

Leech lattice の自己同型群とテータ関数

名大 小池 正夫

(Masao Koike)

1 24 次元 Euclid 空間内の Leech lattice L は正定値,

unimodular な 2 次形式を持つ. 長さ 2 の vector が n 個あることで特徴づけられる. ここでは, その自己同型群 $\cdot O$ の各元によって固定される元のなる部分 lattice

$$L^\pi = \{ x \in L ; \pi \cdot x = x \}$$

を考える. 各 π に対して, L^π は又, 正定値な 2 次形式をもつそれに付随するテータ関数

$$\mathcal{J}_\pi(z) = \sum_{x \in L^\pi} e^{\pi i z \langle x, x \rangle} \quad z \in H = \{ z \in \mathbb{C} ; \text{Im} z > 0 \}$$

は保型形式となる.

L 自身のテータ関数は容易に定められるが, 全ての π に対して $\mathcal{J}_\pi(z)$ を定めることは容易なことではない. ここでは Conway-Norton の予想 "Moonshine" との関係で生じた idea を用いて, この問題に取り組む.

2 Moonshine について説明する.

F_1 は Monster と呼ばれる sporadic な単純群の中で位数最大のものとする. F_1 が Moonshine を持つとは, F_1 の各元 g に対して上半平面の関数 $T_g(z)$ (Thompson series と呼ばれる) が対応せられて, 次の性質をみたす.

(0) $T_g(z)$ は Fourier 展開 $T_g(z) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(g) q^n$, $q = e^{2\pi iz}$ であり, H 上の正則関数である.

(1) 単位元 e の Thompson series $T_e(z)$ は 楕円 modular invariant である. i.e. $T_e(z) = J(z) - 744 = q^{-1} + 196884q + \dots$

(2) 各 $n \geq 1$ に対して, $H_n(g)$ は g の関数と見た時, F_1 の指標になる.

(3) 各 g に対して, genus 0 のある Fuchs 群 Γ_g が存在して $T_g(z)$ は Γ_g の保型関数体 (有理関数体と同型) の生成元となる. Γ_g について更に性質が付け加えられるが省く.

Moonshine の研究は遅々として進んでいる. 基本的なことは,

(i) (0) ~ (3) をみたす $T_g(z)$ は 1 意的に定まるか?

(ii) どんな群が Moonshine を持つか?

すら, わからない. $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_g)$ については [6] 参照

Conway-Norton [2] は F_1 の各元 g に対して (0) (1) (3) を

みたが $T_g(z)$ を具体的に (Γ_g , 小 η の Fourier 係数, η -積表示) の関数として与えてゐるが, (2) の性質はまだ証明できていない。

3. $\eta_\pi(z)$ の決定と Moonshine との関係について

そのために Frame shape について説明する。 $\rho \in \cdot 0$ の L の作用から得られる 24 次元表現とする。すると

$\det(X_{124} - \rho(\pi))$ は 有理整数係数の多項式で, 根は全て 1 の η -根である。故に 次のようにかける。(1 意的に)

$$\det(X_{124} - \rho(\pi)) = \prod_{1 \leq t \in \mathbb{Z}} (X^t - 1)^{r_t} \quad r_t \in \mathbb{Z}$$

一般に symbol $\prod_{1 \leq t \in \mathbb{Z}} t^{r_t} = 1^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdots$ で $\forall t$ に $r_t = 0$

とすると generalized permutation とする。 π の (ρ に因る) Frame shape とは $\rho(\pi)$ の characteristic polynomial の分解を用いて generalized permutation $\prod t^{r_t}$ のことである。

Frame shape は 置換の輪積表示の拡張である。

$\cdot 0$ の元 ρ の Frame shape は 近藤 [8] を参照。

generalized permutation $\pi = \prod t^{r_t}$ に対応する η -積

$$\eta_\pi(z) = \prod \eta(tz)^{r_t}$$

を定義する。ここで $\eta(z)$ は Dedekind の η -関数と呼ばれる

"weight $\frac{1}{2}$ " の保型形式 $\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ である。

Conway-Norton [2] に書かれています. Leech lattice と Moonshine との関係についてこの予想は

$$(*) \quad \begin{cases} \cdot 0 \text{ の各元 } \pi \text{ に対して, } F_1 \text{ の元 } g \text{ が対応して} \\ \vartheta_{\pi}(z)/\eta_{\pi}(z) = T_g(z) + \text{const} \\ \text{とかけられるように.} \end{cases}$$

π と g の対応の意味づけから, Kac, Lepowsky 等による L を用いて F_1 -module の構成があるが, 予想の証明には, ない, といふ。

4 我々の $\vartheta_{\pi}(z)$ を決める idea というのは $(*)$ の中で $\eta_{\pi}(z), T_g(z)$ はともに具体的に書けていたものの中にあるのだから, $(*)$ が成りたつような, $\vartheta_{\pi}(z)$ (二次形式の theta 関数という保形形式の中で特殊なもの) の存在を許すような $T_g(z)$ と $\eta_{\pi}(z)$ に対して見つけられるか?

5 定理をかく前に π を次のように分類しておくとも便利だ.

π に対して $\pi = \prod t_i^{r_i}$ と Frame shape とかく. この時

$$\text{wt } \pi = \frac{1}{2} \sum r_i,$$

$$\deg \pi = \sum t_i r_i,$$

$$\text{ord } \pi = \text{l.c.m. of } t_i \text{ s.t. } r_i \neq 0.$$

と定義する。

- (1) π が C 型 $\xLeftrightarrow{\text{def}} \forall r_t \geq 0$
- (2) π が E 型 $\xLeftrightarrow{\text{def}} \text{wt } \pi > 0 \text{ 且 } \exists t \text{ s.t. } r_t < 0$
- (3) π が F 型 $\xLeftrightarrow{\text{def}} \text{wt } \pi = 0$

$\cdot 0$ の Frame shape は上の 3 種類に完全に分類される. π が F 型の時 $L^\pi = \{0\}$ であ, $\tau, \nu_\pi(z) = 1$ となる. したがって, $\nu_\pi(z)$ の決定と... 立場から F 型の元は無視してよい. この場合は $\eta_\pi(z)$ 自身が保型関数として, 直接 $J_\eta(z)$ と関係してくる. それについて 近藤 [8] を参照.

以下, π は C 型, または E 型とする.

この時は, $\nu_\pi(z), \eta_\pi(z)$ は 同じ正の weight を持, τ 保型形式で, その商が保型関数となる, とする.

6. 重要な Atkin-Lehner involution を定義する.

N を $\text{ord } \pi$ の倍数として, $Q \in N$ の Hall divisor, $\gcd(Q, N) = 1$, とする. この時 generalized permutation $\pi = \prod t^{r_t}$

への Atkin-Lehner involution $W_{Q,N}$ の作用を

$$\pi \circ W_{Q,N} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{t \\ s=(t,Q)}} \left(\frac{tQ}{s^2} \right)^{r_t}$$

$\pi \in \cdot 0$ の Frame shape に対して N と互素な Q なら $W_{Q,N}$ (ここでは $\text{ord } \pi$) 全ての Hall divisor Q に対して $\pi \circ W_{Q,N}$ を考へ.

そのうち相異なるもの達の集合を $S(\pi)$ とかく.

命題 π が C 型 $\Rightarrow S(\pi) = \{\pi\}$

π が E 型 $\Rightarrow S(\pi)$ の元 π' は $\deg \pi' = 0$ 又は
 $\cdot 0$ の他の元, Frameshape とする.

これは $\cdot 0$ の Frameshape の表を眺めることで証明ができるが, intrinsic な説明がほしい... 別な... 方をすれば, このよりの性質を Frameshape から持つことに, Moonshine が存在し加深く関与していると思われる.

7 Atkin-Lehner involution を使, E 型を細かく分類する.

π が self-conjugate な E 型 $\xLeftrightarrow[\text{at}] S(\pi) \ni \pi' \quad \pi \neq \pi'$ 又は
 $\deg \pi' = 0$ とする.

そうでない時, non-self-conjugate とする.

更に self-conjugate な E 型の元 π に対して

π が E_1 型 $\xLeftrightarrow[\text{at}] S(\pi) = \{\pi\}$

π が E_2 型 $\xLeftrightarrow[\text{at}] S(\pi) \neq \{\pi\}$

と分ける.

E_1 型と C 型は同じ形の定理をみえる.

定理 1 π が C 型 又は E_1 型 とする. この時, 次の性質をみたす. 係数形式 $\theta_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pi) z^n$ が存在する.

(1.1) $\theta_\pi(z)$ は 2 次形式の 升々関数 である.

(1.2) $a_1(\pi) = 0$

(1.3) F_1 の ある 元 γ が存在して,

$$\theta_\pi(z)/\eta_\pi(z) = T_\gamma(z) + \text{const}$$

が成り立つ。

かなりの π について $\theta_\pi(z)$ は 1 意的に定まるが, そうでないものもある。

このように $\theta_\pi(z)$ の存在とその具体的な表示は 近藤・田坂 [9] による $\pi \in M_{24}$ の階の $\theta_\pi(z)$ の決定の参考にたてた。

8 残った場合は 定理 1 のように (1.1) ~ (1.3) の条件で

$\theta_\pi(z)$ が は, まりて定まるのは少し違, 几様相を呈する。

こゝと, 9. とでそれを示す. 8 は簡単のため, 次の

<仮定> π は E_2 型で $S(\pi) = \{\pi, \pi'\}$, $\deg \pi' = 0$ とする。

と設ける。

$t_{g,c}(z) = T_g(z) + c$, $c \text{ const}$ とかく. 更に c が文脈から

求まる時は 単に $t_g(z)$ とかく.

定理 2 π 上の γ にした時、次の性質をみたす。

係型形式 $\theta_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pi) z^n$ が一意的に存在する。

(2.1) $\theta_\pi(z)$ は 2 次形式の τ - ρ 関数である。

(2.2) $a_1(\pi) = 0$

(2.3) F_1 のある元 g が存在して

$$\theta_\pi(z)/\eta_\pi(z) = t_g(z)$$

(2.4) F_1 のある元 g' が存在して

$$\theta_\pi(z)/\eta_{\pi'}(z) = 1 + \beta_\pi t_{g'}^{-1} \quad \beta_\pi: \text{const.}$$

(2.5) g の位数を m とし、 $m+2$ [2] の中での F_1 の元 g

表示とする。この時 ある定数 α_π は

$$\theta_\pi(z)/\eta_\pi(z) + \alpha_\pi \theta_{\pi'}(z)/\eta_{\pi'}(z) = t_{m+}(z).$$

ここでは (*) 以外にも、Thompson series とのつながりの証明があることに注意した。

9. π が non-self-conjugate E 型の場合を説明する。

今まで見たように π が C 型または self-conjugate な E 型の場合は Conway-Norton の予想 (*) が正しいことが想像できただけ。上の場合 (*) の残りのように $\theta_\pi(z)$ は存在しないことがわかる。しかし、この場合でも、定理 2 の (2.4), (2.5) によって別なつながりが Thompson series とあることが期待される。

るが、仲と容易に見つからなかつた。近藤[10]によつて $J_\pi(z)$ の計算例を詳しく調べることで、最終的に次の定理を得ることができた。

π が non-self-conjugate な E 型の元とする。これは 15 個の共役類からなり、3 つずつが同じ $S(\pi)$ に属している。

すなわち $S(\pi) = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ で $\deg \pi_4 = 0$,

π_1, π_2, π_3 は $\cdot O$ の元の Frame shape と呼ばれる。

定理 3 各 π_i に対して保型形式 $\theta_{\pi_i}(z)$ ($i=1, 2, 3$)

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_i}(n) z^n$ が存在して次の性質を満たす。

(3.1) $\theta_{\pi_i}(z)$ は 2 次形式の τ - θ 関数である

(3.2) $a_1(\pi_i) = 0$

(3.3) F_1 の元 g, g' が存在して

$$\theta_{\pi_i}(z)/\gamma_{\pi_i}(z) = t_g(z) + c_{\pi_i} \cdot t_{g', \pi_i}^{-1}(z)$$

(c_{π_i} はある定数) とかける。

(3.4) F_1 のある元 g_i が存在して

$$\theta_{\pi_i}(z)/\gamma_{\pi_i}(z) = t_g(z) + t_{g'}(z) - t_{g_i}(z)$$

とかける。

10 これまでの話で 4 で説明した方針に従って、 $\vartheta_\pi(z)$ となるべき保型形式として $\theta_\pi(z)$ をある場合は / 意的に、そうでない場合も他の事実と組み合わせで、唯一つの $\theta_\pi(z)$ を見つけることができる。そして、Conway-Norton の予想 (*) は次のようにかきかえられる。

予想 $\vartheta_\pi(z) = \theta_\pi(z)$

定理 1, 2, 3 が $\vartheta_\pi(z)$ がみたしてゐることを期待される。

11 Conway-Norton の予想 (*) と足がかりに、求めた $\theta_\pi(z)$ を全体として改めて眺めて見ると又新 (... 性質が) かびあがり、てくる。

Atkin-Lehner involution $W_{0,N}$ は次の 3 つの対象に作用してゐる。

- (1) generalized permutation
- (2) 保型形式 (保型関数)
- (3) 2次形式の テータ関数

(1) については 6 で説明した。(2) は Atkin-Lehner involution が最初定義されたところで Atkin-Lehner [1] を参照。実は (1) の定義は 次の命題から来ている。

命題

$$\eta_{\pi}(z) | W_{Q,N} = (\text{const}) \times \eta_{\pi \circ W_{Q,N}}(z)$$

(3) により、 z は 2 次形式の $\bar{T}$ - θ 関数は保型形式だから、

$W_{Q,N}$ が作用できる。この時 比岡 [3] により、

$$\theta(z; M) | W_{Q,N} = (\text{const}) \times \theta(z; M')$$

すなわち M, M' は 2 次形式の lattice で $\theta(z; M)$ は z に対して

付随する $\bar{T}$ - θ 関数にある。この時 M' は M と $W_{Q,N}$ の

定数因子から

$$\theta(z; M') \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(z; M, Q, N) \quad \text{と置く}$$

定理 4 π と $\pi' \in \cdot 0$ の Frame shape とする ($\pi = \pi' \circ \tau$ など)

Atkin-Lehner involution $W_{Q,N}$ で $\pi \circ W_{Q,N} = \pi'$ とする

ならば

$$\Theta(z; L^{\pi}, Q, N) = \theta(z; L^{\pi'}) (= \theta_{\pi}(z) \text{ とする})$$

が成り立つ。

定理 4 は **10** の予想で $\eta_{\pi}(z) = \theta(z; L^{\pi})$ が定まり、 τ として

のことであるが、Atkin-Lehner involution が compatible に作用

していることが期待される。これも intrinsic に証明がせられる。

12 $\cdot 0$ の Frame shape 達と $S(\pi)$ の元達は他にもいろいろと

興味深い性質を持つ、というのですが、詳しくは [7] を参照。
 又 $\theta_{\pi}(z)$ が具体的にどうなるかも、ここではひとつもかきません。 [5], [6], [7], [9], [10] を参照してください。

References

- [1] A.O.L. Atkin and J. Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann., 185 (1970)
- [2] J.H. Conway and S.P. Norton, Monstrous moonshine, Bull. London Math., 11 (1979)
- [3] Y. Kitaoka, A remark on the transformation formula of theta functions associated with positive definite quadratic forms, J. of Number Th., 12 (1980)
- [4] M. Koike, On McKay's conjecture, Nagoya J. Math., 95 (1984)
- [5] M. Koike, Mathieu group M_{24} and modular forms, Nagoya J. Math., 99 (1985)
- [6] M. Koike, Moonshines of $PSL_2(F_q)$ and the automorphism group of Leech lattice, to appear in Japanese J.
- [7] M. Koike, Modular forms and the automorphism group of Leech lattice
- [8] T. Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985)
- [9] T. Kondo and T. Tasaka, The theta functions of sublattices of Leech lattice, Nagoya J. Math., 101 (1986)
- [10] T. Kondo, a private communications dated at Nov. 8, 1984.