

de Rham complex の分解について.
(Deligne - Illusie の結果の紹介)

京大 理 横川 光司

(Koji YOKOKAWA)

§1. Deligne - Illusie の分解定理

p を素数, S を標数 p の scheme (すなわち $p\theta_S = 0$) とする. S の absolute Frobenius 射 $F_S: S \rightarrow S$ は topological には, identity map で, $F_S^*(a) = a^p$ ($a \in \theta_S$) により定義される射とする. X を S -scheme とすると次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{F_X} & & & \\ & \searrow F_{X/S} & X' := X \times_S S & \xrightarrow{w} & X \\ & \downarrow \pi & \downarrow \pi' & \square & \downarrow \pi \\ & S & & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

図の $F_{X/S}$ を X の S 上の relative Frobenius 射といい, 以後 F により表す. X/S の

de Rham complex を $\Omega_{X/S}^\bullet$ とする. $F_*\Omega_{X/S}^\bullet$ は $\mathcal{O}_{X'}$ module の complex となり, また, $\bigoplus_{i \geq 0} \Omega_{X/S}^i$, $\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{H}^i(F_*\Omega_{X/S}^\bullet)$ は, 自然な graded $\mathcal{O}_{X'}$ algebra の構造をもつ. Cartier operator の定義から始める.

定理 (Cartier) X を smooth S -scheme とする。この時
graded $\mathcal{O}_X$ -algebra の同型

$$C^{-1}: \bigoplus_{i \geq 0} \Omega_{X/S}^i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{H}^i(F_* \Omega_{X/S})$$

で、 $C^{-1}(w^*(df)) = [f^{p-1}df]$ ($\forall f \in \mathcal{O}_X$) を満たすものが、
ただ一つ存在する。(証明は、[2] 又は、[3] を参照。)

Cartier operator は次の写像として定義されるが、

$$Z_i := \text{Ker}(F_* \Omega_{X/S}^i \xrightarrow{F_* d} F_* \Omega_{X/S}^{i+1}) \longrightarrow \mathcal{H}^i(F_* \Omega_{X/S}) \xrightarrow{(C^{-1})^{-1}} \Omega_{X/S}^i$$

以下では、 C^{-1} しか使わない。

$\mathcal{O}_X$ -module の derived category を $D(X)$ で表す。complex
 $L^\bullet$ に対して $\tau_{\leq m} L^\bullet$ を $L^\bullet$ の subcomplex $K^\bullet$ で、 $K^i = 0$ ($i > m$)
; $K^m = \text{Ker}(L^m \xrightarrow{d} L^{m+1})$; $K^i = L^i$ ($i < m$) を満たすものとし、
 $L^\bullet[n]$ は complex $K^\bullet$ で $K^i = L^{i+n}$ ($\forall i$)、 $d_K = (-1)^n d_L$ を
満たすものとする。また、 $\mathcal{O}_X$ module M は 0 番目が M 、
他が 0 であるような complex とみられ、従って、 $M[n]$ は、
 $-n$ 番目が M で他が 0 であるような complex である。 $\tau_{\leq m} L^\bullet$
は $\tau_{\leq m+1} L^\bullet$ のこととする。

k を標数 $p > 0$ の完全体、 $S = \text{Spec } k$ 、 $\hat{S} = \text{Spec } W_2(k)$ と
する。但し $W_2(k)$ は長 ± 2 の Witt vector の環である。 S は
同型 $W_2(k)/pW_2(k) \cong k$ により $\hat{S}$ の closed subscheme とみ

られる。 S -scheme X が flat $\tilde{S}$ -scheme $\tilde{X}$ の S への制限である時、 X は $\tilde{S}$ (又は $W_2(k)$) へ *liftable* といい、 $\tilde{X}$ を X の ($\tilde{S}$ への) *lifting* という。 k の Frobenius 写像の $W_2(k)$ への拡張 $\sigma: W_2(k) \longrightarrow W_2(k)$ 、 $\sigma(a_0, a_1) = (a_0^p, a_1^p)$ は $W_2(k)$ の自己同型である。

定理 (Deligne-Illusie) smooth S -scheme X の *lifting* $\tilde{X}$ は、 $D(X')$ における同型

$$\varphi_{\tilde{X}}: \bigoplus_{i \geq 0} \Omega_{X'/S}^i[-i] \xrightarrow{\sim} \tau_{< p} F_* \Omega_{X/S}$$

で、 $\mathcal{H}^i(\varphi_{\tilde{X}}) = C^{-i}$ となるものを定める。

注意) 定理は、 $D(X')$ において $\tau_{< p} F_* \Omega_{X/S}$ が “分解” すること (すなわち、 $D(X')$ において微分が 0 であるような complex に同型であること) を意味している。 S が標数 p の scheme で、 $\tilde{S}$ が $\mathbb{Z}/p^2$ 上 flat な scheme で $\tilde{S} \otimes \mathbb{Z}/p \cong S$ を満たすものとする。 Deligne-Illusie [1] では、 X' が $\tilde{S}$ へ *liftable* であることと、 $\tau_{\leq 1} F_* \Omega_{X/S}$ が分解することとが同値であること、 また、 この時も上の定理が成り立つことを示している。 しかし、 ここでは上の定理を証明するにとどめる。 詳しくは [1] をみられたい。

定理の証明) 各 $i < p$ に対して、 $D(X')$ における写像、

$$\varphi_X^i : \Omega_{X'/S}^i[-i] \longrightarrow F_* \Omega_{X/S}^i$$

を $\mathcal{H}^i(\varphi_X^i) = C^{-1}$ となるように作ればよい。 φ_X^0 は、

$$\mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{C^{-1}} \mathcal{H}^0 F_* \Omega_{X/S}^0 \hookrightarrow F_* \Omega_{X/S}^0$$

と定義すればよい。 φ_X^i が構成できたとする。 $i < p$ に対し

て、canonical map $(\Omega_{X'/S}^i)^{\otimes i} \longrightarrow \Omega_{X'/S}^i$ は、自然な

$$\text{section } a(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i) = \frac{1}{i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(i)} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(i)}$$

をもつ。これを使って φ_X^i を次の図式が可換になるように定義する。

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{X'/S}^i[-i] & \xrightarrow{\varphi_X^i} & F_* \Omega_{X/S}^i \\ \downarrow a[-i] & \curvearrowright & \uparrow \text{product} \\ (\Omega_{X'/S}^i)^{\otimes i} & \xrightarrow{(\varphi_X^i)^{\otimes i}} & (F_* \Omega_{X/S}^i)^{\otimes i} \end{array}$$

C^{-1} が graded $\mathcal{O}_{X'}$ algebra の同型であることから $\mathcal{H}^i(\varphi_X^i) = C^{-1}$

よって φ_X^i を構成すればよい。 $X \rightarrow S$ の lifting $\hat{X} \rightarrow \hat{S}$ と $\hat{S}$ の automorphism σ との fiber product $\hat{X} \times_{\hat{S}} \hat{S}^\sigma$ を $\hat{X}'$ とする。 $\hat{X}' \times_{\hat{S}} \hat{S} \cong \hat{X}$ である。 $F: X \rightarrow X'$ が $\hat{S}$ に liftable かどうかで分けて考える。

Case 1.) F が lifting $\hat{F}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$ を持つ時。

$$\begin{array}{ccc} \hat{F}^* : \Omega_{\hat{X}'/\hat{S}}^i & \longrightarrow & \hat{F}_* \Omega_{\hat{X}/\hat{S}}^i \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ F^* = \hat{F}^* \otimes \mathbb{Z}/p : \Omega_{X'/S}^i & \xrightarrow{0} & F_* \Omega_{X/S}^i \end{array}$$

$$\text{よって, } \hat{F}^*(\Omega'_{\hat{X}/S}) \subseteq P\hat{F}_*\Omega'_{\hat{X}/S}.$$

$W_2(k)$ module の同型 $k = W_2(k)/P W_2(k) \xrightarrow{\times P} P W_2(k)$ を P とかく。 $\hat{F}_*\Omega'_{\hat{X}/S}$ は $W_2(k)$ 上 flat であることに注意して、次の同型を得る。

$$F_*\Omega'_{X/S} \cong \hat{F}_*\Omega'_{\hat{X}/S} \otimes_{W_2(k)} k \xrightarrow[\text{id} \otimes P]{\sim} \hat{F}_*\Omega'_{\hat{X}/S} \otimes_{W_2(k)} P W_2(k) \cong P\hat{F}_*\Omega'_{\hat{X}/S}.$$

これをもまた P とかく。同様に、次の同型も得られる。

$$P: F_*\mathcal{O}_X \longrightarrow P\hat{F}_*\mathcal{O}_{\hat{X}}.$$

写像 $P^{-1} \circ \hat{F}^*: \Omega'_{\hat{X}/S} \longrightarrow F_*\Omega'_{X/S}$ は $P\Omega'_{\hat{X}/S}$ を 0 にするから、 $f: \Omega'_{X/S} \longrightarrow F_*\Omega'_{X/S}$ を引き起こす。

$$\begin{array}{ccc} \Omega'_{X/S} & \xrightarrow{f} & F_*\Omega'_{X/S} \\ \uparrow & \curvearrowright & \downarrow P \\ \Omega'_{\hat{X}/S} & \xrightarrow{\hat{F}^*} & P\hat{F}_*\Omega'_{\hat{X}/S} \end{array}$$

$x \in \mathcal{O}_{\hat{X}}$ の local section とすると、 $x \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\hat{X}} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\hat{S}}$

$$\hat{F}^*(x \otimes 1) - x^P \in P\hat{F}_*\mathcal{O}_{\hat{X}} \quad (\because \text{mod } P = 0)$$

$$\mu(x) := P^{-1}(\hat{F}^*(x \otimes 1) - x^P) \in F_*\mathcal{O}_X$$

$$\therefore \hat{F}^*(x \otimes 1) = x^P + P \cdot \mu(x).$$

$x_0 := x \text{ mod } P (\in \mathcal{O}_X)$ とおく。

$$\begin{aligned} f(d(x_0 \otimes 1)) &= P^{-1}d(x^P + P\mu(x)) \\ &= P^{-1}(Px^{P-1}d x + Pd\mu(x)) \\ &= x_0^{P-1}d x_0 + d\mu(x). \end{aligned}$$

よ, て $d \circ f = 0$. このことは, f が complex の写像

$$f : \Omega'_{X/S}[-1] \longrightarrow F_* \Omega_{X/S}$$

を定めることを意味する. $[f(d(\alpha \otimes 1))] = [\alpha_0^{p-1} d\alpha_0]$ in $\mathcal{H}'(F_* \Omega_{X/S})$

であるから, $\mathcal{H}'f = C^{-1}$ がわかる. f が $D(X')$ において,

$\hat{F}$ のとり方によらずに決まることを示す. $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ を F の二つの lifting とし, それぞれに対して上のよう定められる (f, μ) を $(f_1, \mu_1), (f_2, \mu_2)$ とする.

$$\hat{F}_i^*(x \otimes 1) = x^p + P\mu_i(x) \quad (i=1, 2)$$

であるから, 写像

$$\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^* : \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow P\hat{F}_* \mathcal{O}_{X'} = PF_* \mathcal{O}_X$$

が決まる. これは, derivation である. 実際, $x, y \in \mathcal{O}_{X'}$ に対

$$\begin{aligned} \hat{F}_i^*(xy \otimes 1) &= (x^p + P\mu_i(x))(y^p + P\mu_i(y)) \\ &= (xy)^p + P(x^p\mu_i(y) + y^p\mu_i(x)) \end{aligned}$$

$$\therefore (\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(xy \otimes 1) = x^p(\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(y \otimes 1) + y^p(\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(x \otimes 1).$$

($\mathcal{O}_{X'} \ni x \otimes 1$ の $\hat{F}_* \mathcal{O}_{X'}$ への action は x^p 倍であることに注意)

また, $(\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(P\mathcal{O}_{X'}) = 0$. よ, て次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X'} & \xrightarrow{\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*} & P\hat{F}_* \mathcal{O}_{X'} = PF_* \mathcal{O}_X \\ \downarrow \wr & \nearrow \wr & \uparrow P \\ \mathcal{O}_{X'} & & \\ \downarrow d & \searrow \wr & \\ \Omega'_{X/S} & \xrightarrow{h_{12}} & F_* \mathcal{O}_X \end{array}$$

h_{12} は $\mathcal{O}_{X'}$ -linear であって、

$$h_{12}(d(x_0 \otimes 1)) = \mu_2(x) - \mu_1(x)$$

とかける。よって

$$f_2 - f_1 = d \circ h_{12}.$$

これは h_{12} が、二つの (complex の) 写像 f_1 と f_2 の間の、homotopy を与えることを意味する。従って f_1 と f_2 は $D(X')$ において一致する。

さらに、 $i=1, 2, 3$ に対して、 F の lifting $\hat{F}_i$ が与えられた時、

$$h_{12} + h_{23} = h_{13}$$

となることに注意しておく。

Case 2.) F が lift できない場合。

F は X の Zariski topology に関して local に liftable である。

(実際、 U を X の affine open set とすると、 $X, X', \hat{X}, \hat{X}'$ は

homeo. であるから、それぞれ $U, U', \hat{U}, \hat{U}'$ が決まる。 $\hat{U}'$ は $\hat{S}$ 上 smooth だから projection $\hat{U} \times_{\hat{S}} \hat{U}' \rightarrow \hat{U}$ は smooth。 U は $\hat{U}$ の中で nilpotent ideal によって定義されるから formal smoothness より U から $\hat{U} \times_{\hat{S}} \hat{U}'$ への F によって決まる $\hat{U}$ -morphism は $\hat{U}$ 上へ拡張される。)

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ を X の affine open covering で、各 $i \in I$ について F の lifting $\hat{F}_i: \hat{U}_i \rightarrow \hat{U}'_i$ が与えられているものとする。この時 case 1 の結果から、

$$\begin{aligned}
 f_i &= p^{-1} \tilde{F}_i^* : \Omega'_{X/S}|_{U_i} \longrightarrow F_* \Omega'_{U_i/S} \\
 h_{ij} &: \Omega'_{X/S}|_{U_{ij}} \longrightarrow F_* \mathcal{O}_{U_{ij}} \quad (U_{ij} = U_i \cap U_j) \\
 d \circ f_i &= 0 \quad f_j - f_i = d \circ h_{ij} \quad h_{ij} + h_{jk} = h_{ik} \\
 \uparrow & \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 \text{on } U_i & \quad \quad \quad \text{on } U_{ij} \quad \quad \quad \text{on } U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k
 \end{aligned}$$

を得る。

$\check{C}(\mathcal{U}, \Omega'_{X/S})$ を $\Omega'_{X/S}$ の covering $\mathcal{U}$ に関する Čech double complex に associate する simple complex とする。すなわち

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &:= \{0, \dots, n\} & s : \Delta_n &\longrightarrow I \quad (\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}) \\
 U_s &:= \bigcap_{i \in \Delta_n} U_{s(i)} & j_s : U_s &\hookrightarrow X \quad \text{と } \sigma' < \tau.
 \end{aligned}$$

$$\check{C}(\mathcal{U}, \Omega'_{X/S})^n = \bigoplus_{a+b=n} \check{C}^b(\mathcal{U}, \Omega'^a_{X/S})$$

$$d = d_1 + d_2, \quad \check{C}^b(\mathcal{U}, \Omega'^a_{X/S}) = \prod_{\{s: \Delta_n \rightarrow I\}} j_{s*} j_s^* \Omega'^a_{X/S} \quad \tau.$$

$$d = d_1 + d_2$$

$$d_1 : \check{C}^b(\mathcal{U}, \Omega'^a_{X/S}) \longrightarrow \check{C}^b(\mathcal{U}, \Omega'^{a+1}_{X/S})$$

$$d_2 = (-1)^a \sum (-1)^i \partial_i : \check{C}^b(\mathcal{U}, \Omega'^a_{X/S}) \longrightarrow \check{C}^{b+1}(\mathcal{U}, \Omega'^a_{X/S}).$$

自然な写像 $\Omega'^a_{X/S} \longrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega'^a_{X/S})$ は quasi-isom.

$$\psi_{\mathcal{U}} : \Omega'_{X/S} \longrightarrow \check{C}(\mathcal{U}, \Omega'_{X/S})$$

を与える。F は homeo. であるから、 F_* をつけて、

$$F_* \Omega'_{X/S} \longrightarrow F_* \check{C}(\mathcal{U}, \Omega'_{X/S})$$

も quasi-isomorphism になる。 $\Omega'_{X/S}$ [-1] から $F_* \check{C}(\mathcal{U}, \Omega'_{X/S})$

への写像を構成する。

$$\varphi'_{(u, (\tilde{F}_i))} = (\varphi_1, \varphi_2) : \Omega'_{X/S} \longrightarrow F_* \check{\mathcal{C}}(u, \Omega'_{X/S})^1$$

$$\parallel$$

$$F_* \check{\mathcal{C}}'(u, \mathcal{O}_X) \oplus F_* \check{\mathcal{C}}^0(u, \Omega'_{X/S})$$

$$\text{を、 } \varphi_1(\omega) = \prod_{i,j} h_{ij}(\omega|_{U_{ij}}) \in F_* \check{\mathcal{C}}'(u, \mathcal{O}_X)$$

$$\varphi_2(\omega) = \prod_i f_i(\omega|_{U_i}) \in F_* \check{\mathcal{C}}^0(u, \Omega'_{X/S}) \quad (\omega \in \Omega'_{X/S})$$

によって定義する。 $d \circ \varphi'_{(u, (\tilde{F}_i))}$ を決める三つの写像は、

$$d_2 \circ \varphi_1 = (h_{ij} + h_{jk} - h_{ik}) = 0$$

$$d_1 \circ \varphi_1 - d_2 \circ \varphi_2 = (d \circ h_{ij} - (f_j - f_i)) = 0$$

$$d_1 \circ \varphi_2 = (d \circ f_i) = 0$$

であるから、 $d \circ \varphi'_{(u, (\tilde{F}_i))} = 0$ 、従って、 $\varphi'_{(u, (\tilde{F}_i))}$ は complex
の写像 $\Omega'_{X/S}[-1] \longrightarrow F_* \check{\mathcal{C}}(u, \Omega'_{X/S})$ を与える。 φ'_X を
 $\gamma_u^{-1} \circ \varphi'_{(u, (\tilde{F}_i))} \in D(X')$ によって決める。 φ'_X が X の
covering u 及び lifting $(\tilde{F}_i)$ によるないことは容易にわかる。
また $\gamma'_1 \varphi'_X = C^{-1}$ であることは、local に確かめればよい
が、それは Case I から明らかである。

証明終。

注) case I のように、 F が liftable である時は、 φ'_X は $D(X)$
でなくとも $K(X')$ (object が complex、射が complex の写像の
homotopy class である category) の元として定義できる。しかも、
この時、 φ'_X は $i \geq p$ に対しても定義できる。実際、 φ'_X は、

写像 $\Omega_{X'/S}^i \longrightarrow Z_i$ を定める. ($Z_i = \ker(F_* \Omega_{X'/S}^i \rightarrow F_* \Omega_{X'/S}^{i+1})$)

φ_X^i を $\Omega_{X'/S}^i \longrightarrow \wedge^i Z_i \longrightarrow Z_i$ によって定義すればよい.

F が liftable かどうかを決める obstruction は、

$H^1(X', \oplus_{X'/S} \otimes F_* \mathcal{O}_X)$ の元として定まる. (cf. [1] Remark 2.2 (iii))

系 1. $\dim X \leq p$ で、 X が $W_2(k)$ 上 liftable とすると、

$F_* \Omega_{X'/S}$ は $D(X')$ の中で微分が 0 であるような complex に同型である。

略証) (詳しくは [1] p. 255 参照) $\mathcal{H}^i(F_* \Omega_{X'/S})$ を $\mathcal{H}^i$ とかく。

triangle $\tau_{< p} F_* \Omega_{X'/S} \longrightarrow F_* \Omega_{X'/S} \longrightarrow \mathcal{H}^p[-p] \xrightarrow{e}$

をみると、仮定から $\tau_{< p} F_* \Omega_{X'/S} \cong \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{H}^i[-i]$. $e = 0$ を示せばよい。

$$e: \mathcal{H}^p[-p] \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{H}^i[-i] \right)[1]$$

$$e = \sum_{i=0}^{p-1} e_i, \quad e_i \in \text{Hom}(\mathcal{H}^p[-p], \mathcal{H}^i[-i+1]) = H^{p-i+1}(X', \text{Hom}(\mathcal{H}^p, \mathcal{H}^i))$$

Grothendieck duality によって $\tau_{\geq 1} F_* \Omega_{X'/S}$ は $\mathcal{H}^i[-i]$ の直和となる。従って triangle

$$\tau_{\geq 1} \tau_{< p} F_* \Omega_{X'/S} \longrightarrow \tau_{\geq 1} F_* \Omega_{X'/S} \longrightarrow \mathcal{H}^p[-p] \xrightarrow{e'}$$

で $e' = 0$. $e' = \sum_{i=1}^{p-1} e_i$ だから、 $e_i = 0$ ($i=1, \dots, p-1$).

$e_0 \in H^{p+1}(X', \text{Hom}(\mathcal{H}^p, \mathcal{H}^0))$ で $\dim X \leq p$ だから $e_0 = 0$.

証明終.

§2. 応用.

X, S は前節の通りとする. Hodge の spectral sequence

$$(*) \quad E_1^{ij} = H^j(X, \Omega_{X/S}^i) \Rightarrow E_\infty^{i+j} = H^{i+j}(X, \Omega_{X/S})$$

$$H_{DR}^{i+j}(X/S)$$

について考える. 標数 0 の時と違って, 標数 $p > 0$ の時は,

(*) は一般に E_1 で退化しない.

系 2. $\dim X \leq p$ で, X は k 上 proper かつ $W_2(k) \wedge$ liftable とする. この時, (*) は E_1 で退化する.

証明) $\dim_k H^j(\Omega_{X/k}^i) < \infty$ であるから,

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(\Omega_{X/k}^i) = \dim_k H_{DR}^n(X/k)$$

を示せばよい. 系 1 より $D(X')$ において,

$$\oplus \Omega_{X'/S}^i[-i] \simeq F_* \Omega_{X/S}$$

$$\therefore H^n(X', \oplus \Omega_{X'/S}^i[-i]) \simeq H^n(X', F_* \Omega_{X/S})$$

$$\text{左辺} \cong \oplus H^{n-i}(X', \Omega_{X'/S}^i) \cong \oplus H^{n-i}(X, \Omega_{X/S}^i) \otimes_k k$$

$$F \text{ は finite だから, 右辺} \cong H^n(X, \Omega_{X/S}) = H_{DR}^n(X/k).$$

証明終.

系 3. X は k 上 proper かつ $W_2(k) \wedge$ liftable とする. この時, $i+j < p$ に対して, (*) は $E_1^{ij} = E_\infty^{ij}$ を満たす.

証明) $m < p$ に対して.

$$H^n(X', \tau_{<p} F_* \Omega_{X'/k}^i) \cong H^n(X', F_* \Omega_{X'/k}^i)$$

であることに注意すれば、系2と同様にして証明される。□

系4. K を標数0の体とし、 X は K 上 smooth proper scheme とする。この時、Hodge spectral sequence は E_1 で退化する。

証明) $\mathbb{Z}$ 上有限生成な K の部分環 A で商体が K であるものと、smooth proper morphism $f: X \rightarrow \text{Spec } A$ で、generic fiber が X であるものが存在する。 $h^{i,j} = \dim_K H^j(X, \Omega_X^i)$
 $h^n = \dim_K H_{\text{DR}}^n(X/K)$ とおく。最初から X は connected で次元が d であるとしておいてよい。必要なら A を局所化して、 $R^i f_* \Omega_{X/A}^i$, $R^n f_* \Omega_{X/A}^i$ は locally free で rank が X の $h^{i,j}$, h^n であるとしてよい。($\therefore$ base change と可換.)

$\text{Spec}(A \otimes \mathbb{Q})$ の $\overset{129}{\text{closed point}}$ の $\text{Spec } A$ における scheme theoretic image を T とし、 T の closed point s で $k = k(s)$ の標数が p で $p \geq d$ となるようなものをとる。 $\mathcal{O}_s$ を T における s の local ring としその極大イデアルを $\mathfrak{m}_s$ とする。 $X_s = X \otimes_A (\mathcal{O}_s / \mathfrak{m}_s^2)$ は $X_s = X \otimes_A k(s)$ の lifting で $\mathcal{O}_s / \mathfrak{m}_s^2 = W_2(k)$ 。 $\dim_k H^j(X_s, \Omega_{X_s}^i) = h^{i,j}$
 $\dim_k H_{\text{DR}}^n(X_s / k(s)) = h^n$ で、 $d \leq p$ だから系2より

$$\sum_{i+j=n} h^{i,j} = h^n$$

証明終。

次に、小平の *vanishing theorem* を正標数の場合に拡張する。次の系は Raynaud による。

系 5. X は k 上 *smooth, projective, of pure dimension* d とし、 $W_2(k) \curvearrowright$ *liftable* とする。 L は X 上の *invertible sheaf* で次の (i) (ii) のうちの一つを満たすとする。

(i) L は *ample* .

(ii) $d=2$ で L は *numerically positive* (すなわち、 $L \cdot L > 0$ で、任意の *effective divisor* D に対して $L \cdot D(D) \geq 0$) .

この時、次が成り立つ。

$$(5.1) \quad H^j(X, \Omega^i \otimes L) = 0 \quad \text{for } i+j > \sup(d, 2d-P),$$

$$(5.2) \quad H^j(X, \Omega^i \otimes L^{-1}) = 0 \quad \text{for } i+j < \inf(d, P).$$

((5.1) と (5.2) は Serre duality により同値。)

系 5 の証明のために次の補題を示す。

補題. X を *smooth k -scheme*, M を X 上の *invertible sheaf*, h を 整数 とする。 $T_{k,F} \Omega_X^i$ は $D(X')$ において微分が 0 であるような *complex* と同型で、 $i+j < h$ に対して $H^j(X, \Omega_X^i \otimes M^{\otimes P}) = 0$ と仮定する。この時、 $i+j < h$ に対して、 $H^j(X, \Omega_X^i \otimes M) = 0$ が成り立つ。

補題の証明) $M' = M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$ とおく。 $F^* M' \cong F_x^* M \cong M^{\otimes P}$ に注意する。

$$\begin{aligned} H^j(X, \Omega_x^i \otimes M^{\otimes P}) &\cong H^j(X', F_* (\Omega_x^i \otimes M^{\otimes P})) \\ &\cong H^j(X', F_* \Omega_x^i \otimes M'). \end{aligned}$$

hypercohomology の spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(X', F_* \Omega_x^i \otimes M') \Rightarrow E_\infty^{i+j} = H^{i+j}(X', F_* \Omega_x^i \otimes M')$$

において、仮定から、 $E_1^{i,j}$ は $i+j < l$ のとき 0 であるから $n < l$ に対して $E_\infty^n = H^n(X', M' \otimes F_* \Omega_x) = 0$ 。また $n < l$ の時、

$$\begin{aligned} H^n(X', M' \otimes F_* \Omega_x) &\cong H^n(X', M' \otimes \tau_{<l} F_* \Omega_x) \\ &\cong \bigoplus_{i+j=n} H^j(X', M' \otimes \Omega_{X'}^i) \\ &\cong \bigoplus_{i+j=n} H^j(X, M \otimes \Omega_x^i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l. \end{aligned}$$

従って、 $i+j < l$ に対し、 $H^j(X, M \otimes \Omega_x^i) = 0$ 。

証明終。

系 5 の証明) $l \leq P$ の時、 $\tau_{<l} F_* \Omega_x$ は $D(X')$ において微分が 0 であるような complex に同型である。(i) が成り立つ時 $j < d$ ならば十分大きな N に対して $H^j(X, \Omega_x^i \otimes L^{\otimes N}) = 0$ である。特に $N = P^n$ とすれば補題より $H^j(X, \Omega_x^i \otimes L^{-1}) = 0$ 。よって (5.2) が成り立つ。(ii) を仮定した時は、 $i+j < 2$ に対して N を十分大きくとれば $H^j(X, \Omega_x^i \otimes L^{\otimes N}) = 0$ となることを示せばよい。 $j=i=0$ のときは明らか。 $j=1, i=0$ の時

は Szapiro の結果から ([6], prop. 2). $j=0, i=1$ の時は,

$$H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{\otimes N}) \neq 0 \text{ とすると, } H^0(L^{\otimes N}) \subseteq H^0(\Omega_X^1). \text{ しかし,}$$

$$H^2(L^{\otimes N}) \cong H^0(\Omega_X^2 \otimes L^{\otimes(-N)}) = 0 \quad (\because \neq 0 \Rightarrow (\Omega_X^2 \otimes L^{\otimes(-N)}) \cdot L \cong 0,$$

$$\therefore \Omega_X^2 \cdot L \geq N(L \cdot L), \quad L \cdot L > 0 \text{ だから } N \gg 0 \text{ とすると矛盾。})$$

よ、て、 $N \rightarrow \infty$ の時 $H^0(L^{\otimes N})$ の次元 $\rightarrow \infty$. これは不可能である。

証明終.

標数 0 の場合の vanishing theorem も、系 5 から (系 4 と全く同様にして) 証明される。

系 6. (Kodaira-Akizuki-Nakano, Ramanujan) K を標数 0 の体、 X を次元 d (pure dim), smooth projective K -scheme で、 L を invertible sheaf とする。 L は ample であるか又は、 $d=2$ で L は numerically positive とする。この時、

$$H^i(X, \Omega_X^j \otimes L) = 0 \quad \text{for } i+j > 0$$

$$(\Leftrightarrow H^j(X, \Omega_X^i \otimes L^{-1}) = 0 \quad \text{for } i+j < d).$$

系 7. 系 5 の仮定のもとで、 ± 5 に D X smooth divisor とする。 D は ample で $\omega_D(k)$ は liftable とする。この時、制限写像 $H_{DR}^n(X/k) \rightarrow H_{DR}^n(D/k)$ は $n < \inf(p, d) - 1$ に対して同型、 $n = \inf(p, d) - 1$ に対して単射である。

証明) $\Omega_X \rightarrow \Omega_D$ の kernel $\Omega_X(\log D)(-D)$ に対して次の exact sequence が存在する。(cf. [1] §4)

$0 \rightarrow \Omega_X(-D) \rightarrow \Omega_X(\log D)(-D) \rightarrow \Omega_D^1(-D) \rightarrow 0$
 系 5.8 $(X, \mathcal{O}_X(D)), (D, \mathcal{O}_D(D))$ に適用すれば、 $n < \inf(p, d)$ に対して $H^n(X, \Omega_X(-D)) = H^{n-1}(D, \Omega_D^1(-D)) = 0$.

$\therefore H^n(X, \Omega_X(\log D)(-D)) = 0$ for $n < \inf(p, d)$.

証明終。

参考文献

[1] P. Deligne and L. Illusie : Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, Invent. math. 89, 247-270 (1987).

[2] N. Katz : Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem. Publ. Math. Inst. Hautes. Etud. Sci. 39, 175-232 (1970).

[3] P. Cartier : Une nouvelle opération sur les formes différentielles. C.R. Acad. Sci, Paris, 244, 426-428 (1957).

[4] L. Illusie : Réduction semi-stable et dégénérescence de suites spectrales de Hodge, preprint.

[5] I. Bauer and S. Kosarew : On the Hodge spectral sequence for some classes of non-complete algebraic manifolds, Math. Ann. 284, 577-593 (1989).

[6] R. Ménégaux : Un théorème d'annulation en caractéristique

positive, Astérisque 86, 35-43 (1981).

注) さらに進んだ結果については、[1] 33, 4, [4], [5]
を参照して下さい。