

階数3の multiplicity-free 作用に関する不変式と 不変微分作用素¹

(Invariant polynomials and invariant differential operators
for multiplicity-free actions of rank three)

京都大学大学院理学研究科 菊地 克彦 (Katsuhiko Kikuchi)
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

Abstract

Let V be a finite-dimensional vector space over $\mathbb{C}$, K a connected compact Lie group acting on V as a linear isomorphism. We call the action (K, V) multiplicity-free if each irreducible K -module appears at most one in the polynomial ring $\mathcal{P}(V)$ on V . In this announcement we describe K -invariant polynomials and K -invariant differential operators for the multiplicity-free action (K, V) of rank three such that (K, V) is not derived from a Hermitian symmetric pair. Moreover, we give two ‘symmetric’ slices for visibility of each action (K, V) in this announcement. We show that the symmetric slice indicates a symmetry of invariant polynomials or of invariant differential operators for the action.

MSC Classification: Primary 22E46, Secondary 05E05, 16S32, 20G05.

1 準備

V を有限次元複素 vector 空間, K を連結 compact Lie 群で, V に線型かつ局所効果的, 即ち V のすべての元を不変にする K の元は有限個であるように作用するとする. K は V 上の (正則) 多項式環 $\mathcal{P}(V)$ に自然に作用する.

定義 1 作用 (K, V) が **multiplicity-free** であるとは, $\mathcal{P}(V)$ の K -加群としての既約分解 $\mathcal{P}(V) = \sum_{\lambda} V_{\lambda}$ において各 K -既約加群が高々重複度 1 で現れることである.

今回は, multiplicity-free 作用のうち本質的に Hermite 対称対から得られないもので階数が 3 なるものについて K -不変式と K -不変微分作用素を具体的に記述する.

$\overline{\mathcal{P}(V)}$ で V 上の反正則多項式環を表す. これは次のように考えることができる. $\overline{V}$ で V の複素共役な vector 空間, 即ち実 vector 空間としては V と同じもので, 複素数体の作用が V のときと複素共役になるものとする. すると, $\overline{\mathcal{P}(V)}$ は $\overline{V}$ 上の正則多項式環とみなされる. $n = \dim V$ とし, V 上の K -不変な Hermite 内積 $(\cdot, \cdot)_V$ を 1 つ固定し, この内積に関する正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ をとり, この基底についての座標関数を $z_1, \dots, z_n$ とする. すると, $\mathcal{P}(V)$ の元は $z_1, \dots, z_n$ の多項

¹This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

Received November 1, 2006. Revised January 12, 2007.

式で表され、 $\overline{\mathcal{P}(V)}$ の元は座標関数の複素共役 $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ の多項式で表される。 $V_{\mathbb{R}}$ で V を実 vector 空間とみなしたものを表すとする、 $V_{\mathbb{R}}$ 上の複素係数多項式は $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ の多項式で表される。 よって、 $V_{\mathbb{R}}$ 上の複素係数多項式全体のなす環 $\mathcal{P}(V_{\mathbb{R}})$ は $\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)}$ と同じものとみなされる。 $z = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \in V$ に対応する $\bar{V}$ の元を $\bar{z}$ で表すとする。 すると、 K は $k \cdot \bar{z} = \overline{k \cdot z}$ ($k \in K, z \in V$) により V への作用と反傾に $\bar{V}$ に作用する。 $f \in \mathcal{P}(V)$ に対して、 $\bar{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ で $\overline{\mathcal{P}(V)}$ の元が自然に決まる。

$\mathcal{P}(V)$ には以下で与えられる Fischer 内積を入れる。

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{F}} = \frac{1}{\pi^n} \int_V f_1(z) \overline{f_2(z)} e^{-\|z\|_V^2} d\mu(z), \quad (1,1)$$

ただし、 $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(V)$ 、 $\|\cdot\|_V$ は V 上の K -不変な Hermite 内積から得られる norm で、 μ は V を $\mathbb{R}^{2n}$ とみなしたときの Lebesgue 測度とする。 これは次のようにも表される。 $f_1(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha}$ 、 $f_2(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_{\alpha} z^{\alpha}$ としたとき、 $(f_1, f_2)_{\mathcal{F}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \alpha! a_{\alpha} \bar{b}_{\alpha}$ 、 ただし、 $z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ 、 $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ 。

V 上の多項式係数微分作用素全体のなす環を $\mathcal{PD}(V)$ で表すことにする。 このとき、 K は $\mathcal{P}(V)$ 、 $\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)}$ 、 $\mathcal{PD}(V)$ に以下のように作用する。

$$\begin{aligned} k \cdot f(z) &= f(k^{-1} \cdot z), \\ (k \cdot f_1 \otimes \bar{f}_2)(z, \bar{z}) &= f_1 \otimes \bar{f}_2(k^{-1} \cdot z, k^{-1} \cdot \bar{z}) = f_1(k^{-1} \cdot z) \overline{f_2(k^{-1} \cdot z)}, \\ (k \cdot D)f(z) &= k \cdot (D(k^{-1} \cdot f))(z) = D(k^{-1} \cdot f)(k^{-1} \cdot z). \end{aligned}$$

K の $\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)}$ への作用は $\mathcal{P}(V_{\mathbb{R}})$ への自然な作用と一致していることに注意しておく。 $V_{\mathbb{R}}$ 上の K -不変多項式全体のなす部分環を $\mathcal{P}(V_{\mathbb{R}})^K = (\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K$ 、 V 上の K -不変な多項式係数微分作用素のなす部分環を $\mathcal{PD}(V)^K$ と表すことにする。 これらには、 $\mathcal{P}(V)$ の既約成分 V_{λ} から以下のようにして定まる元がそれぞれ存在する。 $d_{\lambda} = \dim V_{\lambda}$ とし、 V_{λ} の Fischer 内積に関する正規直交基底 $\{f_1, \dots, f_{d_{\lambda}}\}$ を1つとり、 $p_{\lambda}(z, \bar{z})$ 、 $p_{\lambda}(z, \partial)$ を次のように定める。

$$p_{\lambda}(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^{d_{\lambda}} f_j(z) \overline{f_j(z)}, \quad (1,2)$$

$$p_{\lambda}(z, \partial) = \sum_{j=1}^{d_{\lambda}} f_j(z) \bar{f}_j(\partial). \quad (1,3)$$

ただし、 z_k に関する偏微分作用素を ∂_k とし、 $f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}$ としたとき、 $\bar{f}(\partial) = \sum_{\alpha} \bar{a}_{\alpha} \partial_{z_{\alpha}}$ とする。 これらの $p_{\lambda}(z, \bar{z})$ 、 $p_{\lambda}(z, \partial)$ を具体的に記述するのが今回の目標である。

以下 (K, V) は multiplicity-free であると仮定する。 その具体的な記述を highest weight theory を用いて与えることにする。 $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$ を K の Lie 代数、 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ をその複素化、 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数、 $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間とする。 $\mathcal{P}(V)$ の既約成分はその highest weight $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ で決まる。 λ に対応する既約成分を V_{λ} とし、 highest weight vector を $f_{\lambda} \in V_{\lambda}$ と表すことにする。 V_{λ} はある非負整数 l につ

いて l 次斉次多項式全体のなす $\mathcal{P}(V)$ の部分 vector 空間 P_l に含まれている. この l を λ の次数と呼び $\deg \lambda$ で表す. $\Lambda := \{\lambda \in \mathfrak{h}^*; V_\lambda \neq 0\}$ とすると, Λ は Abel 半群になる. Λ の元 λ で highest weight vector f_λ が既約多項式となるものすべてを集めたものを $\Lambda_0 := \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ とする. すると, Λ_0 は自由 Abel 半群として Λ を生成する.

定義 2 Λ_0 の元の個数 r を (K, V) の **rank** と呼ぶ.

Λ_0 の元 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を基本 highest weight, 対応する highest weight vector $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_r}$ を基本 highest weight vector と呼ぶ. このとき, 次の結果が得られている.

命題 3 ([HU]) $\{p_{\lambda_j}(z, \bar{z})\}_{j=1}^r$ および $\{p_{\lambda_j}(z, \partial)\}_{j=1}^r$ はそれぞれ代数的に独立であり, かつ $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K$, および $\mathcal{PD}(V)^K$ を可換環として生成する.

$D \in \mathcal{PD}(V)^K$ を V 上の任意の K -不変微分作用素とすると, D は $\mathcal{P}(V)$ のすべての既約成分 V_λ を保存し, 各 V_λ 上 scalar 倍として作用する. 特に, D として $p_\lambda(z, \partial)$ をとるとき, p_λ は各 V_μ ($\mu \in \Lambda$) に scalar 倍で作用する, 即ち,

$$p_\lambda(z, \partial)|_{V_\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \text{Id}_{V_\mu}, \quad \exists \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

この複素数 $\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$ を 2 項係数と呼ぶ. 2 項係数は以下のようにして特徴づけられる. $\rho \in \mathfrak{h}^*$ を $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ の正 root の和の $\frac{1}{2}$ 倍とし, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について次の函数 $\tau_\lambda : \Lambda + \rho \rightarrow \mathbb{C}$ を考える.

$$\tau_\lambda(\mu + \rho) = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \mu \in \Lambda.$$

$\mathfrak{a}^* = \mathbb{C}\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ を Λ で生成される $\mathfrak{h}^*$ の部分 vector 空間とすると, τ_λ は $\mathfrak{a}^* + \rho$ 上の多項式函数とみなされる. この多項式 τ_λ は以下のようにして特徴づけられるものである.

命題 4 ([Kn1]) 有限群 W が存在して, その W が $\mathfrak{a}^*$ を保存し, かつ任意の $\lambda \in \Lambda$ について τ_λ が以下のように特徴づけられる.

- (1) τ_λ は W -不変である,
- (2) $\deg \tau_\lambda = \deg \lambda$,
- (3) $\deg \mu \leq \deg \lambda$, $\mu \neq \lambda$ なる $\mu \in \Lambda$ に対して $\tau_\lambda(\mu + \rho) = 0$,
- (4) $\tau_\lambda(\lambda + \rho) = 1$.

ここまでの事項についての詳細は [BR2] を参照してもらいたい.

命題 4 の W の幾何学的意味付けを行うために, 作用の可視性を定義する.

定義 5 ([Ko1]) V を有限次元複素多様体, K を V に正則に作用する連結 Lie 群とする. 作用 (K, V) が可視的であるとは, K -不変な開集合 D および V の全実部分多様体 M が存在して, 次の性質を満たすことである.

- (1) $K \cdot M = D$,
 - (2) 任意の $x \in M$ について, $J_x(T_x M) \subset T_x(K \cdot x)$,
- ただし, J_x は $x \in V$ における接空間上の複素構造である.

定義 6 ([Ko2]) V を有限次元複素多様体, K を V に正則に作用する連結 Lie 群とする. 作用 (K, V) が強可視的であるとは, V の開集合 D , V の全実部分多様体 M , および V 上の反正則同相 σ が存在して, 以下の性質が成り立つことである.

- (1) $K \cdot M = D$,
 - (2) σ は M を保存し, $\sigma|_M = \text{Id}_M$,
 - (3) 任意の $v \in M$ について $\sigma(K \cdot v) = K \cdot v$.
- この M を作用 (K, V) の slice と呼ぶ.

作用 (K, V) が強可視的ならば可視的であり, 可視的ならば適当の条件の下で multiplicity-free である. 特に, 作用 (K, V) が強可視的ならば multiplicity-free である ([Ko2] を参照せよ). 本講究録の笹木集夢氏の報告 [Sas] において, 既約な multiplicity-free 作用が強可視的であることが示されている. なお, 本稿の第 3 節以降で述べられる作用はすべて強可視的である.

最後に, 不変式や 2 項係数, 不変微分作用素を記述するために, 下降冪を表す記号を与えておく.

$$a^l = \begin{cases} a(a-1) \cdots (a-l+1), & l \geq 1, \\ 1, & l = 0. \end{cases}$$

2 Hermite 型の場合

multiplicity-free 作用のうち, もっとも典型的なものである Hermite 型作用についてまとめておく. なお, 詳細は [H][FK1][FK2][J][Ko3][Sat][Sch][Se][U] を参照してもらいたい. (G, K) を既約な Hermite 対称対, 即ち G を中心が有限な非 compact 単純 Lie 群, K を G の極大 compact 部分群で, 等質空間 G/K が Hermite 対称空間になるものとする. $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$ をそれぞれ G , K の Lie 代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{k}$ の中心の随伴作用に関する分解とする. すると, $\mathfrak{p}_+$ は複素 vector 空間であり, K の $\mathfrak{p}_+$ への作用 $(K, \mathfrak{p}_+)$ は multiplicity-free になる. $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{p}_+$ への自然な実線型写像により, $\mathfrak{p}$ を複素 vector 空間とみなす. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とする. すると, $(K, \mathfrak{p})$ は $\mathfrak{a}$ を slice とする強可視的な作用になる ([Ko1][Ko2][Sas] を参照せよ). さらに, G の実 rank である $\dim \mathfrak{a}$ は $(K, \mathfrak{p})$ の multiplicity-free 作用としての rank と一致し, $r = \text{rank}(K, \mathfrak{p})$ とすると, 基本 highest weight $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ はそれぞれ対応する基本 highest weight vector $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_r}$ が $\deg f_{\lambda_j} = j$ ($1 \leq j \leq r$) となるようにとれる. $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ に現れる K -既約成分に対応する highest weight たち全体のなす半群は $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ を生成系とする自由 Abel 半群であり, Λ を含む η^* の最小の複素部分 vector 空間を $\mathbb{C}\Lambda$ とすると, $\mathbb{C}\Lambda$ は $\mathfrak{a}$ の複素化 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ と一致し, Λ_0 を基底にもつ. いま, compact 群 $N_K(\mathfrak{a})$, $Z_K(\mathfrak{a})$, $W_K(\mathfrak{a})$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} N_K(\mathfrak{a}) &= \{k \in K; k \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}, \\ Z_K(\mathfrak{a}) &= \{k \in K; k \cdot v = v \text{ for all } v \in \mathfrak{a}\}, \\ W_K(\mathfrak{a}) &= N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

命題 7 (1) $W_K(\mathfrak{a})$ は有限群であり, $(\mathcal{P}(\mathfrak{p}) \otimes \overline{\mathcal{P}(\mathfrak{p})})^K \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W_K(\mathfrak{a})}$,
 (2) $W = \text{Ad}_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}}^*(W_K(\mathfrak{a}))|_{\mathfrak{a}^*}$ とすると, W は命題 4 の W と一致する.

$\lambda \in \Lambda$ に対して, $p_\lambda(z, \bar{z})$, $p_\lambda(z, \partial)$ は具体的に計算することができる. そのために, Λ の元 λ を分割を用いて表す. 任意の $\lambda \in \Lambda$ は非負整数の減少列 $\lambda = (l_1, \dots, l_r)$ ($l_1 \geq \dots \geq l_r \geq 0$) と表される. 特に, $1 \leq j \leq r$ なる j について $\lambda_j = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, ただし, 右辺の 1 は j 個であるとする.

命題 8 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, K -不変式および 2 項係数は次のように表される.

$$p_\lambda(z, \bar{z}) = c_{\alpha, \lambda} J_\lambda^{(\alpha)}(z^2), \quad z \in \mathfrak{a},$$

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = c_{\alpha, \lambda} J_\lambda^{*(\alpha)}(\mu), \quad \mu \in \Lambda,$$

ただし, $J_\lambda^{(\alpha)}$ は Jack 多項式, $J_\lambda^{*(\alpha)}$ は shifted Jack 多項式 ([OO] を参照せよ) を表し, α は以下で与えられる実数で, $c_{\alpha, \lambda}$ は α, λ で決まる正実数である.

$$\alpha = \begin{cases} 2, & (G, K) = (\text{Sp}(n, \mathbb{R}), \text{U}(n)), \\ 1, & (G, K) = (\text{SU}(n, m), \text{S}(\text{U}(n) \times \text{U}(m))), \\ \frac{1}{2}, & (G, K) = (\text{SO}^*(2n), \text{U}(n)), \\ \frac{2}{n-2}, & (G, K) = (\text{SO}_0(2, n), \text{SO}(2) \times \text{SO}(n)), \\ \frac{1}{3}, & (G, K) = (\text{E}_{6(-14)}, \mathbb{T} \cdot \text{Spin}(10)), \\ \frac{1}{4}, & (G, K) = (\text{E}_{7(-25)}, \mathbb{T} \cdot \text{E}_6). \end{cases}$$

上の結果により, (K, V) が Hermite 型のときは K -不変式および 2 項係数がわかり, K -不変微分作用素も求まる. よって, 問題となるのは multiplicity-free 作用 (K, V) が Hermite 型と本質的に異なるものについて K -不変式や K -不変微分作用素を求めることである. そこで, 本質的に異なるということを明確に定義する.

定義 9 (K_1, V_1) が (K_2, V_2) と弱同値であるとは, 複素線型同型 $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ が存在して, 任意の $v \in V_1$ について $\phi(K_1 \cdot v) = K_2 \cdot \phi(v)$ が成り立つことである.

$(K_1, V_1), (K_2, V_2)$ を弱同値な multiplicity-free 作用とすると, 自然な同型により, $\mathcal{P}(V_1)$ の既約分解は $\mathcal{P}(V_2)$ の既約分解と一致する. よって, それぞれの不変式環と不変微分作用素環は自然に同一視される.

もし, 局所効果的な multiplicity-free 作用 (K, V) において K の中心の次元が V の既約成分の個数より小さければ, 適当な torus T を付け加えることにより $T \times K$ の中心の次元と V の既約成分の個数が一致かつ $(T \times K, V)$ が局所効果的となるようにすることができる. このとき, $(T \times K, V)$ は (K, V) と弱同値である.

定義 10 K を連結かつ単連結な compact 半単純 Lie 群とし, V を K が線型かつ局所効果的に作用する複素 vector 空間とする. 作用 (K, V) が indecomposable であるとは, $K = K_1 \times K_2$, $V = V_1 \oplus V_2$ かつ $i \neq j$ のとき K_i が V_j に自明に作用するような自明でない $(K_1, V_1), (K_2, V_2)$ が存在しないことである. 一般の連結 compact Lie 群については, K の半単純成分 K_s の普遍被覆群 $\tilde{K}_s$ について $(\tilde{K}_s, V)$ が indecomposable であるとき, 作用 (K, V) が indecomposable であるとする.

multiplicity-free 作用 (K, V) は, K に適当な torus T を付け加え, 必要ならば有限被覆群を考えることにより, indecomposable な multiplicity-free 作用の直積になる. このとき, 不変式環および不変微分作用素環はそれぞれ indecomposable 成分のそれらの tensor 積になる. indecomposable な multiplicity-free 作用は, 既約のときは Kac [Ka] により, 可約のときは Benson-Ratcliff [BR1], Leahy [L] によって独立に分類されている. indecomposable な multiplicity-free 作用の自明でない弱同値な組のうち torus の付加以外で得られるのは以下のものである.

- $((\mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n), \mathbb{H}^n) \sim ((\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n), \mathbb{C}^{2n}), \quad n \geq 2,$
- $(\mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(7), \mathbb{C}^8) \sim (\mathbb{T} \times \mathrm{SO}(8), \mathbb{C}^8),$
- $(\mathbb{T} \times \mathrm{G}_2, \mathbb{C}^7) \sim (\mathbb{T} \times \mathrm{SO}(7), \mathbb{C}^7).$

特に, rank が 2 以下の multiplicity-free 作用はすべて Hermite 型作用と弱同値になる. $\mathrm{rank}(K, V) = 3$ なる indecomposable な multiplicity-free 作用が Hermite 型作用と弱同値でなければ, 以下のものと弱同値である.

- (1) $(\mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C})), \quad n \geq 2,$
- (2) $(\mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(9), \mathbb{C}^{16}),$
- (3) $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n), \quad n \geq 2,$
- (4) $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*), \quad n \geq 3.$

ここで, $(\mathbb{C}^n)^*$ は複素 vector 空間としては $\mathbb{C}^n$ と同じものであり, (3) における $\mathrm{SU}(n)$ の 2 つの $\mathbb{C}^n$ への作用は同値であり, (4) における $\mathrm{SU}(n)$ の $(\mathbb{C}^n)^*$ への作用は $\mathbb{C}^n$ への作用と反傾なものとする. (1)~(3) はそれぞれある Hermite 型作用の制限とみなすことができる. また, (1), (2), (4) はそれぞれ 2 次の K -相対不変多項式をもつ. これらのことは, K -不変式や 2 項係数がみたす漸化式を導くのに重要な役割を果たす. 以下の節で, それぞれの作用について K -不変式と K -不変微分作用素を具体的に表示する.

3 $(K, V) = (\mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C})) \quad (n \geq 2)$

まず, 群 $\mathrm{Sp}(n)$ の実現の方法を与える. 非退化 $2n$ 次交代行列 J_n として反対角なものをとる, 即ち

$$J_n := \begin{pmatrix} O & I'_n \\ -I'_n & O \end{pmatrix}, \quad I'_n := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

これを用いて, $\mathrm{Sp}(n)$ を次のように実現する.

$$\mathrm{Sp}(n) = \{g \in \mathrm{U}(2n); {}^t g J_n g = J_n\} = \mathrm{SU}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}).$$

このとき, K の V への作用を以下で定義する.

$$(u, g_1, g_2) \cdot v := u {}^t g_1^{-1} v g_2^{-1},$$

ただし, $u \in \mathbb{T}$, $g_1 \in \mathrm{Sp}(n)$, $g_2 \in \mathrm{SU}(2)$, $v \in \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C})$: $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n)$ により, K の $V = \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C})$ への作用は $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n) \times \mathrm{SU}(2)$ の V への作用の K への制限とみなせる. 作用 $(\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C}))$ は Hermite 型であり, 基本 highest weight vector は $f_1 = z_{1,1}$, $f_2 = z_{1,1}z_{2,2} - z_{2,1}z_{1,2}$ である. このとき, $\mathcal{P}(V)$ は次のように既約分解される.

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{l_1 \geq l_2 \geq 0} P_{(l_1, l_2)}, \quad (3.2)$$

ただし, $P_{(l_1, l_2)}$ は多項式 $f_{(l_1, l_2)} = f_1^{l_1-l_2} f_2^{l_2}$ を highest weight vector にもつ既約成分である. ここで, 以下のような不変式と不変微分作用素を与える.

$$\begin{aligned} q_1 &:= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2n \\ j=1,2}} |z_{i,j}|^2, \\ q_2 &:= \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2n} |z_{i,1}|^2 & \sum_{i=1}^{2n} z_{i,1} \bar{z}_{i,2} \\ \sum_{i=1}^{2n} z_{i,2} \bar{z}_{i,1} & \sum_{i=1}^{2n} |z_{i,2}|^2 \end{pmatrix}, \\ D_1 &:= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2n \\ j=1,2}} z_{i,j} \partial_{z_{i,j}}, \\ D_2 &:= \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2n} z_{i,1} \partial_{z_{i,1}} + 1 & \sum_{i=1}^{2n} z_{i,1} \partial_{z_{i,2}} \\ \sum_{i=1}^{2n} z_{i,2} \partial_{z_{i,1}} & \sum_{i=1}^{2n} z_{i,2} \partial_{z_{i,2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ただし, D_2 における行列式は行列列式とする. これらを用いると, 分割 $\lambda = (l_1, l_2)$, $\mu = (m_1, m_2)$ に対して, 不変式, 2 項係数, 不変微分作用素は以下のように表される.

$$\begin{aligned} p_\lambda(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\lfloor \frac{l_1+l_2}{2} \rfloor} (-1)^{j-l_2} \binom{l_1-j}{j-l_2} q_1^{l_1+l_2-2j} q_2^j, \\ \binom{\mu}{\lambda} &= \frac{1}{\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\lfloor \frac{l_1+l_2}{2} \rfloor} (-1)^{j-l_2} \binom{l_1-j}{j-l_2} (m_1 + m_2 - 2j)^{\frac{l_1+l_2-2j}{2}} (m_1 + 1)^{\frac{j}{2}} m_2^{\frac{j}{2}}, \\ p_\lambda(z, \partial) &= \frac{1}{\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\lfloor \frac{l_1+l_2}{2} \rfloor} (-1)^{j-l_2} \binom{l_1-j}{j-l_2} \prod_{a=2j}^{l_1+l_2-1} (D_1 - a) \prod_{b=0}^{j-1} (D_2 - bD_1 + b^2 - b). \end{aligned}$$

ただし, $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ は $(1,1)$ で与えられる Fischer 内積から得られる norm であり, $\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2 = (l_1 - l_2)! (l_1 + 1)^{\frac{l_2}{2}} l_2!$ である.

$f_3 = \sum_{j=1}^n (z_{j,1} z_{2n-j+1,2} - z_{2n-j+1,1} z_{j,2})$ は $\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2)$ -不変な 2 次多項式であり, f_1, f_2, f_3 は作用 $(\mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C}))$ の基本 highest weight vector である. $\mathrm{SU}(2n)$ の作用を $\mathrm{Sp}(n)$ に制限することにより, $P_{(l_1, l_2)}$ は次のように既約分解される (例えば [KT] を参照せよ).

$$P_{(l_1, l_2)} = \sum_{l_3=0}^{l_2} P_{(l_1, l_2, l_3)},$$

ただし, $P_{(l_1, l_2, l_3)}$ は次の多項式 $f_{(l_1, l_2, l_3)} = f_1^{l_1-l_2} f_2^{l_2-l_3} f_3^{l_3}$ を highest weight vector に
もつ既約成分である. f_3 が $\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2)$ -不変であることより, 次に与えられる
 q_3, D_3 がそれぞれ K -不変式, K -不変微分作用素であることが分かる.

$$q_3 = |f_3(z)|^2, \quad D_3 = f_3(z) \bar{f}_3(\partial).$$

このとき, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} p_{(l_1, l_2)}(z, \bar{z}) &= \sum_{l_3=0}^{l_2} p_{(l_1, l_2, l_3)}(z, \bar{z}), \\ p_{(l_1+l, l_2+l, l)}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{(l_1+l_2+l+2n-1)l!} p_{(l_1, l_2, 0)}(z, \bar{z}) q_3^l, \\ \binom{(m_1, m_2)}{(l_1, l_2)} &= \sum_{l_3=0}^{l_2} \binom{(m_1, m_2, m_3)}{(l_1, l_2, l_3)}, \\ \binom{(m_1, m_2, m_3)}{(l_1+l, l_2+l, l)} &= \frac{1}{(l_1+l_2+l+2n-1)l!} \binom{(m_1-l, m_2-l, m_3-l)}{(l_1, l_2, 0)} \\ &\quad \cdot (m_1+m_2-m_3+2n-1)^l m_3^l. \end{aligned}$$

以上のことより, K -不変式, 2 項係数, K -不変微分作用素が求まる.

定理 11 $\lambda = (l_1, l_2, l_3), \mu = (m_1, m_2, m_3)$ に対して K -不変式, 2 項係数, K -不変
微分作用素が以下のように表される.

$$\begin{aligned} p_\lambda(z, \bar{z}) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p_{(l_1-l_2, 0)}(z, \bar{z}) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+1)^{j-l_3}}{(l_1+l_2-2l_3+2n-2)^{j-l_3}} q_2^{l_2-j} q_3^j \right), \\ \binom{\mu}{\lambda} &= \frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} \binom{(m_1-l_2, m_2-l_2)}{(l_1-l_2, 0)} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+1)^{j-l_3}}{(l_1+l_2-2l_3+2n-2)^{j-l_3}} \right. \\ &\quad \cdot (m_1-j+1)^{l_2-j} (m_2-j)^{l_2-j} (m_1+m_2-m_3+2n-1)^j m_3^j \Big), \\ p_\lambda(z, \partial) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p_{(l_1-l_2, 0)}^*(z, \partial) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+1)^{j-l_3}}{(l_1+l_2-2l_3+2n-2)^{j-l_3}} \right. \\ &\quad \cdot \prod_{c=j}^{l_2-1} (D_2 - cD_1 + c^2 - c) \prod_{d=0}^{j-1} (D_3 - dD_1 + d^2 - (2n-1)d) \Big), \end{aligned}$$

ただし, $p_{(l_1, l_2)}(z, \bar{z})$, $\begin{pmatrix} (m_1, m_2) \\ (l_1, l_2) \end{pmatrix}$, $p_{(l_1, l_2)}(z, \partial)$ はそれぞれ作用 $(T \times \mathrm{SU}(2n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C}))$ に関する不変式, 2 項係数, 不変微分作用素であり, $p_{(l_1-l_2, 0)}^*(z, \partial)$ は $p_{(l_1-l_2, 0)}(z, \partial)$ において D_1, D_2 をそれぞれ $D_1 - 2l_2, D_2 - l_2 D_1 + l_2^2 - l_2$ に変えたものである. なお,

$$\frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} = \frac{1}{(l_1 - l_3 + 1)^{l_2-l_3} (l_2 - l_3)! (l_1 + l_2 - l_3 + 2n - 1)^{l_3} l_3!}.$$

特に, 基本 highest weight $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ については次のようになる.

$$\begin{aligned} p_1(z, \bar{z}) &= p_{(1, 0, 0)}(z, \bar{z}) = q_1, \\ p_2(z, \bar{z}) &= p_{(1, 1, 0)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} q_2 - \frac{1}{2n} q_3, \\ p_3(z, \bar{z}) &= p_{(1, 1, 1)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2n} q_3, \\ p_1(z, \partial) &= p_{(1, 0, 0)}(z, \partial) = D_1, \\ p_2(z, \partial) &= p_{(1, 1, 0)}(z, \partial) = \frac{1}{2} D_2 - \frac{1}{2n} D_3, \\ p_3(z, \partial) &= p_{(1, 1, 1)}(z, \partial) = \frac{1}{2n} D_3. \end{aligned}$$

これらを $q_1, q_2, q_3, D_1, D_2, D_3$ について解くことにより, 各 $p_\lambda(z, \bar{z}), p_\lambda(z, \partial)$ がそれぞれ $\{p_j(z, \bar{z})\}_{j=1}^3, \{p_j(z, \partial)\}_{j=1}^3$ の多項式で具体的に表されることが分かる.

この作用 (K, V) に対して, Hermite 型作用の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ に当たるものを求める. まず, 簡単のために次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} z_{1,1} & 0 \\ 0 & z_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ z_{2n-1,1} & 0 \\ 0 & z_{2n,2} \end{pmatrix}.$$

これを用いて, 次の集合を考える.

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} ; z_{1,1}, z_{2,2}, z_{2n-1,1}, z_{2n,2} \in \mathbb{R} \right\}, \\ \Omega &:= \{v \in \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C}) ; f_3(v) \neq 0\}, \\ M_0 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} \in \Omega \cap M_1 ; z_{1,1}^2 z_{2n,2}^2 - z_{2n-1,1}^2 z_{2,2}^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} r \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ r \cos \theta_1 \sin \theta_2 & r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix} ; r > 0, \theta_1, \theta_2 \notin \frac{\pi}{2} \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

すると、作用 (K, V) は M_1, M_0 をともに slice にもつ強可視的な作用であり、 $K \cdot M_1 = V, K \cdot M_0 = \Omega$ が成り立つ。 M_1 について、次の群を考える。

$$\begin{aligned} N_K(M_1) &= \{g \in K; g \cdot M_1 = M_1\}, \\ Z_K(M_1) &= \{g \in K; g \cdot v = v \text{ for all } v \in M_1\}, \\ W_K(M_1) &= N_K(M_1)/Z_K(M_1). \end{aligned}$$

このとき、 $W_K(M_1)$ は以下のようにして $(O(2) \times \{\pm 1\}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{I_2, I'_2\}$) と同一視される。

$$\begin{aligned} (g, (-1)^\epsilon, I_2) \cdot \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} &= g \begin{bmatrix} (-1)^\epsilon z_{1,1} & z_{2,2} \\ (-1)^\epsilon z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 0, 1, \\ (I_2, 1, I'_2) \cdot \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_{2,2} & z_{1,1} \\ z_{2n,2} & z_{2n-1,1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

また、 M_0 について次の群を考える。

$$\begin{aligned} N_K(M_0) &= \{g \in K; g \cdot M_0 = M_0\}, \\ \widetilde{W}_K(M_0) &= \text{Ad}_{\mathfrak{t}_c}^*(N_K(M_0))|_{\mathbb{C}\Lambda}. \end{aligned}$$

すると、 $\widetilde{W}_K(M_0)$ は以下のようにして $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ と同一視することができる。
highest weight $\lambda = (l_1, l_2, l_3) \in \Lambda \in \mathfrak{a}^*$ について

$$\begin{aligned} (-1, 1) \cdot (l_1, l_2, l_3) &= (l_1, l_2, l_1 + l_2 - l_3), \\ (1, -1) \cdot (l_1, l_2, l_3) &= (l_2, l_1, l_3). \end{aligned}$$

これは次のように考えると分かりやすい。

$$\begin{aligned} (-1, 1) : (l_1 + l_2, l_1 - l_2, l_1 + l_2 - 2l_3) &\mapsto (l_1 + l_2, l_1 - l_2, -(l_1 + l_2 - 2l_3)), \\ (1, -1) : (l_1 + l_2, l_1 - l_2, l_1 + l_2 - 2l_3) &\mapsto (l_1 + l_2, -(l_1 - l_2), l_1 + l_2 - 2l_3). \end{aligned}$$

- 命題 12** (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)}$,
 (2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題 4 の W と一致する。
 (3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する。

4 $(K, V) = (\mathbb{T} \times \text{Spin}(9), \mathbb{C}^{16})$

この作用は $\text{Spin}(9)$ の spin 表現であるが、これを $\text{Spin}(10)$ の半 spin 表現の制限とみなす。そのために、まず $\text{Spin}(10)$ の半 spin 表現を外積代数上で実現する。 $\wedge(\mathbb{C}^5)$ を 5 次複素 vector 空間 $\mathbb{C}^5$ で生成される外積代数とし、 $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ でその偶数次の元を集めた部分代数とする。すると、 $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ は vector 空間としては 16 次元である。これを $\text{Spin}(10)$ の半 spin 表現、および $\text{Spin}(9)$ の spin 表現の表現空間とする。 $e_1, \dots, e_5$ を $\mathbb{C}^5$ の基底とし、 $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ の基底を次のように表すことにする。

$$\begin{aligned} e_0 &:= 1 \in \wedge^0(\mathbb{C}^5) \simeq \mathbb{C}, \\ e_{jk} &:= e_j \wedge e_k \in \wedge^2(\mathbb{C}^5), \quad 1 \leq j < k \leq 5, \\ e_{abcd} &:= e_a \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d \in \wedge^4(\mathbb{C}^5), \quad 1 \leq a < b < c < d \leq 5. \end{aligned}$$

$\text{Spin}(10)$ の Lie 代数 $\mathfrak{o}(10)$ を $(3,1)$ の I'_n を用いて次のように実現する.

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(10) &= \{X \in \mathfrak{u}(10); {}^tXI'_{10} + I'_{10}X = O\} \\ &= \mathbb{C}\{\tilde{E}_{j,k} = E_{j,k} - E_{11-k,11-j}; 1 \leq j \leq 9, 1 \leq k \leq 10-j\},\end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{u}(10)$ は 10 次歪 Hermite 行列全体のなす Lie 代数で, $E_{j,k}$ は (j,k) -成分のみ 1 で他の成分が 0 である行列単位を表す. すると, $\tilde{E}_{j,k}$ たちは $\mathfrak{o}(10)$ の基底をなす. $\mathfrak{o}(10)$ の $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ への作用を以下のように定める.

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{j,k} \cdot e_I &= e_j \wedge \partial_k e_I - \frac{1}{2} \delta_{j,k} e_I, \quad 1 \leq j, k \leq 5, \\ \tilde{E}_{j,11-k} \cdot e_I &= e_k \wedge e_j \wedge e_I, \quad 1 \leq j < k \leq 5, \\ \tilde{E}_{11-k,j} \cdot e_I &= \partial_j \partial_k e_I, \quad 1 \leq j < k \leq 5,\end{aligned}$$

ここで, I は 0, $\{jk\}$ ($1 \leq j < k \leq 5$), $\{abcd\}$ ($1 \leq a < b < c < d \leq 5$) を表し, ∂_j は e_j に関する偏微分で, 外積代数の元には次のように作用する.

$$\partial_j(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) = \sum_{t=1}^s (-1)^{t-1} \delta_{j,k_t} e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{t-1}} \wedge e_{k_{t+1}} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}.$$

$\partial_j \partial_k = -\partial_k \partial_j$ であることに注意する. $\text{Spin}(10)$ の単連結性により, この $\mathfrak{o}(10)$ の作用から $\text{Spin}(10)$ の作用が決まる. このようにして, $\text{Spin}(10)$ の半 spin 表現が得られる. $V = \wedge_e(\mathbb{C}^5)$ の基底 e_0, e_{jk}, e_{abcd} に関する座標をそれぞれ z_0, z_{jk}, z_{abcd} とする. すると, $\mathcal{P}(V)$ は z_0, z_{jk} ($1 \leq j < k \leq 5$), z_{abcd} ($1 \leq a < b < c < d \leq 5$) を変数とする多項式環になる. また, $z_{kj} = -z_{jk}$ ($1 \leq j < k \leq 5$), $\{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)\} = \{a, b, c, d\}$ ($1 \leq a < b < c < d \leq 5$) なる 5 次の置換 (本質的には 4 次の置換) σ に対して $z_{\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(d)} = (\text{sgn } \sigma) z_{abcd}$ と約束する. ここで, V 上の以下の 2 次式を考える.

$$\begin{aligned}w_1 &= z_0 z_{2345} - z_{23} z_{45} + z_{24} z_{35} - z_{25} z_{34}, \\ w_{-1} &= z_{15} z_{1234} - z_{14} z_{1235} + z_{13} z_{1245} - z_{12} z_{1345}.\end{aligned}$$

さらに, $\sigma_0 = (1, 2, 3, 4, 5)$ を 5 次の巡回置換とし, $1 \leq j \leq 5$ なる j について, w_j, w_{-j} をそれぞれ w_1, w_{-1} に現れる変数の添字に σ_0^{j-1} を作用させたものとする. $P_{(1,1)} = \sum_{j=1}^5 \mathbb{C} w_j + \sum_{j=1}^5 \mathbb{C} w_{-j}$ とすると, $P_{(1,1)}$ は $\mathcal{P}(V)$ の $\text{Spin}(10)$ -既約成分で, $\text{SO}(10)$ の自然な表現と同値である. 作用 $(\mathbb{T} \times \text{Spin}(10), \wedge_e(\mathbb{C}^5))$ は Hermite 型で, 基本 highest weight vector は $f_1 = z_0, f_2 = w_1$ であり, $\mathcal{P}(V)$ は次のように既約分解される.

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{l_1 \geq l_2 \geq 0} P_{(l_1, l_2)},$$

ただし, $P_{(l_1, l_2)}$ は $z_0^{l_1-l_2} w_1^{l_2}$ を highest weight vector にもつ既約成分である. ここで, 不変式と不変微分作用素を 2 つずつ与える.

$$\begin{aligned}q_1 &= |z_0|^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq 5} |z_{jk}|^2 + \sum_{1 \leq a < b < c < d \leq 5} |z_{abcd}|^2, \\ q_2 &= \sum_{j=1}^5 |w_j|^2 + \sum_{j=1}^5 |w_{-j}|^2,\end{aligned}$$

既約分解をもつ (例えば [GW] を参照せよ).

$$P_{(l_1, l_2)} = \sum_{l_3=0}^{l_2} P_{(l_1, l_2, l_3)}.$$

ここで, さらに次の不変式, 不変微分作用素を与える.

$$q_3 = |f_3|^2 = |w_5 + w_{-5}|^2, \quad D_3 = f_3 \partial_{f_3} = (w_5 + w_{-5})(\partial_{w_5} + \partial_{w_{-5}}).$$

定理 13 $\lambda = (l_1, l_2, l_3)$, $\mu = (m_1, m_2, m_3)$ に対して, K -不変式, 2 項係数, K -不変微分作用素は次のように表される.

$$\begin{aligned} p_\lambda(z, \bar{z}) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p_{(l_1-l_2, 0)}(z, \bar{z}) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+3)^{j-l_3}}{(l_1+l_2-2l_3+6)^{j-l_3}} q_2^{l_2-j} q_3^j \right), \\ \binom{\mu}{\lambda} &= \frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} \binom{(m_1-l_2, m_2-l_2)}{(l_1-l_2, 0)} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+3)^{j-l_3}}{(l_1+l_2-2l_3+6)^{j-l_3}} \right. \\ &\quad \cdot (m_1-j+3)^{l_2-j} (m_2-j)^{l_2-j} (m_1+m_2-m_3+7)^j m_3^j \Big), \\ p_\lambda(z, \partial) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p_{(l_1-l_2, 0)}^{*l_2}(z, \partial) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+3)^{j-l_3}}{(l_1+l_2-2l_3+6)^{j-l_3}} \right. \\ &\quad \cdot \prod_{c=j}^{l_2-1} (D_2 - cD_1 + c^2 - 3c) \prod_{d=0}^{j-1} (D_3 - dD_1 + d^2 - 7d) \Big), \end{aligned}$$

ただし, $p_{(l_1, l_2)}(z, \bar{z})$, $\binom{(m_1, m_2)}{(l_1, l_2)}$, $p_{(l_1, l_2)}(z, \partial)$ はそれぞれ作用 $(\mathbb{T} \times \text{Spin}(10), \mathbb{C}^{16})$ に関する不変式, 2 項係数, 不変微分作用素であり, $p_{(l_1-l_2, 0)}^{*l_2}(z, \partial)$ は $p_{(l_1-l_2, 0)}(z, \partial)$ において D_1, D_2 をそれぞれ $D_1 - 2l_2$, $D_2 - l_2D_1 + l_2^2 - 3l_2$ に変えたものである. なお,

$$\frac{\|f_{(l_1-l_2, 0, 0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1, l_2, l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} = \frac{1}{(l_1-l_3+3)^{l_2-l_3} (l_2-l_3)! (l_1+l_2-l_3+7)^{l_3} l_3!}.$$

この作用 (K, V) についても Hermite 型の $\mathfrak{a}$ に対応する部分集合を求めてみる. 簡単のために次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_{2345} \\ z_{15} & z_{1234} \end{bmatrix} := z_0 e_0 + z_{15} e_{15} + z_{1234} e_{1234} + z_{2345} e_{2345}.$$

これを用いて、以下の集合を考える。

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_0 & z_{2345} \\ z_{15} & z_{1234} \end{bmatrix} \in \Lambda_e(\mathbb{C}^5); z_0, z_{15}, z_{1234}, z_{2345} \in \mathbb{R} \right\}, \\ \Omega &:= \{v \in \Lambda_e(\mathbb{C}^5); f_3(v) \neq 0\}, \\ M_0 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_0 & z_{2345} \\ z_{15} & z_{1234} \end{bmatrix} \in \Omega \cap M_1; z_0^2 z_{1234}^2 - z_{15}^2 z_{2345}^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} r \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ r \cos \theta_1 \sin \theta_2 & r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix}; r > 0, \theta_1, \theta_2 \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

すると、作用 (K, V) は M_1 および M_0 を slice にもつ強可視的な作用であり、 $K \cdot M_1 = V$, $K \cdot M_0 = \Omega$ を満たす。前節と同様に $N_K(M_1)$, $Z_K(M_1)$, $W_K(M_1)$, $N_K(M_0)$, $\widetilde{W}_K(M_0)$ を求めると、 $W_K(M_1) \simeq (O(2) \times \{\pm 1\}) \rtimes \{I_2, I'_2\}$, $\widetilde{W}_K(M_0) \simeq \{I_2, I'_2\} \times \{I_2, I'_2\}$ となることが分かる。

- 命題 14** (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)}$,
 (2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題 4 の W と一致する。
 (3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する。

注意 15 この節の結果は、基本 highest weight vector の次元、相対不変式の存在、不変式、2 項係数、不変微分作用素の表示、強可視性を表す slice の形など前節の結果と非常に類似している。このことは、[Kn2] において 2 つの作用が同じ Case VIa に分類されていることに対応する。

5 $(K, V) = (\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n) \ (n \geq 2)$

この節と次の節で扱う作用は可約であるが indecomposable なものである。まず、 $\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n)$ の $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ への作用を次のように実現する。

$$(u_1, u_2, g) \cdot (v_1, v_2) := (u_1^t g^{-1} v_1, u_2^t g^{-1} v_2),$$

ただし、 $u_1, u_2 \in \mathbb{T}$, $g \in \mathrm{SU}(n)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$ 。このとき、基本 highest weight vector は以下の 3 つである。

$$f_{11} = z_{11}, \quad f_{12} = z_{12}, \quad f_2 = z_{1,1} z_{2,2} - z_{2,1} z_{1,2}. \quad (5.1)$$

$f_{(l_{11}, l_{12}, l_2)} = f_{11}^{l_{11}-l_2} f_{12}^{l_{12}-l_2} f_2^{l_2}$ を highest weight vector にもつ $\mathcal{P}(V)$ の既約成分を $P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)}$ と表すことにする。 K の $\mathcal{P}(V)$ への作用には 2 つの見方がある。 $\mathbb{T}^2$ の作用を局所的に $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2)$ の作用の制限とみなすことにより、この作用は $(\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(n, 2, \mathbb{C}))$ の制限と考えることができる。このことから、次の既約分解を得る。

$$P_{(l_1, l_2)} = \sum_{l_{11}+l_{12}=l_1+l_2} P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)},$$

ただし、 $P_{(l_1, l_2)}$ は (3,2) で現れた $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(n, 2, \mathbb{C}))$ の $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2)$ -加群としての既約成分のこととする。また、 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ の $\mathrm{SU}(n)$ -加群としての既約分解を

$\mathcal{P}(\mathbb{C}^n) = \sum_i P_i$ とすると, $SU(n)$ が $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ に対角に作用していると考えることにより, 次の既約分解が得られる (Pieri formula).

$$P_{l_{11}} \otimes P_{l_{12}} = \sum_{l_2=0}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)}.$$

これらを利用することにより, 不変式, 2 項係数, 不変微分作用素が計算できる. いま, 次のような不変式と不変微分作用素を与える.

$$\begin{aligned} q_{11} &= \sum_{j=1}^n |z_{j,1}|^2, & q_{12} &= \sum_{j=1}^n |z_{j,2}|^2, \\ q_2 &= \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n |z_{j,1}|^2 & \sum_{j=1}^n z_{j,1} \bar{z}_{j,2} \\ \sum_{j=1}^n z_{j,2} \bar{z}_{j,1} & \sum_{j=1}^n |z_{j,2}|^2 \end{pmatrix}, \\ D_{11} &= \sum_{j=1}^n z_{j,1} \partial_{z_{j,1}}, & D_{12} &= \sum_{j=1}^n z_{j,2} \partial_{z_{j,2}}, \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n z_{j,1} \partial_{z_{j,1}} + 1 & \sum_{j=1}^n z_{j,1} \partial_{z_{j,2}} \\ \sum_{j=1}^n z_{j,2} \partial_{z_{j,1}} & \sum_{j=1}^n z_{j,2} \partial_{z_{j,2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定理 16 $\lambda = (l_{11}, l_{12}, l_2)$, $\mu = (m_{11}, m_{12}, m_2)$ に対して, K -不変式, 2 項係数, K -不変微分作用素が以下のように表される.

$$\begin{aligned} p_\lambda(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\ &\quad \cdot q_{11}^{l_{11}-j} q_{12}^{l_{12}-j} q_2^j, \\ \binom{\mu}{\lambda} &= \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\ &\quad \cdot (m_{11}-j)^{\overline{l_{11}-j}} (m_{12}-j)^{\overline{l_{12}-j}} (m_{11}+m_{12}-m_2+1)^{\overline{j}} m_2^{\overline{j}}, \\ p_\lambda(z, \partial) &= \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\ &\quad \cdot \prod_{a=j}^{l_{11}-1} (D_{11}-a) \prod_{b=j}^{l_{12}-1} (D_{12}-b) \prod_{c=0}^{j-1} (D_2 - c(D_{11}+D_{12}) + c^2 - c), \end{aligned}$$

ただし, $f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)} = f_{11}^{l_{11}+l_{12}-2l_2} f_2^{l_2}$ である.

ここで, 各式の分母に現れる因子 $\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ が $\|f_{(l_{11}, l_{12}, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ でないことに注意する. $\lambda_{11} = (1, 0, 0)$, $\lambda_{12} = (0, 1, 0)$, $\lambda_2 = (1, 1, 1)$ とおくと, λ_{11} , λ_{12} , λ_2 に関する不変式, 不変微分作用素を表す式を q_{11} , q_{12} , q_2 , D_{11} , D_{12} , D_2 について解くことにより, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対する不変式, 不変微分作用素がそれぞれ基本 highest weight に対応する不変式, 不変微分作用素の多項式で具体的に表されることが分かる.

この作用 (K, V) についても, Hermite 型作用のときの極大可換部分空間に対応するものを考える. そのために, 次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} := \left(\begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{2,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{1,2} \\ z_{2,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (5,2)$$

これを用いて, 以下の集合を考える.

$$M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n; z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2} \in \mathbb{R} \right\}, \quad (5,3)$$

$$\Omega := \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n; f_2(v) \neq 0\}, \quad (5,4)$$

$$\begin{aligned} M_0 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} \in \Omega \cap M_1; z_{1,1}^2 z_{2,2}^2 - z_{2,1}^2 z_{1,2}^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta & \mp r_2 \cos \theta \\ r_1 \sin \theta & \pm r_2 \sin \theta \end{bmatrix}; r_1, r_2 > 0, \theta \notin \frac{\pi}{2} \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned} \quad (5,5)$$

すると, 作用 (K, V) は M_1, M_0 をともに slice にもつ強可視的な作用であり, $K \cdot M_1 = V, K \cdot M_0 = \Omega$ をみたす. 3 節と同様に $N_K(M_1), Z_K(M_1), W_K(M_1)$ を求めると, $W_K(M_1)$ は次のようにして $O(2) \times \{\pm 1\}$ と同一視される.

$$(g, (-1)^\epsilon) \cdot \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} (-1)^\epsilon z_{1,1} & z_{1,2} \\ (-1)^\epsilon z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix}.$$

また, $N_K(M_0), \widetilde{W}_K(M_0)$ も同様に求めると, $\widetilde{W}_K(M_0)$ は次のようにして $\{\pm 1\}$ と同一視できる.

$$(-1) \cdot (l_{11}, l_{12}, l_{11} + l_{12} - 2l_2) = (l_{11}, l_{12}, -(l_{11} + l_{12} - 2l_2)).$$

命題 17 (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)},$

(2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題 4 の W と一致する.

(3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する.

6 $(K, V) = (\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*) \quad (n \geq 3)$

この節では, 前節と作用する群も vector 空間も同じだが作用の仕方が異なるものについて考察する. まず, 定義を確認する. $(\mathbb{C}^n)^*$ は複素 vector 空間としては $\mathbb{C}^n$ と同じものだが, $\mathrm{SU}(n)$ の作用が $\mathbb{C}^n$ のものとは複素共役なものとする. 作用 (K, V) を具体的に表すと次のようになる.

$$(u_1, u_2, g) \cdot (v_1, v_2) := (u_1 {}^t g^{-1} v_1, u_2 g v_2),$$

ただし, $u_1, u_2 \in \mathbb{T}$, $g \in \mathrm{SU}(n)$, $v_1 \in \mathbb{C}^n$, $v_2 \in (\mathbb{C}^n)^*$. この作用の基本 highest weight vector は以下のものである.

$$f_{11} = z_{1,1}, \quad f_{12} = z_{n,2}, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n z_{j,1} z_{j,2}. \quad (6,1)$$

f_2 は $\mathrm{SU}(n)$ -不変であることに注意する. この作用では前節の $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(n, 2, \mathbb{C}))$ に相当するものはないが, $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*) \simeq \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^*)$ と考えて既約分解を得ることができる. 具体的には, $\mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^*)$ の $\mathrm{SU}(n)$ -加群としての既約分解を $\mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^*) = \sum_{l=0}^n P_l^*$ とすると, 次のような既約分解が得られる.

$$P_{l_1} \otimes P_{l_2}^* = \sum_{l_2=0}^{\min\{l_1, l_2\}} P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)},$$

ここで, $P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)}$ は $f_{(l_{11}, l_{12}, l_2)} = f_{11}^{l_{11}-l_2} f_{12}^{l_{12}-l_2} f_2^{l_2}$ を highest weight にもつ K -既約成分である. ここで, 以下のような不変式, 不変微分作用素を与える.

$$\begin{aligned} q_{11} &= \sum_{j=1}^n |z_{j,1}|^2, & q_{12} &= \sum_{j=1}^n |z_{j,2}|^2, \\ q_2 &= |f_2|^2 = \left| \sum_{j=1}^n z_{j,1} z_{j,2} \right|^2, \\ D_{11} &= \sum_{j=1}^n z_{j,1} \partial_{z_{j,1}}, & D_{12} &= \sum_{j=1}^n z_{j,2} \partial_{z_{j,2}}, \\ D_2 &= f_2(z) \bar{f}_2(\partial) = \left(\sum_{j=1}^n z_{j,1} z_{j,2} \right) \left(\sum_{j=1}^n \partial_{z_{j,1}} \partial_{z_{j,2}} \right). \end{aligned}$$

定理 18 $\lambda = (l_{11}, l_{12}, l_2)$, $\mu = (m_{11}, m_{12}, m_2)$ に対して, K -不変式, 2 項係数, K -不変微分作用素は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} p_\lambda(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\ &\quad \cdot \frac{(l_{11}+l_{12}-2l_2)^{j-l_2}}{(l_{11}+l_{12}-2l_2+n-2)^{j-l_2}} q_{11}^{l_{11}-j} q_{12}^{l_{12}-j} q_2^j, \\ \binom{\mu}{\lambda} &= \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\ &\quad \cdot \frac{(l_{11}+l_{12}-2l_2)^{j-l_2}}{(l_{11}+l_{12}-2l_2+n-2)^{j-l_2}} (m_{11}-j)^{l_{11}-j} (m_{12}-j)^{l_{12}-j} \\ &\quad \cdot (m_{11}+m_{12}-m_2+n-1)^j m_2^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_\lambda(z, \partial) = & \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\
& \cdot \frac{(l_{11}+l_{12}-2l_2)^{j-l_2}}{(l_{11}+l_{12}-2l_2+n-2)^{j-l_2}} \prod_{a=j}^{l_{11}-1} (D_{11}-a) \prod_{b=j}^{l_{12}-1} (D_{12}-b) \\
& \cdot \prod_{c=0}^{j-1} (D_2 - c(D_{11} + D_{12}) + c^2 - (n-1)c),
\end{aligned}$$

ただし, $f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)} = f_{11}^{l_{11}+l_{12}-2l_2} f_2^{l_2}$ である.

この場合でも, 各式の分母の因子 $\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ が $\|f_{(l_{11}, l_{12}, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ でないことに注意する.

注意 19 前節とこの節の作用に関する 2 項係数は [Kn3] において, 命題 4 に基づき最高次項を決定し零点を示すことで与えられている. また, このことにより, 不変式も与えられていることになるが, 本稿のような 2 項係数の明示的な与えられ方はなされていない.

この作用についても, Hermite 型の作用の極大可換部分空間に当たるものを考える. そのために, 次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2} \end{bmatrix} := \left(\begin{pmatrix} z_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{1,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{n,1} \end{pmatrix} \right). \quad (6,2)$$

これを用いて, 以下のような集合を考える.

$$M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*; z_{1,1}, z_{1,2}, z_{n,1}, z_{n,2} \in \mathbb{R} \right\}, \quad (6,3)$$

$$\Omega := \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*; f_2(v) \neq 0\}, \quad (6,4)$$

$$\begin{aligned}
M_0 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2} \end{bmatrix} \in M_1 \cap \Omega; z_{1,1}^2 z_{1,2}^2 - z_{n,1}^2 z_{n,2}^2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta & \pm r_2 \sin \theta \\ r_1 \sin \theta & \pm r_2 \cos \theta \end{bmatrix}; r_1, r_2 > 0, \theta \notin \frac{\pi}{2} \mathbb{Z} \right\}. \quad (6,5)
\end{aligned}$$

この場合も, 作用 (K, V) は M_1, M_0 をともに slice にもつ強可視的な作用であり, $K \cdot M_1 = V$, $K \cdot M_0 = \Omega$ が成り立つ. この M_1 に対して, $N_K(M_1)$, $Z_K(M_1)$, $N_K(M_1)$ を第 3 節と同様に定義すると, $N_K(M_1)$ は次の意味で $O(2) \times \{\pm 1\}$ と同一視される.

$$(g, (-1)^\epsilon) \cdot \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} (-1)^\epsilon z_{1,1} & z_{1,2} \\ (-1)^\epsilon z_{n,1} & z_{n,2} \end{bmatrix}.$$

また, $N_K(M_0)$, $\widetilde{W}_K(M_0)$ を第 3 節と同様に定義すると, $\widetilde{W}_K(M_0)$ は次のようにして $\{\pm 1\}$ と同一視される.

$$(-1) \cdot (l_{11}, l_{12}, l_{11} + l_{12} - 2l_2) = (l_{11}, l_{12}, -(l_{11} + l_{12} - 2l_2)).$$

- 命題 20** (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)}$,
 (2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題 4 と一致する.
 (3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する.

注意 21 $n = 2$ のとき, この節の結果は前節の結果と $(5,1) \sim (5,5)$, $(6,1) \sim (6,5)$ を除いて一致している. これは, 作用 $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2), \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)$ と $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2), \mathbb{C}^2 \oplus (\mathbb{C}^2)^*)$ が同値となるからである.

References

- [BR1] C. Benson and G. Ratcliff, A classification of multiplicity-free actions, *J. Algebra* 181, (1996), 152–186.
- [BR2] C. Benson and G. Ratcliff, On multiplicity free actions, *Representations of Real and p-adic Groups*, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci., Natl. Univ. Singapore, 2, Singapore Univ. Press, Singapore, 2004.
- [FK1] J. Faraut and A. Koranyi, Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains, *J. Funct. Anal.* 88, (1990), 64–89.
- [FK2] J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Sci. Publ., Oxford, 1994.
- [GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [H] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press. San Diego, 1978.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, *Math. Ann.*, 290, (1991), 565–619.
- [J] K. Johnson, On a ring of invariant polynomials on a Hermitian symmetric space, *J. Algebra* 67, (1980), 72–81.
- [Ka] V. G. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* 64, (1980), 190–213.
- [Kn1] F. Knop, Some remarks on multiplicity free spaces, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, 301–317, Nato Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 514, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1998.

- [Kn2] F. Knop, Construction of commuting difference operators for multiplicity free spaces, *Sel. Math.*, N.S. 6, (2000), 443–470.
- [Kn3] F. Knop, Semisymmetric polynomials and the invariant theory of matrix vector pairs, *Representation Theory* 5 (2001), 224–266.
- [Ko1] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta Appl. Math.* 81 (2004), 129–146.
- [Ko2] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. RIMS* 41, (2005), 497–549.
- [Ko3] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, to appear in *Progr. Math.*, Birkhäuser, Preprint RIMS 1549, June 2006.
- [KT] K. Koike and I. Terada, Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n , C_n , D_n , *J. Algebra* 107, (1987), 466–511.
- [L] A. Leahy, A Classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* 8 (1998), 367–391.
- [OO] A. Okounkov and G. Olshanski, Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications, *Math. Res. Letters* 4, (1997), 69–78.
- [Sas] 笹木 集夢, 「既約な multiplicity-free 空間における可視的作用」, 本講究録に掲載予定.
- [Sat] I. Satake, *Algebraic Structures of Symmetric Domains*, Iwanami Shoten Publ. and Princeton Univ. Press, Tokyo, 1980.
- [Sch] W. Schmid, Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermiteschen symmetrischen Räumen, *Invent. Math.* 9, (1969), 61–80.
- [Se] J. Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, *Publ. RIMS* 12 suppl., (1977), 455–464.
- [U] H. Upmeyer, Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces, *Amer. J. Math.* 108 (1986), 1–25.