

$P^2(C)$ 内のケーラー角度一定な極小曲面

山形大学理学部 尾方 隆司 (Takashi OGATA)

一定な正則断面曲率 4ρ を持つ複素 n 次元ケーラー多様体を X とし、 $\langle, \rangle$ をそのケーラー計量、 J を複素構造とする。2次元リーマン多様体 M に対して、等長極小はめ込み $x: M \rightarrow X$ を考える。 M の正規直交基 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ に対して、 $\cos(\alpha) = \langle J\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle$ で定義される α はケーラー角度と呼ばれ、写像 x の正則性からの隔たりを示す。 $(\cos(\alpha))$ はケーラー関数と呼ばれる。) 実際、 M 上、一定であれば各々次を意味する。

$$\cos(\alpha) = 1 \iff x: \text{正則}$$

$$\cos(\alpha) = -1 \iff x: \text{反正則}$$

$$\cos(\alpha) = 0 \iff x: \text{全実}$$

つまり、ケーラー角度は X 内の極小曲面を調べる際に、重要な役割を果たす不変量である。我々は、ケーラー角度一定な極小曲面の特徴付けと分類を目指す。そのためにまずそのような知られている例を示そう。 $P^n(C)$ を Fubini-Study 計量を持つ、一定な正則断面曲率 $4\rho (> 0)$ の、 n 次元複素射影空間とし、 $S^2(K)$ を Gauss 曲率 K の 2 次元球面とする。この時、各整数 $p (0 \leq p \leq n)$ に対して full、等長極小はめ込み $\varphi_{n,p}: S^2(K_{n,p}) \rightarrow P^n(C)$ が構成される。ここで $K_{n,p}$ 、および $\varphi_{n,p}$ のケーラー関数 $\cos(\alpha_{n,p})$ は次で与えられる。

$$K_{n,p} = \frac{4\rho}{(n + 2p(n - p))}$$

$$\cos(\alpha_{n,p}) = \frac{(n - 2p)}{(n + 2p(n - p))}$$

これらの例は, complex-Boruvka 球面と呼ばれるものである [3]。ケーラー角度一定な $P^n(C)$ 内の極小曲面の特徴付けとして、より一般的な形で次の定理が大仁田さんにより示された。

定理[5] $\varphi : M \longrightarrow P^n(C)$ を full, 等長極小はめ込みとし、Gaussian curvature K とケーラー角度 $\cos(\alpha)$ はともに、一定とする。この時、

(1) $K > 0$ の時、ある p ($0 \leq p \leq n$) が存在して $\varphi(M)$ は $\varphi_{n,p}(S^2(K))$ の開部分多様体になる。

(2) $K = 0$ の時、 $\cos(\alpha) = 0$ つまり全実はめ込みになる。この場合は、劔持さんにより分類完了 [2]。

(3) $K < 0$ の時、 φ は存在しない。

この定理に関して、次のような予想が与えられた。

Conj.(a) Gaussian curvature K が一定ならば、ケーラー角度もまた一定になる。

Conj.(b) ケーラー角度が一定ならば、Gaussian curvature K もまた一定になる。

Conj.(a) に関して、昨年劔持、増田さんにより「2次元複素射影空間内の Gauss 曲率一定な極小曲面のケーラー角度は一定」という結果が示され $n = 2$ に対して肯定的に解決された [4]。(大域的にも、小域的にも更なる仮定を必要としないで、証明が与えられた。)

ここでは Conj.(b) について考えよう。次の定理により、否定的になる。

主定理 X を一定な正則断面曲率 4ρ を持つ複素 2 次元ケーラー多様体とする。ある正数 k にたいして、 R^2 のある開集合 U と、 U 上で定義された k に依存して定まる等温計量 $\lambda(k)^2 |dz|^2$ 、および次のような性質を持つ等長はめ込み $x_k: U \rightarrow X$ が存在する。

- (1) x_k は極小はめ込み
- (2) x_k のケーラー関数 $\cos(\alpha_k) = 0$
- (3) x_k の Gaussian curvature $K_k = \rho - 2c(k)^2$

但し、 $c(k)$ は一定でない U 上のある可微分関数

§1. 複素 2 次元ケーラー多様体

一定な正則断面曲率 4ρ を持つ複素 2 次元ケーラー多様体を X とし、 J をその複素構造とする。 X の unitary coframe を $\{\omega_\alpha\}$, unitary connection forme を $\{\omega_{\alpha\beta}\}$ とすると、 X の構造方程式は次で与えられる。 ($1 \leq \alpha, \beta \dots \leq 2$)

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & d\omega_\alpha = \sum \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta, \quad \omega_{\alpha\beta} + \bar{\omega}_{\beta\alpha} = 0, \\
 & d\omega_{\alpha\beta} = \sum \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta}, \\
 & \Omega_{\alpha\beta} = -\rho(\omega_\alpha \wedge \omega_\beta + \delta_{\alpha\beta} \sum \omega_\gamma \wedge \bar{\omega}_\gamma)
 \end{aligned}$$

2 次元リーマン多様体 M の Gaussian curvature を K とし、等長極小はめ込み $x: M \rightarrow X$ を考える。但し、以下、 x は正則でも反正則でもないとする。よってケーラー関数は M 上 $\cos(\alpha) \neq \pm 1$ となる。 M の任意の正規直交基 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ に対して、

$$(1.2) \quad \tilde{e}_3 = -\cot(\alpha)\tilde{e}_1 - \operatorname{cosec}(\alpha)J\tilde{e}_2$$

$$\tilde{e}_4 = \operatorname{cosec}(\alpha)J\tilde{e}_1 - \cot(\alpha)\tilde{e}_2$$

により得られるベクトルの系 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ は x に沿った adapted な正規直交基になる。つまり $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ は M の接空間の基であり、 $\{\tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ は M の法空間の基になる。逆に、 $\{\tilde{e}'_3, \tilde{e}'_4\}$ を任意の法空間の正規直交基とすると

$$\tilde{e}'_1 = \cot(\alpha)\tilde{e}'_3 - \operatorname{cosec}(\alpha)J\tilde{e}'_4$$

$$\tilde{e}'_2 = \operatorname{cosec}(\alpha)J\tilde{e}'_3 + \cot(\alpha)\tilde{e}'_4$$

により与えられる $\{\tilde{e}'_1, \tilde{e}'_2\}$ は M の接空間の正規直交基となる。この時、 $\cos(\alpha) = \langle J\tilde{e}'_4, \tilde{e}'_3 \rangle$ となることに注意。次に、 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ にたいして

$$(1.3) \quad e_1 = \frac{1}{2}\sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\tilde{e}_1 - J\tilde{e}_2)$$

$$e_3 = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\tilde{e}_1 + J\tilde{e}_2)$$

とおくと、 $\{e_1, e_2 = Je_1, e_3, e_4 = Je_3\}$ は x に沿った J-canonical 基になる。(adapted ではない。) この時得られた $\{\tilde{e}_A\}, \{e_A\} (1 \leq A, B, \dots \leq 4)$ に対してその dual frames を各々 $\{\tilde{\theta}_A\}, \{\theta_A\}$ と表し、さらに、connection forms を $\{\tilde{\theta}_{AB}\}, \{\theta_{AB}\}$ とする。このようにして得られた 1-forms を用いて、さらに

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \omega_\alpha &= \theta_{2\alpha-1} + i\theta_{2\alpha} \\ \omega_{\alpha\beta} &= \theta_{2\alpha-1} \theta_{2\beta-1} + i\theta_{2\alpha} \theta_{2\beta-1} \end{aligned}$$

とすると、 $\{\omega_\alpha\}$ は unitary 1-form, $\{\omega_{\alpha\beta}\}$ はその unitary connection form となり、構造方程式(1.1)を満たす。また(1.3)をもちいて次の関係式を得る。

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_1 + i\tilde{\theta}_2 &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_2 \\ \tilde{\theta}_3 + i\tilde{\theta}_4 &= \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_2 \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_{12} &= i(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_{11} - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_{22}) \\ \tilde{\theta}_{34} &= -i(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_{11} - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_{22}) \\ \tilde{\theta}_{13} + i\tilde{\theta}_{23} &= -\omega_{12} - \frac{1}{2}(d\alpha - \sin(\alpha)(\omega_{11} + \omega_{22})) \\ \tilde{\theta}_{14} + i\tilde{\theta}_{24} &= i(\omega_{12} - \frac{1}{2}(d\alpha - \sin(\alpha)(\omega_{11} + \omega_{22}))) \end{aligned}$$

各 forms の M への制限を、同じ文字で表すと

$$\tilde{\theta}_3 = \tilde{\theta}_4 = 0$$

となる。ここで $\phi = \tilde{\theta}_1 + i\tilde{\theta}_2$ と置き、(1.5)の外微分を考えると、 M 上、局所的に定義され、複素数に値をとる滑らかな関数 a 、 c が存在して次を満たす式が得られる。

$$(1.7) \quad \begin{aligned} d\alpha + \sin(\alpha)(\omega_{11} + \omega_{22}) &= 2a\phi \\ \omega_{12} &= c\bar{\phi} \end{aligned}$$

(1.7) をさらに外微分することにより、可積分条件として次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= a\phi + \bar{a}\bar{\phi} \\
 (1.8) \quad (da - ia\tilde{\theta}_{12}) \wedge \phi &= -\{|a|^2 \cot(\alpha) + \frac{3}{4}\rho \sin(2\alpha)\} \phi \wedge \bar{\phi} \\
 (dc + 3ic\tilde{\theta}_{12}) \wedge \bar{\phi} &= -\cot(\alpha)ac\phi \wedge \bar{\phi} \\
 K &= (1 + 3\cos^2(\alpha))\rho - 2(|a|^2 + |c|^2)
 \end{aligned}$$

(注.(1.8)₁はケーラー角度に関する式、(1.8)_{2,3}はCodazziの式、(1.8)₄はGaussの式である。)

§2. 曲面の局所存在定理と主定理の証明

Mの任意な点pの近傍Uにおいて、isothermal coordinate $\{z\}$ を考える。ある正值関数 λ に対して、計量は $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ と表される。この時、 $\phi = \lambda dz$ となる。さらに、ある局所複素数値関数 s を用いて

$$\tilde{\theta}_{12} = i(s\phi - \bar{s}\bar{\phi})$$

と置く。(1.8)式は次のようになる。

$$(2.1) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\lambda^2 s$$

$$(2.2) \quad -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial s}{\partial \bar{z}} + 2|s|^2 - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{K}{2}$$

$$(2.3) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial c}{\partial z} = 3cs - \cot(\alpha)ac$$

$$(2.4) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = a\bar{s} + |a|^2 \cot(\alpha) + \frac{3}{4}\rho \sin(2\alpha)$$

$$(2.5) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = a$$

これらは、 X 内のケーラー角度 α を持つ極小曲面上で成り立つ微分方程式系である。以下、 α 一定とする。(2.5)より $a = 0$ 。よって(2.4)より $\sin(2\alpha) = 0$ 、つまり $\alpha = 0$ 又は $\pi/2$ 。

x は正則でないとしていたので、 $\alpha = \pi/2$ を得る。(2.1)と(2.3)より

$$(2.6) \quad \frac{\partial(\lambda^3 c)}{\partial z} = 0$$

ここで、我々は c に関する情報が欲しい。 $h = (h_{ij}^\alpha)$ を第2基本形式の係数とすると、

$$V_{11} = \sum h_{11}^\alpha \tilde{e}_\alpha, \quad V_{12} = \sum h_{12}^\alpha \tilde{e}_\alpha$$

は等長極小はめ込みの不変法ベクトル場である。ここでは、

$$V_{11} = -\frac{1}{2}(c + \bar{c})\tilde{e}_3 + \frac{i}{2}(c - \bar{c})\tilde{e}_4, \quad V_{12} = -\frac{i}{2}(c - \bar{c})\tilde{e}_3 + \frac{1}{2}(c + \bar{c})\tilde{e}_4$$

となり、 $\langle V_{11}, V_{12} \rangle = 0$, $\|V_{11}\| = \|V_{12}\| = |c|^2$ が得られる。もし、 M 上 $c = 0$ ならば、 K は一定となる。よってある近傍で $c > 0$ としてよい。このことから、我々は法ベクトルを次のように取り替える。

$$\tilde{e}_3 = \frac{V_{11}}{\|V_{11}\|}, \quad \tilde{e}_4 = \frac{V_{12}}{\|V_{12}\|}$$

この新しいframeに関して $(c - \bar{c}) = 0$ となる。この時、(2.6)を用いると $\lambda^3 c : \text{const}(=k$ とおく)となる。一方、Gaussの式(1.8)₄より

$$K = -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial z \partial \bar{z}} = \rho - 2c^2$$

ここで、 $c = k/\lambda^3, f = 2\log\lambda$ とおくと、

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = k^2 e^{-2f} - \frac{\rho}{2} e^f$$

を得る。これは、Cauchy-Kovalevskaya の定理により、解を持つ (Spivak V 等参照)。

今、 $k > 0$ を任意に与え、 R^2 の座標系を $\{z\}$ とし、ある開集合 U 上での (2.7) の解を $f(k)$ とし、これを用いて $\lambda(k) = \exp(f/2), c(k) = k/\lambda^3$ と置く。 U 上に *Riemannian metric* $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ を定義する。さらに、これらを用いて次のように定義する。

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi \\ \omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} \\ \omega_{11} &= -i\tilde{\theta}_{12} \\ \omega_{22} &= i\tilde{\theta}_{12} \\ \omega_{12} &= -\bar{\omega}_{21} = c\bar{\phi} \end{aligned}$$

ここで

$$\tilde{\theta}_{12} = -\frac{i}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \phi + \frac{i}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} \bar{\phi}$$

である。これらは、 U 上で定義されて、構造方程式 (1.1) を満たす。次の曲面のはめ込みの存在定理は *Eschenburg, Gaudalupe, Tribuzy* [1] による。

定理 2.1 [1] X を一定な正則断面曲率 4ρ をもつ複素 2 次元ケーラー多様体とし、 (M, ds^2)

を単連結な 2 次元 *Riemannian* 多様体とする。 M 上定義された 1-forms $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{12}\}$

が構造方程式(1.1)を満たし、 $ds^2 = \omega_1 \bar{\omega}_1 + \omega_2 \bar{\omega}_2$ であるならば、等長写像 $x : M \rightarrow X$ と x に沿った unitary frame $\{E_1, E_2\}$ が存在し、この時、 $\{\omega_1, \omega_2\}$ は $\{E_1, E_2\}$ の unitary coframe であり、 $\{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{12}\}$ は $\{\omega_1, \omega_2\}$ に関する unitary connection form になる。

この存在定理により、我々は「主定理」を得る。

References

- [1] Eschenburg, J.H., Gaudalupe, I.V. and Tribuzy, R.A., The fundamental equations of minimal surfaces in CP^2 , Math. Ann., 270(1985), 571-598.
- [2] Kenmotsu, K., On minimal immersions of R^2 into $P^n(C)$, J. Math. Soc. Japan, 37(1985), 665-682.
- [3] Kenmotsu, K., On Veronese-Boruvka spheres, Archivum Math., 3(1997), 37-40.
- [4] Kenmotsu, K., and Masuda, K., On minimal surfaces of constant curvature in two dimensional complex space form, to appear.
- [5] Ohnita, Y., Minimal surfaces with constant curvature and Kaehler angle in complex space form, Tsukuba J. Math., 13(1989), 191-207.
- [6] Ogata, T., Curvature pinching theorem for minimal surfaces with constant Kaehler angle in complex projective space, Tohoku Math. J., 43(1991), 361-374.