

研究会報告

「カオスとその周辺」

1982年7月22日～24日 京大基研

プログラム (*印原稿未着, ☆Review talk)

第1日

Random Walk Model of Turbulent Diffusion 北原和夫 (静大教養)

乱れた Alfvén 波中での宇宙線のピッチアングル散乱 加藤正人 (日大工)

一般化されたパイコネ変換におけるカオスと確率過程 相沢洋二 (京大理)

*Chaos-Induced Diffusion In Nonlinear Dynamical System

..... 藤坂博一 (鹿大理), S. Grossman (Marburg 大)

Noise-Induced Periodicity 松本健司, 津田一郎 (京大理)

一次元周期的ポテンシャル中の外力によるカオスの拡散 ... 井上政義, 古賀均 (鹿大理)

ダフィン方程式の解の大域的相似性

..... 佐藤信一 (東北大工), 佐野雅己, 沢田康次 (東北大通研)

結合反応系の分岐集合の単純な性質 佐野雅己, 沢田康次 (東北大通研)

*Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems

..... 藤坂博一 (鹿大理), 山田知司 (九工大物理)

第2日

熱対流系のカオスの性質 佐野雅己, 沢田康次 (東北大通研)

*ベナール対流における乱流の発生 八幡英雄 (広大理)

周期磁場中での超流動 ^3He の磁化の応答

..... 山口喜博 (東理大理), 片山硬 (日本自動車研), 古川文生, 石井力 (東理大理)

Successive Higher-Harmonic Bifurcations in Systems with Delayed

Feedback 池田研介, 近藤啓二 (京大理), 秋元興一 (山口大医短)

カオスへのいくつかのルート (強制ローレンツ系の場合) 上江洌達也 (京大理)

カオスを示す簡単なモデルの漸近解について

..... 清水敏寛 (国土館工), 市村純 (早大理工)

“トーラス→周波数ロッキング→カオス”における“周期加現象”

..... 金子邦彦 (東大理)

周期倍現象におけるフーリエスペクトルのパラメーター依存性 大同寛明 (基研)

第3日

☆ハミルトン系のカオスと解の複素 t 平面上の特異点 吉田春夫 (東大理)

2 自由度非線型振動子 (Morse) 系における解離点近傍での不変トーラスの振舞い

..... 松下利樹 (慶大理工)

Hyperbolic Point の周りのカオス

..... 斎藤信彦 (早大理工), 広岡一 (法政大教養)

カオス軌道の Capture について 伊東敬祐 (神大理)

乱流拡散の Random Walk Model

静岡大・教養 北原和夫

流体に浮遊している粒子が流れに乗って動いている時、時刻 t における粒子の位置を $\vec{r}(t)$ とすると、速度 $\dot{\vec{r}}(t)$ は

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(\vec{r}(t), t) \quad (1)$$

で与えられる。ここで $\vec{v}(\vec{r}, t)$ は時刻 t における空間の各点 $\vec{r}$ での流体の速度場をあらわす。 $\vec{v}(\vec{r}, t)$ は Navier-Stokes 方程式に従う。

流体が乱流状態にあると浮遊している粒子の運動も複雑になるが、浮遊している2個の粒子 [それぞれの位置を $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ とする] の相対距離 $\vec{R}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ については

$$\langle [\vec{R}(t)]^2 \rangle \propto t^3 \quad (2)$$

となることが実験的に知られている¹⁾。これは次のように説明される。発達した乱流において、速度場はいろいろな大きさのゆらぎ (渦) からなるものとする。すなわち

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} \vec{v}_{\ell}(\vec{r}, t) \quad (3)$$

と表わすことができ、 ℓ は渦の大きさである。 ℓ には上限下限があり $[\lambda < \ell < A]$ ，下限 λ はエネルギーが散逸されるメカニズムの長さのスケールであり、 A はエネルギーが供給されるメカニズムの長さのスケールである。後者は流体の境界条件などに依る。一粒子の運動にはあ

らゆる大きさの速度場のゆらぎが寄与するが、二粒子の相対運動をみる限りは、相対距離よりも大きいゆらぎは寄与しない。大きなサイズのゆらぎは二粒子を一緒に動かすからである。従って λ と L の間の大きさの相対距離の変動については、Kolmogorov の仮説より、エネルギー散逸速度 ε のみが重要なパラメタであるということになり、次元解析より

$$\langle [\vec{R}(t)]^2 \rangle \propto \varepsilon t^3 \quad (4)$$

となることが判る。

我々は相対距離の分散 $\langle [\vec{R}(t)]^2 \rangle$ のみならず、相対距離の確率分布関数を評価することを、簡単な模型 (random walk 模型と呼ぶ) を用いて試みた。先ず、

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{f}(t) \quad (6)$$

とおいて力 $\vec{f}(t)$ を white noise と考えると

$$\langle [\vec{R}(t)]^2 \rangle \sim t^3 \quad (7)$$

となる²⁾。さらに $\vec{f}(t)$ をガウス過程とすると、時刻 t において相対距離が $\vec{R}$ 、相対速度が $\vec{v}$ となる確率分布関数 $P(\vec{R}, \vec{v}; t)$ に対して方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{R}, \vec{v}, t) = [-\vec{v} \cdot \vec{\nabla} + b^2 \varepsilon \Delta_{\vec{v}}] P(\vec{R}, \vec{v}, t) \quad (8)$$

がなりたつ。ここで、 $\vec{f}(t)$ の成分 $f_i(t)$ [$i = x, y, z$] に対して

$$\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2b^2 \varepsilon \delta_{ij} \delta(t-t') \quad (9)$$

とおき、また $\Delta_{\vec{v}}$ は速度に対するラプラシアン

$$\Delta_{\vec{v}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial v_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v_z}\right)^2 \quad (10)$$

である。初期条件 $\vec{R}(0) = \vec{R}_0$ 、 $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ が与えられた時、時刻 t において相対距離が $\vec{R}$ となる確率分布は、

$$P(\vec{R} | t | \vec{R}_0, \vec{v}_0) \propto \exp \left[- \left(\frac{3}{4b^2 \varepsilon t^3} \right) (\vec{R} - \vec{R}_0 - \vec{v}_0 t)^2 \right] \quad (11)$$

となる。初期分布として、

$$P_0(\vec{v}_0, \vec{R}_0) = W(\vec{v}_0, \vec{R}_0) P_0(\vec{R}_0) \quad (12)$$

という形を仮定する。 $P_0(\vec{R}_0)$ は浮遊する粒子をどのように初めにバラまくかによるからコントロールできるものである。ある相対距離 $\vec{R}_0$ をもつ2点における速度場は確率的であり(乱流状態にあるから), その相対速度の分布は次元解析により

$$W(\vec{v}, \vec{R}) = F(v^3/\epsilon R)/\epsilon R$$

という形をとるであろう。一つの可能な模型として

$$\begin{aligned} W(\vec{v}, \vec{R}) &= \left[\frac{1}{2\pi a^2 (\epsilon R)^{2/3}} \right]^{3/2} \exp \\ &\quad \left[-\frac{v^2}{2a^3 (\epsilon R)^{2/3}} \right] \end{aligned}$$

と試してみる。 a というパラメタは, 速度場と相対距離との相関の強さをあらわす。初期分布として $P_0(\vec{R}_0) = P_0(|\vec{R}_0|)$ や $|\vec{R}_0| \leq L_0$ で一定で $|\vec{R}_0| > L_0$ でゼロ, すなわち球状の一様分布を仮定した場合の, その後の時間発展を図示する(図1~3)。 a が大きいと拡散も速いということが言える。

$W(\vec{v}, \vec{R})$ にどういう関数が適当であるか, については, 不明瞭

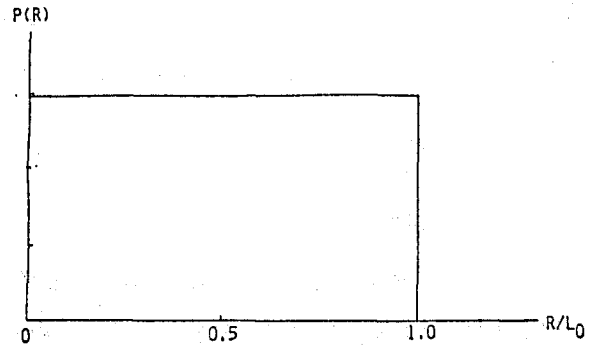


図1 相対距離の初期分布 $P_0(|\vec{R}|)$

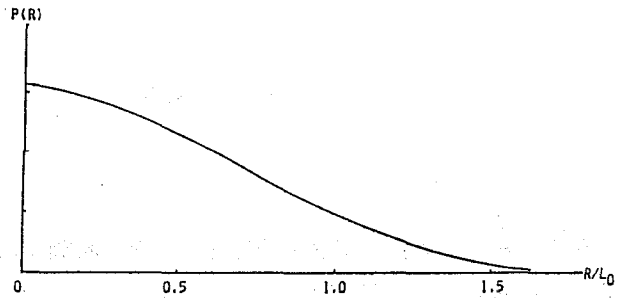


図2 時刻 $t = 0.5 \times (L_0^2/\epsilon)^{1/3}$ における相対距離の確率分布 ($a = 1$ の場合)

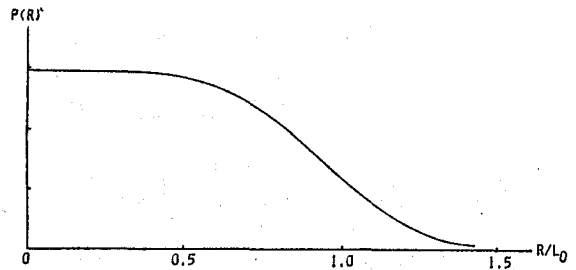


図3 時刻 $t = 0.5 \times (L_0^2/\epsilon)^{1/3}$ における相対距離の確率分布 ($a = 0$ の場合)

であるが、乱流の統計理論³⁾が援用できるかも知れない。

本稿は、R. A. Pasmanter 氏(日本学術振興会の招へいにより来日)との共同研究に基く。

References

- 1) A. S. Monin and A. M. Yaglom, "Statistical Fluid Mechanics" vol. 2 (MIT Press, Cambridge, 1975), p. 527-578.
- 2) C. C. Lin and W. H. Reid, Handbuch der Physik Bd. VIII/2 (Springer, Berlin, 1963), p. 438-523.
- 3) F. R. Ulinich and B. Ya. Lyubimov, Soviet Physics JETP 28, 494 (1969).

乱れた Alfvén 波中での宇宙線のピッチアングル散乱

日大・工 加 藤 正 人

§ 0. はじめに

ブラウン運動をひきおこす揺動力に相関があるばあい話はいろいろなされているが、さらに揺動力がローレンツ力の場合、ブラウン粒子としての荷電粒子はどのような運動をするのだろうか、単純なブラウン運動=拡散過程で記述できるのだろうか。惑星間空間の磁場とそのなかを運動する宇宙線粒子は今述べた状況の好例なのかもしれない。それは特に運動が $10^6 \text{ eV/c} \sim 10^9 \text{ eV/c}$ の宇宙線(プロトン)のばあい、①無衝突である。密度は数 cm^{-3} 、したがって"抵抗"は無視できる。②電場($\partial B / \partial t$)の影響も無視できる。③磁場の空間的なゆらぎは大きな相関距離を持つ。といった条件を満足するからである。②は主に Alfvén 波の位相速度 v_A で B が時間的に変化することによって生じる電場だが、ここで対象にしている宇宙線の速さは v_A に比べはるかに大きく問題にならない。③は一見磁場だけの性質のようだが、運動量が大きくなり、宇宙線のラーモア半径が磁場の乱れの相関距離を越えてしまうと、宇宙線にとっては乱れが"White"にみえてしまうのである。さらに実際の惑星間空間磁場のゆらぎは非常に大きく(有限振幅)、乱れも磁力線に垂直な成分(Alfvén 波)が卓越していることが特徴である。

こうした状況をわれわれは計算機で"再現"し"相関を持つランダム磁場中での宇宙線の運動"を追ってみた。なお乱数によって作られた"磁場"の形態と物理量は次のとおりである。

①"形"は、 $B_z = \text{固定}$ 、ゆらぎは Z 軸に垂直な方向で Z の関数、 $B_{x(y)} = B_{x(y)}(Z)$ B_x と B_y は