) に対して

$R\mathbb{Z}_n = \sum R_i$  ( $R_i: p$  環) とおくと、

$$SK_1(R[\mathbb{Z}_n \times \pi]) \cong \sum SK_1(R_i \pi)$$

この誘導定理より、前節の係数環の拡大に関する結果は、一般の有限群の場合に拡張することができる。

定理 16 有限群  $\pi$  に対して、 $R \subseteq R'$  が  $p$  環の完全分岐拡大な

らば、自然な写像  $SK_1(R\pi) \rightarrow SK_1(R'\pi)$  は同型であり、不分岐拡大ならば、 $\text{tr}: SK_1(R'\pi) \rightarrow SK_1(R\pi)$  が同型を与える。

また、上の誘導定理と  $cl_1$  に関する Brauer の誘導定理から、直ちに  $n$  環についての誘導定理が得られる。

定理 17 任意の有限群  $\pi$  と  $n$  環  $R$  の  $SK_1(R\pi)$  に対して、

Brauer の誘導定理が成り立つ。

特に次の各群の elementary な部分群は、巡回群,  $D(2^n)$ ,  $Q(2^n)$  or  $(\mathbb{Z}_2)^k$  の形であるから、定理 10 の系より、次が成り立つ。

系  $\pi \cong \text{PSL}(2, p)$ ,  $SL(2, p)$  ( $p$ : 素数),  $SL(2, 2^n)$  or  $Q(4n)$  ならば、

$$SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0 \quad \text{である。}$$

誘導定理は、一般に Green 関手上の Green 加群の理論として位置づけられる (Dress [5]). 特に  $SK_1(R\pi)$  は, Green 関手  $G_0(R\pi)$  ( $R\pi$  の Grothendieck 環) 上の Green 加群である。この観点から,  $R$  が  $p$  環の場合,  $SK_1(R\pi)$  に関する Witt の誘導定理を以下に述べる形に書き直すことが出来る。

まず,  $R$  を標数 0 の Dedekind 整域とし,  $F$  を商域とする。 $F$  上の半単純多元環の  $R$ -order の圏から可換群の圏への  $\omega$ -variant な関手  $X$  で, 次の条件を満たすものを考える。

(1) 有限群  $\pi$  に対して,  $X(R\pi)$  は Green 加群で, ある素数  $p$  に対して Witt の誘導定理が成り立つものとする。

(2)  $p$ - $F$ -elementary な群  $\pi = \mathbb{Z}_m \rtimes \rho$  ( $\rho: p$  群,  $p \nmid m$ ) に対して,  $F\mathbb{Z}_m = \sum F_i$ ,  $R_i = F_i$  における  $\mathbb{Z}$  の整閉包とすると,  

$$X(R\pi) \cong \sum X(R_i[\rho]^t) \quad \text{が成り立つ。}$$

(3) 任意の  $p$  群  $\rho$ ,  $p$  と素な同一の素因子をもつ任意の自然数  $m|n$  および任意の準同型  $\iota: \rho \rightarrow \text{Gal}(F(\zeta_m)/F) \cong \text{Gal}(F(\zeta_m)/F)$  ( $\zeta_m$  は 1 の原始  $m$  乗根) に対して, 合成写像  $X(R[\zeta_m][\rho]^t) \rightarrow X(R[\zeta_m][\rho]^t) \xrightarrow{\text{tr}} X(R[\zeta_m][\rho]^t)$  は  $n/m$  倍写像に一致する。

このとき,  $\{g_1, \dots, g_k\}$  を  $\pi$  の  $p'$  元の  $F$ -共役類の代表系とし,  $N_\pi^\pi(g_i) = \{\alpha \in \pi \mid \alpha g_i \alpha^{-1} = g_i, \sigma \in \text{Gal}(F(\zeta_{p,i})/F)\}$  とおくと, Witt の誘導定理は, 次の形に表わせる。

$$X(R\pi) \cong \sum_{i=1}^k \varinjlim \{ X(R[S_{q_i}][p]^\dagger) \mid p \text{ は } p \leq N_\pi^F(q_i) \text{ なる } p\text{-群} \}$$

ここで、 $\varinjlim$  は inclusion と  $N_\pi^F(q_i)$  の元による共役写像に関する直極限である。条件(1)より、 $X(R\pi) = \varinjlim \{ X(R\pi) \mid \pi \leq \pi \text{ は } p\text{-F-elementary} \}$  と表わされるから、上の同型を得るには、(2)の分解を  $\varinjlim$  を保つように並べ直せばよい。それは条件(3)を用いてなされる。

特に、 $R$  を予分岐  $p$  環とし、 $R$ -order  $A$  に対し  $X(A)$  として  $SK_1(A)$  を考えると、条件(1)、(2)は成り立っている。また、twist  $\tau$  の kernel を  $p'$  とすると、 $SK_1(R[S_n][p]^\dagger) \rightarrow SK_1(R[S_n][p']^\dagger)$  は surjective (補題14) で、 $SK_1(R[S_n][p]^\dagger)$  については(3)が成り立つので、 $SK_1(R[S_n][p]^\dagger)$  についても条件(3)が満たされる。したがって、 $SK_1(R\pi)$  に対する Witt の誘導定理は次のように表わされる。

$$(\star) \quad SK_1(R\pi) \cong \sum_{i=1}^k \varinjlim \{ SK_1(R[S_{q_i}][p]^\dagger) \mid p \leq N_\pi^F(q_i) \text{ は } p\text{-群} \}$$

そこで、twist の kernel を  $p' = p \cap Z_\pi(q_i)$  ( $Z$ : 中心化群) とすると、 $SK_1(R[S_{q_i}][p]^\dagger) \cong H_0(p, SK_1(R[S_{q_i}][p']^\dagger))$  (補題14) で  
また  $SK_1(R[S_{q_i}][p']^\dagger) \cong H_2(p')/H_2^{\text{ad}}(p')$  (定理12) であるから、

( $\star$ ) の同型の右辺は

$$\sum_{i=1}^k \varinjlim \{ H_0(p, H_2(p')/H_2^{\text{ad}}(p')) \mid p \leq N_\pi^F(q_i) \text{ は } p\text{-群} \text{ で } p' = p \cap Z_\pi(q_i) \}$$

と表わされるが、ここで  $H_2(\pi)/H_2^{\text{ad}}(\pi)$  も Green 加群であり、 $p$  部分群に関する誘導定理が成り立つことから、結局次の同型が得られる。

定理 18  $R$  は不分岐  $p$  環で,  $F$  はその商体とする。  $\{g_1, \dots, g_k\}$

を有限群  $\pi$  の  $p'$  元の  $F$  共役類の代表系とし,  $N_i = N_F^\pi(g_i)$ ,

$Z_i = Z_\pi(g_i)$  とおくと, 次の同型が成り立つ。

$$SK_1(R\pi) \cong \sum_{i=1}^k H_0(N_i, H_2(Z_i)/H_2^{ab}(Z_i))$$

特に, 対称群  $S_n$ , 交代群  $A_n$  においては, 中心化群の構造はよく知られており, 任意の  $p$  に対して,  $H_2(Z_i)/H_2^{ab}(Z_i) = 0$  となることが確かめられる。よって, 上定理より

系 任意の  $p$  に対して,  $SK_1(\mathbb{Z}_p S_n) = SK_1(\mathbb{Z}_p A_n) = 0$

一方,  $cl_1(\mathbb{Z} S_n) = 0$  (定理 5) であるから, この系より

系  $SK_1(\mathbb{Z} S_n) = 0$

となる。

前節の補題 14 および本節の局所的議論は大部分が  $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$  に拡張できるが, それについては原論文を参照していただくことにして,  $SK_1(\mathbb{Z}A_n)$  に関する結果のみに付言しておく。

$$SK_1(\mathbb{Z}A_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3 & , n = \sum_{i=1}^r 3^{m_i} \geq 27, m_1 > m_2 > \dots > m_r \geq 0, \sum m_i = \text{odd} \\ 0 & , \text{その他の場合} \end{cases}$$

## References

1. Bak, A ; K-theory of forms, Ann.Math.Studies, No.98, 1981
2. Bass, H ; Algebraic K-theory, Benjamin, 1968
3. Bass, H-Milnor, J-Serre, J.P. ; Solution of the congruence subgroup problem for  $SL_n(n \geq 3)$  and  $Sp_{2n}(n \geq 2)$ , I.H.E.S., vol.33, 59-137, 1967
4. Dennis, R.K-Stein, M ;  $K_2$  of discrete valuation rings, Advances in Math., vol.18, 182-238, 1975
5. Dress, A ; Induction and structure theorems for orthogonal representations of finite groups, Ann.Math., vol.102, 291-325, 1975
6. Keating, M ; Values of tame symbols on division algebras, J.London Math.Soc., vol.14, 25-30, 1976
7. Magurn, B ;  $SK_1$  of dihedral groups, J.Algebra, vol.51, 399-415, 1978
8. Matumoto, H ; Sur les sousgroupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, Ann.Ecole Norm.Sup., vol.2, 1-62, 1969
9. Milnor, J ; Introduction to algebraic K-theory, Ann.Math.Studies, vol.72, 1971
10. Oliver, R ;  $SK_1$  for finite group rings I, Invent.Math., vol.57, 183-204, 1980
11. ——— ; ——— II, Math.Scand., vol.47, 195-231, 1980
12. ——— ; ——— III, L.N.Springer, vol.854, 299-337, 1981
13. ——— ; ——— IV, Proc.London Math.Soc., vol.46, 1-37, 1983
14. Rehman, U-Stuhler, U ; On  $K_2$  of finite dimensional division algebras over arithmetic fields, Invent.Math., vol.50, 75-90, 1978

15. Stambach, U ;Homology in group theory, L.N.Springer, vol.359, 1973
16. Stein, M ;Whitehead groups of finite groups, Bull. A.M.S., vol.84, 201-212, 1978
17. Wall, C.T.C ;On classification of hermetian forms III, Complete semilocal rings, Invent.Math., vol.19, 59-71, 1973
18. ——— ;Norms of units in group rings, Proc.London Math. Soc., vol.29, 593-632, 1974