

多値論理における valid sequent について

高 野 道 夫

小論では、それぞれ数個ずつの真なる値と偽なる値をもつ多値論理——正確には有限多値命題論理——を扱う。

多値論理は (i) 真理値の集合である空でない集合 M , (ii) 真なる値の集合である集合 M の部分集合 N (差集合 $M-N$ が偽なる値の集合), それに (iii) その論理で認められた各論理記号 F —— k 変数とする —— に対し, それの表わす真理関数である $M^k \rightarrow M$ なる写像 Φ_F , により定まる. そして, 集合 M が有限集合で m 個の元をもつとき, この多値論理を “ m 値論理” という.

上述のような多値論理が 1 つ与えられたとしよう. すると各 formula は, それに含まれるすべての命題変数に対し真理値である集合 M の元をそれぞれ対応させると, 論理記号は (iii) で対応させられた写像として計算することにより, その formula の真理値である集合 M の元が求まる. このとき, 求ま

た元が部分集合 N の元であるか否かに応じ、その formula は命題変数 λ の先ほどの対応で“真である”あるいは“偽である”というのである。そして sequent

$$A_1, \dots, A_n \longrightarrow B_1, \dots, B_m$$

は、ここに含まれるすべての命題変数に真理値である集合 M の元とどのように対応させようと、その対応で、formula $A_1, \dots, A_n$ がすべて真になれば formula $B_1, \dots, B_m$ のうちに真であるものが少なくとも一つはあるとき、与えられた多値論理で“valid である”という。このようにして、各多値論理に対し“valid sequent”というものが決まる。

以下に例として、いずれも論理記号としては2変数の‘ $\vee$ ’と1変数の‘ $\neg$ ’のみを認める多値論理を三つ挙げてみよう。

例1. 真理値の集合: $\{1, 2\}$; 真なる値の集合: $\{1\}$;
論理記号に対応する真理関数:

$\vee$:

$a \backslash b$	1	2
1	1	1
2	1	2

$\neg$:

a	
1	2
2	1

これは“古典論理”である。

例2. 真理値の集合: $\{1, 2, 3\}$; 真なる値の集合: $\{1, 2\}$; 論理記号に対応する真理関数:

$\vee$:

$a \backslash b$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

 $\neg$:

a	
1	3
2	3
3	1

この論理で真なる値の集合を $\{1\}$ に変更したものが
 "Gödel の 3 値論理" である。

例 3. 真理値の集合: $\{1, 2, 3\}$; 真なる値の集合:
 $\{1, 2\}$; 論理記号に対応する真理関数:

 $\vee$:

$a \backslash b$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

 $\neg$:

a	
1	3
2	2
3	1

以上の例について、証明は (本文を読みればわかるから) こ
 ころは略すが実は、例 2 の 3 値論理における valid sequent と
 例 1 の 2 値論理における valid sequent とは完全に一致する
 のである。したがって、

例 2 の 3 値論理は valid sequent の範囲を変えずに真理
 値の個数をへらすことができる。

しかし、これも証明はここでは略すが、

例3の3値論理は valid sequent の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができない。

それでは、与えられた多値論理が valid sequent の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができるかどうかの基準はどこにあるのだろうか？ これが小論の主題であり、第6項の定理でこれに答える。一方、与えられた多値論理から valid sequent の範囲を変えずに真理値の個数をふやすことは、第5項の定理が示すように、必ずできるのである。

小論では自然数——0または正整数—— n に対し $N(n)$ により集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を表わす。

1. 小論では1つの言語を固定して考える。それは次の記号をもっている：

- 1°) 無限個の命題変数。 $X, Y, X_1, \dots$ で表わす。
- 2°) 任意個の論理記号。おのおのに何変数の論理記号であるかを示す自然数が指定されている。
- 3°) かっこ $(,)$; カンマ $,$; 矢印 $\longrightarrow$ 。

命題変数と論理記号、かっこ、カンマを用いて“論理式 (formula)”が構成される。また、論理式 $A_1, \dots, A_\lambda, B_1, \dots, B_\mu$ (λ, μ は任意の自然数) とカンマ、矢印を用いた $A_1, \dots, A_\lambda \longrightarrow B_1, \dots, B_\mu$

という表現が“式 (sequent)”であり $\langle A_1, \dots, A_\lambda \rangle, \langle B_1, \dots, B_\mu \rangle$ がそれぞれこの式の“左辺”, “右辺”である.

2. m を正整数とする.

“ m 値枠”とは論理記号全体の集合を定義域とする写像 Φ で, 各論理記号 F — k 変数とする — に対し $\Phi(F)$ が $N(m)^k \rightarrow N(m)$ なる写像であるもの, のことである.

m 値枠 Φ , 相異なる $X_1, \dots, X_\nu$ 以外の命題変数を含まない論理式 $A(X_1, \dots, X_\nu)$, および集合 $N(m)$ の元 $a_1, \dots, a_\nu$ が与えられたとき ‘命題変数 $X_1, \dots, X_\nu$ を真理値 $a_1, \dots, a_\nu$, 論理記号 $F, G, \dots$ を真理関数 $\Phi(F), \Phi(G), \dots$ で解釈したときの論理式 $A(X_1, \dots, X_\nu)$ の真理値’ である集合 $N(m)$ の元を “ $A^\Phi[a_1, \dots, a_\nu]$ ” で表す. すなわち,

i) $A(X_1, \dots, X_\nu)$ が X_i なら

$$A^\Phi[a_1, \dots, a_\nu] = a_i;$$

ii) $A(X_1, \dots, X_\nu)$ が $F(A_1(X_1, \dots, X_\nu), \dots, A_k(X_1, \dots, X_\nu))$

なら

$$A^\Phi[a_1, \dots, a_\nu] = \Phi(F)(A_1^\Phi[a_1, \dots, a_\nu], \dots, A_k^\Phi[a_1, \dots, a_\nu]).$$

m 値枠 Φ と $0 \leq n \leq m$ なる整数 n の対 (Φ, n) のことを “ m 値論理” という. m 値論理 (Φ, n) は, n 個の真なる値 $1, \dots, n$ と $(m-n)$ 個の偽なる値 $n+1, \dots, m$ を真理値としてもち, 論理記号 $F, G, \dots$ をそれぞれ真理関数

$\Phi(F), \Phi(G), \dots$ と解釈する論理である.

m 値論理 (Φ, n) および $X_1, \dots, X_v$ 以外の命題変数を含む
ない式 $\gamma(X_1, \dots, X_v)$:

$$A_1(X_1, \dots, X_v), \dots, A_\lambda(X_1, \dots, X_v)$$

$$\rightarrow B_1(X_1, \dots, X_v), \dots, B_\mu(X_1, \dots, X_v)$$

が与えられたとする. 集合 $N(m)$ の元 $a_1, \dots, a_v$ に対し,

$$A_1^\Phi[a_1, \dots, a_v] \in N(n) \ \& \ \dots \ \& \ A_\lambda^\Phi[a_1, \dots, a_v] \in N(n)$$

$$\implies B_1^\Phi[a_1, \dots, a_v] \in N(n) \vee \dots \vee B_\mu^\Phi[a_1, \dots, a_v] \in N(n)$$

のとき " $\gamma[a_1, \dots, a_v]$ は m 値論理 (Φ, n) で真である" とい

う. 集合 $N(m)$ の任意の元 $a_1, \dots, a_v$ に対し $\gamma[a_1, \dots, a_v]$ が
 m 値論理 (Φ, n) で真であるとき "式 $\gamma(X_1, \dots, X_v)$ は m 値
論理 (Φ, n) で恒真 (valid) である" という. m 値論理
 (Φ, n) における恒真式全体の集合を " $W_m(\Phi, n)$ " と表わ
す.

3. まず次の補題を証明しよう.

補題. m 値論理 (Φ, n) , p 値論理 (Φ, p) , さらに

$N(m) \rightarrow N(p)$ をる写像 σ に関する次の性質 C1, C2, C3
を考える:

C1. 各論理記号 $F \rightarrow k$ 変数とする $\rightarrow$ に対し,

$$\textcircled{\forall} a_1, \dots, a_k \in N(m)$$

$$\sigma(\Phi(F)(a_1, \dots, a_k)) = \Phi(F)(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k)).$$

$$C2. \quad \forall a \in N(m) \quad \sigma(a) \in N(g) \iff a \in N(n).$$

C3. σ は全射である.

このとき、性質 C1 と C2 が成り立てば

$$W_p(\Phi, g) \subseteq W_m(\Phi, n)$$

であり、性質 C1, C2 および C3 が成り立てば

$$W_p(\Phi, g) = W_m(\Phi, n)$$

である.

証明. v を自然数, $x_1, \dots, x_v$ を相異なる命題変数とする.

性質 C1 が成り立てば, $x_1, \dots, x_v$ 以外の命題変数を含まない

任意の論理式 $A(x_1, \dots, x_v)$ に対し

$$\forall a_1, \dots, a_v \in N(m)$$

$$\sigma(A^\Phi[a_1, \dots, a_v]) = A^\Psi[\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_v)]$$

となることが、論理式の構成による帰納法で示される.

したがって、さらに性質 C2 も成り立てば, $x_1, \dots, x_v$ 以外の命題変数を含まない任意の論理式 $A(x_1, \dots, x_v)$ に対し

$$\forall a_1, \dots, a_v \in N(m)$$

$$A^\Phi[a_1, \dots, a_v] \in N(n) \iff A^\Psi[\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_v)] \in N(g)$$

となる.

上の性質から補題の結論を導くのは容易である.

4. ここで、与えられた論理からもう一つの論理を作る二つの構成法を与えよう. これらはそれぞれ第6, 7項の定理

の証明に用いられる。

(a) 第1のものは、 m 値論理 (Φ, n) と次の性質 (#),
 (##) を満たす集合 $N(m)$ 上の同値関係 $\equiv$ からの

$$(\Phi, n) / \equiv$$

とでもいうべき p 値論理 (Ψ, g) の構成である。

(#) 各論理記号 F — k 変数とする — に対し

$$\textcircled{\forall} a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in N(m)$$

$$a_i \equiv b_i \text{ \& \dots \& } a_k \equiv b_k$$

$$\implies \Phi(F)(a_1, \dots, a_k) \equiv \Phi(F)(b_1, \dots, b_k).$$

$$\text{(##)} \quad \textcircled{\forall} a, b \in N(m) \quad a \equiv b \implies a \in N(n) \iff b \in N(n).$$

まず p, g はそれぞれ集合 $N(m), N(n)$ の同値関係 $\equiv$ による同値類の個数——後者は正確には、 $\equiv$ を集合 $N(n)$ に制限した $N(n)$ 上の同値関係による同値類の個数——である。
 すると (##) も考慮にいれると次の性質 (4.1), (4.2) を満たす $N(m) \rightarrow N(p)$ を写像 σ ととることができる:

$$(4.1) \quad \textcircled{\forall} a, b \in N(m) \quad \sigma(a) = \sigma(b) \iff a \equiv b.$$

$$(4.2) \quad \textcircled{\forall} a \in N(m) \quad \sigma(a) \in N(g) \iff a \in N(n).$$

すると p のとり方と (4.1) より,

$$(4.3) \quad \sigma \text{ は全射である.}$$

次に p 値枠 Ψ は (#), (4.1), (4.3) により定まる, 次の性質 (4.4) を満たすものである:

(4.4) 各論理記号 F — k 変数とする — に対し

$$\textcircled{\forall} a_1, \dots, a_k \in N(m)$$

$$\pm(F)(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k)) = \sigma(\pm(F)(a_1, \dots, a_k)).$$

ここで ρ 値論理 $(\pm, g)$ が定義されたが, (4.4), (4.2),

(4.3) がそれぞれ補題の性質 C1, C2, C3 だから,

$$W_\rho(\pm, g) = W_m(\pm, n).$$

(6) 第2のものは, m 値論理 $(\pm, n)$ と次の性質 (b),

(bb) を満たす集合 $N(m)$ の部分集合 S からの

$$(\pm, n) \upharpoonright S$$

とでもいうべき ρ 値論理 $(\pm, g)$ の構成である.

(b) 各論理記号 F — k 変数とする — に対し

$$\textcircled{\forall} a_1, \dots, a_k \in N(m)$$

$$a_1 \in S \ \& \ \dots \ \& \ a_k \in S \implies \pm(F)(a_1, \dots, a_k) \in S.$$

(bb) $S \neq \emptyset$.

まず ρ, g はそれぞれ集合 $S, S \cap N(n)$ の元の個数である (bb) より $\rho \neq 0$). すると次の性質 (4.5), (4.6) を満たす $N(\rho) \rightarrow N(m)$ なる写像 τ をとることができる:

(4.5) τ の値域は S である.

$$(4.6) \quad \textcircled{\forall} x \in N(\rho) \quad \tau(x) \in N(n) \iff x \in N(g).$$

次に ρ 値枠 $\pm$ は (b), ρ のとり方, (4.5) により定まる, 次の性質 (4.7) を満たすものである:

(4.7) 各論理記号 F — k 変数とする — に対し

$$\textcircled{\forall} x_1, \dots, x_k \in N(p)$$

$$\tau(\pm(F)(x_1, \dots, x_k)) = \pm(F)(\tau(x_1), \dots, \tau(x_k)).$$

これより p 値論理 $(\pm, g)$ が定義されたが, (4.7), (4.6) がそれぞれ補題の性質 C1, C2 にあたるので,

$$W_p(\pm, g) \supseteq W_m(\pm, n).$$

5. 次の定理が示すように, 恒真式の範囲を変えずに真理値の個数をふやすことは, いくつふやすこともいつでも可能である.

定理. m 値論理 $(\pm, n)$ と $p \geq m$ なる整数 p に対し,

$$W_p(\pm, g) = W_m(\pm, n)$$

となる p 値論理 $(\pm, g)$ が存在する.

証明. まず $n \leq g \leq p - m + n$ なる整数 g をとる. すると次の性質 (5.1), (5.2) を満たす $N(p) \rightarrow N(m)$ なる写像 τ をとることができる:

(5.1) τ は全射である.

$$(5.2) \quad \textcircled{\forall} x \in N(p) \quad \tau(x) \in N(n) \iff x \in N(g).$$

次に (5.1) により, 次の性質 (5.3) を満たすように p 値枠 $\pm$ をとる:

(5.3) 各論理記号 F — k 変数とする — に対し

$$\textcircled{\forall} x_1, \dots, x_k \in N(p)$$

$$\tau(\Phi(F)(x_1, \dots, x_k)) = \Phi(F)(\tau(x_1), \dots, \tau(x_k)).$$

これで p 値論理 (Φ, g) が定義されたが, (5.3), (5.2), (5.1) がそれぞれ補題の性質 C1, C2, C3 だから,

$$W_p(\Phi, g) = W_m(\Phi, n).$$

6. 恒真式の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことのできる論理を特徴づける——恒真式の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことのできる論理を特徴づける, ともいえるが——次の命題の性質 D1 と D3 の同値性が小論の主定理である.

定理. m 値論理 (Φ, n) に関する次の性質 D1, D2, D3 は同値である. ここに, $X, Y_1, \dots, Y_m$ は相異なる命題変数である:

D1. 次のような正整数 p と p 値論理 (Φ, g) は存在しない:

$$p < m \text{ \& } W_p(\Phi, g) = W_m(\Phi, n).$$

D2. 次のような正整数 p と p 値論理 (Φ, g) は存在しない:

$$p < m \text{ \& } W_p(\Phi, g) \subseteq W_m(\Phi, n).$$

D3. 集合 $N(m)$ の相異なる元 a, b よりなる a の a の a の対 (a, b) に対し, $X, Y_1, \dots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない論理式 $A(X, Y_1, \dots, Y_m)$ で

$$A^{\Phi}[a, 1, \dots, m] \in N(n) \not\leftrightarrow A^{\Phi}[b, 1, \dots, m] \in N(n)$$

であるものが存在する.

D2 $\Rightarrow$ D1 の証明. 明らか.

D1 $\Rightarrow$ D3 の証明. 集合 $N(m)$ の元 a, b に対し $a \equiv b$ を,

$X, Y_1, \dots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない任意の論理式

$A(X, Y_1, \dots, Y_m)$ に対し

$$A^{\Phi}[a, 1, \dots, m] \in N(n) \leftrightarrow A^{\Phi}[b, 1, \dots, m] \in N(n)$$

であることを意味するものとする. すると関係 $\equiv$ は集合 $N(m)$ 上の同値関係であり, さらに 4(a) の性質 (#) および (##) を満たす. したがって 4(a) の構成により

$$W_p(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = W_m(\Phi, n)$$

である μ 値論理 $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ を得る. — ここで定義した関係 $\equiv$ は実は, 性質 (#) および (##) を満たす集合 $N(m)$ 上の同値関係のうち最も広いものである.

ここで性質 D3 を否定すれば, 数 μ は集合 $N(m)$ の同値関係 $\equiv$ による同値類の個数だから $\mu < m$ となり, 結局性質 D1 の否定が導かれた.

D3 $\Rightarrow$ D2 の証明. 性質 D3 を仮定して, 集合 $N(m)$ の相異なる元 a, b よりなる a の a の対 (a, b) に対し,

$$A_{ae}^{\Phi}[a, 1, \dots, m] \in N(n) \not\leftrightarrow A_{ae}^{\Phi}[b, 1, \dots, m] \in N(n)$$

である, $X, Y_1, \dots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない論理式

$A_{ab}(X, Y_1, \dots, Y_m)$ をとり,

$$I = \{(a, b) \mid A_{ab}^\Phi[a, 1, \dots, m] \in N(n), A_{ab}^\Phi[b, 1, \dots, m] \notin N(n)\},$$

$$J = \{(a, b) \mid A_{ab}^\Phi[a, 1, \dots, m] \notin N(n), A_{ab}^\Phi[b, 1, \dots, m] \in N(n)\}$$

とおく. a, b が集合 $N(m)$ の相異なる元ならば $(a, b) \in I$

または $(a, b) \in J$ である. として $\mathcal{J}(Y_1, \dots, Y_m)$ を次の

式とする:

$$\begin{aligned} & A_{ab}(Y_a, Y_1, \dots, Y_m) \left(\bigvee_{a, b \text{ s.t. } (a, b) \in I} \right), \\ & A_{ab}(Y_b, Y_1, \dots, Y_m) \left(\bigvee_{a, b \text{ s.t. } (a, b) \in J} \right) \\ \longrightarrow & \\ & A_{ab}(Y_b, Y_1, \dots, Y_m) \left(\bigvee_{a, b \text{ s.t. } (a, b) \in I} \right), \\ & A_{ab}(Y_a, Y_1, \dots, Y_m) \left(\bigvee_{a, b \text{ s.t. } (a, b) \in J} \right) \end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{J}[1, \dots, m]$ が m 値論理 (Φ, n) で真ではないことより $\mathcal{J}(Y_1, \dots, Y_m) \notin W_m(\Phi, n)$.

ここで結論である性質 D2 を否定して,

$$p < m \text{ \& } W_p(\Phi, g) \subseteq W_m(\Phi, n)$$

である正整数 p と p 値論理 (Φ, g) が存在したと仮定する.

すると $\mathcal{J}(Y_1, \dots, Y_m) \notin W_p(\Phi, g)$ より, $\mathcal{J}[x_1, \dots, x_m]$ が p 値論理 (Φ, g) で真ではないような集合 $N(p)$ の元 $x_1, \dots, x_m$ が存在するはずだが, このような元 $x_1, \dots, x_m$ は式

$\gamma(Y_1, \dots, Y_m)$ のとり方より相異ならねばならず, $p < m$ と矛盾する.

7. 次の定理は前定理の補遺であるが, 証明はホイホイとはいかない.

定理. m 値論理 (Φ, n) に関する次の性質 $E1$, $E2$ は同値である. ここに, $X, Y_1, \dots, Y_m$ は相異なる命題変数である:

$E1$. 次のような正整数 p と p 値論理 (Ψ, p) は存在しない:

$$p < m \ \& \ W_p(\Psi, p) \geq W_m(\Phi, n).$$

$E2$. 集合 $N(m)$ の相異なる元 a, b よりなるおのおのの対 (a, b) に対し, $X, Y_1, \dots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない論理式 $A(X, Y_1, \dots, Y_m)$ ぞ

$$A^\Phi[a, 1, \dots, m] \in N(n) \not\leftrightarrow A^\Phi[b, 1, \dots, m] \in N(n)$$

であるものが存在し — これは前定理の性質 $D3$ —, かつ集合 $N(m)$ の (必ずしも異なる) 元 a, b よりなるおのおのの対 (a, b) に対し, X 以外の命題変数を含まない論理式 $B(X)$ ぞ

$$B^\Phi[a] = b$$

であるものが存在する — これを性質 $E2'$ とする —.

$E1 \Rightarrow E2$ の証明. $E1 \Rightarrow D3$ は $E1 \Rightarrow D1$ と前定理の $D1 \Rightarrow D3$ による.

次に $E1 \Rightarrow E2^-$ を示すために性質 $E2^-$ を否定して,

X 以外の命題変数を含まない任意の論理式 $B(X)$ に対し

$$B^{\oplus}[a] \neq b$$

となる集合 $N(m)$ の元 a, b をとり,

$$S = \{ B^{\oplus}[a] \mid B(X) \text{ は } X \text{ 以外の命題変数を含まない論理式} \}$$

とおく. すると集合 S は集合 $N(m)$ の部分集合であり, さらに 4(b) の性質 (b) および (bb) を満たす. したがって 4(b) の構成により

$$W_p(\oplus, g) \supseteq W_m(\oplus, n)$$

である $\mathcal{L}$ 値論理 $(\oplus, g)$ を得る. ここで $b \notin S$ であり, 数 p は集合 S の元の個数だから $p < m$ となり, 結局性質 $E1$ の否定が導かれた. — ここでは性質 $E2^-$ の否定から性質 (b) および (bb) を満たす集合 $N(m)$ の真部分集合 S の存在を導いたが, 実は逆もいえる.

$E2 \Rightarrow E1$ の証明. ① 性質 $E2$ を仮定して, 集合 $N(m)$ の相異なる元 a, b よりなるおのおのの対 (a, b) に対し,

$$A_{ae}^{\oplus}[a, 1, \dots, m] \in N(n) \iff A_{ae}^{\oplus}[b, 1, \dots, m] \in N(n)$$

である, $X, Y_1, \dots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない論理式 $A_{ae}(X, Y_1, \dots, Y_m)$ と, 集合 $N(m)$ の (必ずしも異なる) 元 a, b よりなるおのおのの対 (a, b) に対し,

$$B_{a,b}^{\Phi}[a] = b$$

である, X 以外の命題変数を含まない論理式 $B_{a,b}(X)$ をとる.

② v を正整数, $X_1, \dots, X_v$ を相異なる命題変数とする.

集合 $N(m)$ の元 $a_1, \dots, a_v, b_1, \dots, b_v$ に対し

$$(a_1, \dots, a_v) \equiv (b_1, \dots, b_v) \text{ 並}$$

$X_1, \dots, X_v$ 以外の命題変数を含まない任意の論理式

$C(X_1, \dots, X_v)$ に対し

$$C^{\Phi}[a_1, \dots, a_v] \in N(n) \iff C^{\Phi}[b_1, \dots, b_v] \in N(n)$$

であることを意味するものとする. すると関係 $\equiv$ は集合 $N(m)^v$ 上の同値関係である. そこで集合 $N(m)^v$ の同値関係 $\equiv$ による同値類の個数を " $\bar{v}$ " で表す.

このとき,

$$(7.1) \quad \bar{v} > (m-1)^v \text{ となる正整数 } v \text{ が存在する.}$$

これを証明するために, まず次の命題を示す:

$$(7.2) \quad \textcircled{\forall} a_1, \dots, a_v, b_1, \dots, b_v \in N(m)$$

$$(a_1, \dots, a_v) \equiv (b_1, \dots, b_v) \implies a_i = a_j \iff b_i = b_j.$$

実際, もし $(a_1, \dots, a_v) \equiv (b_1, \dots, b_v)$, $a_i = a_j$ で $b_i \neq b_j$ なら

$$A_{b_i, b_j}^{\Phi}[b_i, 1, \dots, m] \in N(n)$$

$$\iff A_{b_i, b_j}^{\Phi}[b_i, B_{b_i, 1}^{\Phi}[b_i], \dots, B_{b_i, m}^{\Phi}[b_i]] \in N(n)$$

$$\iff A_{b_i, b_j}^{\Phi}[a_i, B_{b_i, 1}^{\Phi}[a_i], \dots, B_{b_i, m}^{\Phi}[a_i]] \in N(n)$$

$$\iff A_{b_i b_j}^{\Phi}[a_j, B_{b_i,1}^{\Phi}[a_i], \dots, B_{b_i,m}^{\Phi}[a_i]] \in N(u)$$

$$\iff A_{b_i b_j}^{\Phi}[b_j, B_{b_i,1}^{\Phi}[b_i], \dots, B_{b_i,m}^{\Phi}[b_i]] \in N(u)$$

$$\iff A_{b_i b_j}^{\Phi}[b_j, 1, \dots, m] \in N(u)$$

となり論理式 $A_{b_i b_j}(X, Y_1, \dots, Y_m)$ のとり方に反してしまう。

(7.2) より, 集合 $N(m)^v$ の同値関係 $\equiv$ による各同値類は高々 $m!$ 個の元よりなる。したがって $m! \cdot \bar{v} \geq m^v$ だから, 十分大きな v をとれば $\bar{v} > (m-1)^v$ となる。

以後は (7.1) に基づき, $\bar{v} > (m-1)^v$ である正整数 v を 1 つ固定して考え, 同値関係 $\equiv$ を単に “ $\equiv$ ” と表わす。また, $X_1, \dots, X_v$ 以外の命題変数を含まない論理式 $C(X_1, \dots, X_v)$ と集合 $N(m)^v$ の元 $\bar{a} = (a_1, \dots, a_v)$ に対し $C^{\Phi}[a_1, \dots, a_v]$ を “ $C^{\Phi}[\bar{a}]$ ” と表わす。

③ 集合 $N(m)^v$ の $\bar{a} \neq \bar{b}$ である元 $\bar{a}, \bar{b}$ よりなるおのれの対 $(\bar{a}, \bar{b})$ に対し,

$$C_{\bar{a}\bar{b}}^{\Phi}[\bar{a}] \in N(u) \iff C_{\bar{a}\bar{b}}^{\Phi}[\bar{b}] \in N(u)$$

である。 $X_1, \dots, X_v$ 以外の命題変数を含まない論理式

$C_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \dots, X_v)$ をとり,

$$I = \{ (\bar{a}, \bar{b}) \mid C_{\bar{a}\bar{b}}^{\Phi}[\bar{a}] \in N(u), C_{\bar{a}\bar{b}}^{\Phi}[\bar{b}] \notin N(u) \},$$

$$J = \{ (\bar{a}, \bar{b}) \mid C_{\bar{a}\bar{b}}^{\Phi}[\bar{a}] \notin N(u), C_{\bar{a}\bar{b}}^{\Phi}[\bar{b}] \in N(u) \}$$

とおく。 $\bar{a}, \bar{b}$ が集合 $N(m)^v$ の $\bar{a} \neq \bar{b}$ である元ならば

$(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ または $(\bar{a}, \bar{b}) \in J$ である。ここで $\mathcal{R}_{\pi}(X_1, \dots, X_v)$

(ここに π は $N(m)^V \rightarrow N(m)^V$ なる写像であり $\bigvee \bar{a} \in N(m)^V$
 $\pi(\bar{a}) \neq \bar{a}$), $\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \dots, X_v)$ (ここに $\bar{a}, \bar{b}$ は集合 $N(m)^V$
 の元であり $\bar{a} \neq \bar{b}$), および $\forall \bar{e}\bar{a}\bar{b}(X_1, \dots, X_v)$ (ここに $\bar{e},$
 $\bar{a}, \bar{b}$ は集合 $N(m)^V$ の元であり $\bar{e} \neq \bar{b}$.) を用いた次の式
 とする:

$$\mathcal{R}_\pi(X_1, \dots, X_v):$$

$$\begin{array}{l} C_{\pi(\bar{a})\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\pi(\bar{a}), \bar{a}) \in I) \\ \longrightarrow \\ C_{\pi(\bar{a})\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\pi(\bar{a}), \bar{a}) \in J) \end{array}$$

$$\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \dots, X_v):$$

$$\begin{array}{l} C_{\bar{a}\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\bar{a}, \bar{a}) \in J), \\ C_{\bar{e}\bar{b}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{e} \text{ s.t. } (\bar{e}, \bar{b}) \in J) \\ \longrightarrow \\ C_{\bar{a}\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\bar{a}, \bar{a}) \in I), \\ C_{\bar{e}\bar{b}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{e} \text{ s.t. } (\bar{e}, \bar{b}) \in I) \end{array}$$

$$\forall \bar{e}\bar{a}\bar{b}(X_1, \dots, X_v), \text{ 且して } \bar{a} = (a_1, \dots, a_v),$$

$$\bar{b} = (b_1, \dots, b_v):$$

$$(\bar{e}, \bar{b}) \in I \text{ のとき:}$$

$$\begin{aligned}
& C_{\bar{e}\bar{b}}(B_{a,e_1}(X_1), \dots, B_{a,e_v}(X_v)), \\
& C_{\bar{a}\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\bar{a}, \bar{a}) \in J) \\
\longrightarrow \\
& C_{\bar{a}\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\bar{a}, \bar{a}) \in I)
\end{aligned}$$

$(\bar{e}, \bar{b}) \in J$ のとき:

$$\begin{aligned}
& C_{\bar{a}\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\bar{a}, \bar{a}) \in J) \\
\longrightarrow \\
& C_{\bar{a}\bar{a}}(X_1, \dots, X_v) \quad (\bigvee \bar{a} \text{ s.t. } (\bar{a}, \bar{a}) \in I), \\
& C_{\bar{e}\bar{b}}(B_{a,e_1}(X_1), \dots, B_{a,e_v}(X_v))
\end{aligned}$$

すると,

$$(7.3) \quad \text{式 } \mathcal{R}_\pi(X_1, \dots, X_v), \quad \gamma_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \dots, X_v),$$

$\forall \bar{e}\bar{a}\bar{b}(X_1, \dots, X_v)$ はすべて m 値論理 (Φ, n) で恒真である.

式 $\forall \bar{e}\bar{a}\bar{b}(X_1, \dots, X_v)$ が恒真であることの証明が一番面倒なので, ここではそれだけを証明する. 集合 $N(m)^v$ の任意の元 $\bar{f} = (f_1, \dots, f_v)$ をとる. $\forall \bar{e}\bar{a}\bar{b}[f_1, \dots, f_v]$ が m 値論理 (Φ, n) で真であることを示したい. 集合 $N(m)^v$ の元 $\bar{f}$ と $\bar{a}$ について $(\bar{f}, \bar{a}) \in I$, $(\bar{f}, \bar{a}) \in J$, $\bar{f} \equiv \bar{a}$ のいずれかが $\rightarrow$ が成り立つから, こゝから3通りに場合を分けて考える.

i) $(\bar{f}, \bar{a}) \in I$ のとき. 論理式 $C_{\bar{f}\bar{a}}(X_1, \dots, X_v)$ が式

$\forall \bar{e} \bar{a} \bar{b} (X_1, \dots, X_v)$ の右辺に含まれ $C_{\bar{f} \bar{a}}^{\Phi}[\bar{f}] \in N(n)$ だから,
 $\forall \bar{e} \bar{a} \bar{b} [f_1, \dots, f_v]$ は m 値論理 (Φ, n) で真である.

ii) $(\bar{f}, \bar{a}) \in J$ のとき. 論理式 $C_{\bar{f} \bar{a}}^{\Phi}(X_1, \dots, X_v)$ が左辺に
 含まれ $C_{\bar{f} \bar{a}}^{\Phi}[\bar{f}] \notin N(n)$ だから, $\forall \bar{e} \bar{a} \bar{b} [f_1, \dots, f_v]$ は m 値論
 理 (Φ, n) で真である.

iii) $\bar{f} \equiv \bar{a}$ のとき.

$$\begin{aligned} & C_{\bar{e} \bar{b}}^{\Phi}[B_{a, b,}^{\Phi}[f_1], \dots, B_{a, b,}^{\Phi}[f_v]] \in N(n) \\ \iff & C_{\bar{e} \bar{b}}^{\Phi}[B_{a, b,}^{\Phi}[a_1], \dots, B_{a, b,}^{\Phi}[a_v]] \in N(n) \\ \iff & C_{\bar{e} \bar{b}}^{\Phi}[\bar{b}] \in N(n) \end{aligned}$$

だから, $(\bar{e}, \bar{b}) \in I$ なら $C_{\bar{e} \bar{b}}(B_{a, b,}(X_1), \dots, B_{a, b,}(X_v))$ が式
 $\forall \bar{e} \bar{a} \bar{b} (X_1, \dots, X_v)$ の左辺に含まれ

$$C_{\bar{e} \bar{b}}^{\Phi}[B_{a, b,}^{\Phi}[f_1], \dots, B_{a, b,}^{\Phi}[f_v]] \notin N(n),$$

また $(\bar{e}, \bar{b}) \in J$ なら $C_{\bar{e} \bar{b}}(B_{a, b,}(X_1), \dots, B_{a, b,}(X_v))$ が式
 $\forall \bar{e} \bar{a} \bar{b} (X_1, \dots, X_v)$ の右辺に含まれ

$$C_{\bar{e} \bar{b}}^{\Phi}[B_{a, b,}^{\Phi}[f_1], \dots, B_{a, b,}^{\Phi}[f_v]] \in N(n).$$

よって, いずれにしても $\forall \bar{e} \bar{a} \bar{b} [f_1, \dots, f_v]$ は m 値論理
 (Φ, n) で真である.

④ ここで結論である性質 E1 を否定して,

$$p < m \quad \& \quad W_p(\Phi, g) \geq W_m(\Phi, n)$$

である正整数 p と p 値論理 (Φ, g) が存在したと仮定する.

すると正整数 v のとり方と (7.3) より, 次の (7.4) および

(7.5) を得る:

(7.4) 集合 $N(m)^V$ の同値関係 $\equiv$ による同値類の個数は p^V より大きい.

(7.5) 式 $R_{\pi}(x_1, \dots, x_v)$, $\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(x_1, \dots, x_v)$,

$\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(x_1, \dots, x_v)$ はすべて p 値論理 $(\pm, g)$ で恒真である.

ここで, 集合 $N(m)^V$ の元 $\bar{a}$ と集合 $N(p)$ の元 $x_1, \dots, x_v$ に

対し $R_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_v)$ を,

$$\textcircled{\forall} \bar{a} \left((\bar{a}, \bar{a}) \in I \implies C_{\bar{a}\bar{a}}^{\pm}[x_1, \dots, x_v] \notin N(g) \right)$$

$$\& \textcircled{\forall} \bar{a} \left((\bar{a}, \bar{a}) \in J \implies C_{\bar{a}\bar{a}}^{\pm}[x_1, \dots, x_v] \in N(g) \right)$$

を意味するものとする, (7.5) は次の (7.6) のようにい

かえられる:

$$(7.6) \quad 1^\circ) \textcircled{\forall} x_1, \dots, x_v \in N(p) \textcircled{\exists} \bar{a} \in N(m)^V R_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_v).$$

$$2^\circ) \textcircled{\forall} x_1, \dots, x_v \in N(p) \textcircled{\forall} \bar{a}, \bar{b} \in N(m)^V$$

$$R_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_v) \& R_{\bar{b}}(x_1, \dots, x_v) \implies \bar{a} \equiv \bar{b}.$$

$$3^\circ) \textcircled{\forall} x_1, \dots, x_v \in N(p) \textcircled{\forall} \bar{a}, \bar{b} \in N(m)^V$$

$$R_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_v) \implies R_{\bar{b}}(B_{a_1, b_1}^{\pm}[x_1], \dots, B_{a_v, b_v}^{\pm}[x_v]),$$

$$\text{ここには } \bar{a} = (a_1, \dots, a_v), \bar{b} = (b_1, \dots, b_v).$$

1°) より $N(p)^V \rightarrow N(m)^V$ なる写像 $\bar{\alpha}$ をとり

$$(*) \textcircled{\forall} x_1, \dots, x_v \in N(p) R_{\bar{\alpha}(x_1, \dots, x_v)}(x_1, \dots, x_v)$$

とできる. この写像 $\bar{\alpha}$ に対し (7.4) より

$$(**) \textcircled{\forall} x_1, \dots, x_v \in N(p) \bar{b} \neq \bar{\alpha}(x_1, \dots, x_v)$$

となる集合 $N(m)^V$ の元 $\bar{a} = (a_1, \dots, a_v)$ が存在する. $(*)$, $(**)$

と 2°) より

$$(**) \quad \textcircled{\forall} x_1, \dots, x_v \in N(p) \quad \neg R_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_v)$$

を得る. 一方, $(*)$ と 3°) より

$$(**) \quad \textcircled{\forall} x_1, \dots, x_v \in N(p)$$

$$R_{\bar{a}}(B_{\alpha_1(x_1, \dots, x_v)} b_1^{\mp}[x_1], \dots, B_{\alpha_v(x_1, \dots, x_v)} b_v^{\mp}[x_v]),$$

$$\text{ここに } \bar{a}(x_1, \dots, x_v) = (\alpha_1(x_1, \dots, x_v), \dots, \alpha_v(x_1, \dots, x_v))$$

となり, $(**)$ と $(**)$ は矛盾する.

注意. 前定理と本定理に關係して, 性質 $D1$, $D2$ は満たすが性質 $E1$ を満たさない, つまり, 性質 $D3$ は満たすが性質 $E2$ を満たさない (したがって性質 $E2$ も満たさない) 論理の例としては, 序文に挙げた例3の3値論理がそうである.

小論ではもっぱら多値論理における “valid sequent” を扱ったのだが, “valid formula” というものも考えられる:

多値論理が1つ与えられたとする. Formula A に対し, それに含まれる命題変数に真理値をどう対応させようとするか対応で formula A が真になる, つまり sequent $\longrightarrow A$ が valid sequent であるとき, formula A を与えられた多値論理で “valid である” というのである.

すると, 序文の例2の3値論理について valid sequent に

関することから特に,

例2の3値論理は valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができる.

また, valid sequent のときとは異なり, 例3の3値論理における valid formula は例1の2値論理における valid formula と実は完全に一致するのである. したがって,

例3の3値論理も valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができる.

しかし, 例2の3値論理の真なる値の集合を $\{1\}$ に変更した Gödel の3値論理については,

Gödel の3値論理は valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができない.

さしでは, 与えられた多値論理が valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができるかどうかの基準はどこにあるのだろうか? この問題に対する答は筆者には今のところわからない.