

単純な Heegaard 分解について

神大 教養部 柳川高明

V, W を solid torus, M を可符号 3 次元多様体とし,
 $M = V \cup W$, $V \cap W = \partial V = \partial W$ である Heegaard
 分解 $\{V, W, M\}$ を考える. V, W 各々の標準的な merid-
 -ian 系 $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, $(w_1, w_2, \dots, w_n)$
 (図 1 参照) についての条件 (s) を次のように定める.

(s) 各 i ($1 \leq i \leq n$) に対し, $v_i \cap w_j \neq \emptyset$ なる w_j
 ($1 \leq j \leq n$) は高々 3 個であり, それら 3 個は互に異なっ
 ている.

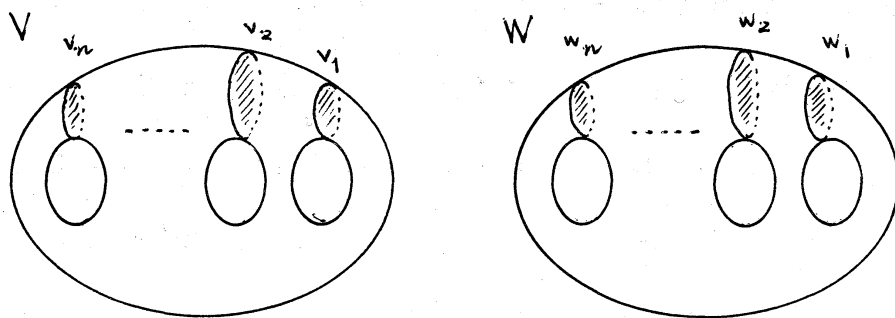


図 1

命題 任意の可符号円3次元多様体 M に対して、単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が存在する。

上の命題は、 M の任意の Heegaard 分解を Waldhausen の方法によって genus を増してやることにより容易に証明しうる、(WALDHAUSEN 参照)。

W の標準的な longitude 系 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を図2のように定める。各 x_j 上の1点と ∂W 上の定号 p とを結ぶ

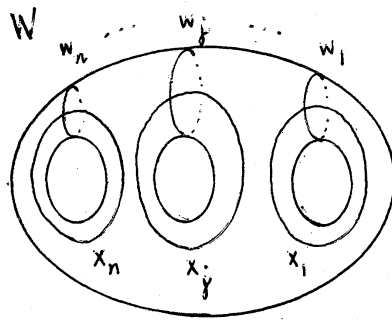


図2

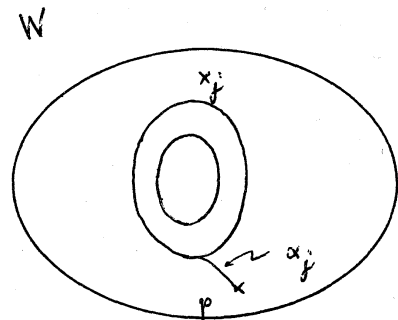


図2'

弧 α_j に適当に方向を与えたものを、同じく x_j で表すことにすると、 $\pi_1(W)$ は $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を生成元とする free group (rank n) であり、閉曲線 ∂V_i の表す $\pi_1(W)$ の元 (v_i) はこれら $x_1, x_2, \dots, x_n$ で表される。このとき、 $|(v_i)|$ を (v_i) を $x_1, x_2, \dots, x_n$ で表した場合の x_i の個数とする。例えば $(v_i) = x_1 x_2^{-1} x_3$ のとき、

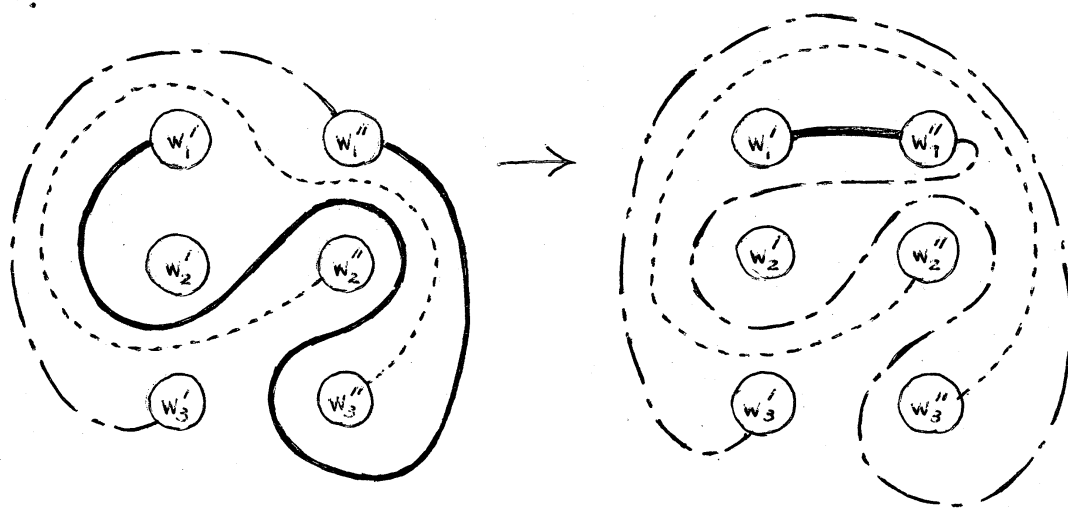
$|(v_i)| = 3$ である。このとき、次の命題は明らかである。

命題 M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ に対して、
 各 i ($1 \leq i \leq n$) について、 $|(v_i)| \leq 3$ であるとしてよい。
 さらに、 (v_i) は $\pi_1(W)$ の元として $(v_i) = x_j^{\lambda} x_k^{\mu} x_l^{\nu}$
 ($j \neq k \neq l \neq j$, λ, μ, ν は $1, 0, -1$) である。

補題 1 M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が
 $|(v_i)| = 1$ なる v_i ($1 \leq i \leq n$) をもっているならば、
 M の単純な Heegaard 分解 $\{V', W', M\}$ で V' の
 $\text{genus} < V$ の genus であるものを作ることができる。

証明 $|(v_1)| = 1$ としておく。 $(v_1) = x_1$ と仮定してよい。
 W を $w_1, w_2, \dots, w_n$ で切り開いてできる球 B の表面には、
 $2n$ 個の円板 $w_1', w_1'', w_2', w_2'', \dots, w_n', w_n''$ がある。このとき、
 ∂v_1 は B の表面上で w_1' と w_1'' を $w_2', w_2'' \dots w_n', w_n''$ と交わらずに結ぶ弧となつてゐるから、 B から B への
 homeomorphism で w_1'' を動かして、 ∂v_1 を標準的な位置
 (図 3 参照) に移すことができる。このとき、他の ∂v_i
 ($i \neq 1$) と $w_1', w_1'', w_2', w_2'', \dots, w_n', w_n''$ の交点 (実は、
 ∂v_i をなす有限個の弧の端点) の位置は最終的には変化しな

い.



— ∂V_1 の弧

----- 他の ∂V_i の弧 (または, その一部)

図 3.

先に切り開いた所を貼り合せて W に戻すと, 元の ∂V_1 , $\partial V_2, \dots, \partial V_n$ は W の表面上の閉曲線の系 $u_1, u_2, \dots, u_n$, (u_i が ∂V_i の移されたもの) に移ったことになる.

各 u_i と w_j との交点 $u_i \cap w_j = v_i \cap w_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) であり, u_1 は X_1 と重なっていると考えるよりから,

$N(v_1, V)$ と W に貼ることにより, 新しい Heegaard 分解 $\{V', W', M\}$ と $V' = cl\{V - N(v_1, V)\}$, $W' = W \cup N(v_1, V)$ として得ることができ, V' の genus $< V$ の genus である.

注意 $u_i \cap w_j = v_i \cap w_j$ に注目すると $\pi_1(W)$ の元として, u_i の表す元 $(u_i) = (v_i)$ であり, $\pi_1(W')$ の元として,

V' の meridian 系 $(v_2, v_3, \dots, v_n)$ は $(v_i) = x_j^\lambda x_k^\mu x_l^\nu$
 $(j \neq k \neq l \neq j, \lambda, \mu, \nu \text{ は } 0, 1, -1 \text{ であり } x_i \text{ は } 1 \text{ と考える})$ の
 形で表される。

補題 2 M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が条件
 (a), (b), (c) を満たしているならば, M の単純な Heeg-
 -aard 分解 $\{V', W', M\}$ で条件 (d) を満たすものを作る
 ことができる。

$$(a) \quad n = g(V) = 3 \quad (b) \quad |(v_1)| = |(v_2)| = 2$$

$$(c) \quad (v_1), (v_2) \text{ に共通な元は唯一つ (それを } x_1 \text{ とする)},$$

$$(d) \quad \text{閉曲線 } v_1, v_2 \text{ は標準的な位置にある (図 4 参照)}$$

証明は 先の補題 1 と同様な手順でできる。例えば, (v_1)
 $= x_1 x_2 \quad (v_2) = x_2 x_3^{-1}$ の場合, W を w_1, w_2, w_3 で切り開い
 z を作り, まず v_1 を標準的な位置に動かす。その結果
 v_2 は新しく v_2' に動いてしまうが $v_1 \cap v_2 = \emptyset$ であり
 条件 (c) が満たされているから, 標準的な位置に動かされてあ
 る v_1 を固定したまま v_2' を標準的な位置に動かすことができる。
 一般に $n > 3$ の場合であっても, 条件 (c) をもう少し
 し精密に述べれば, $v_1, v_2, \dots, v_m$ ($m < n$) が同時に標準的な
 位置にあるような単純な Heegaard 分解を作りうる。

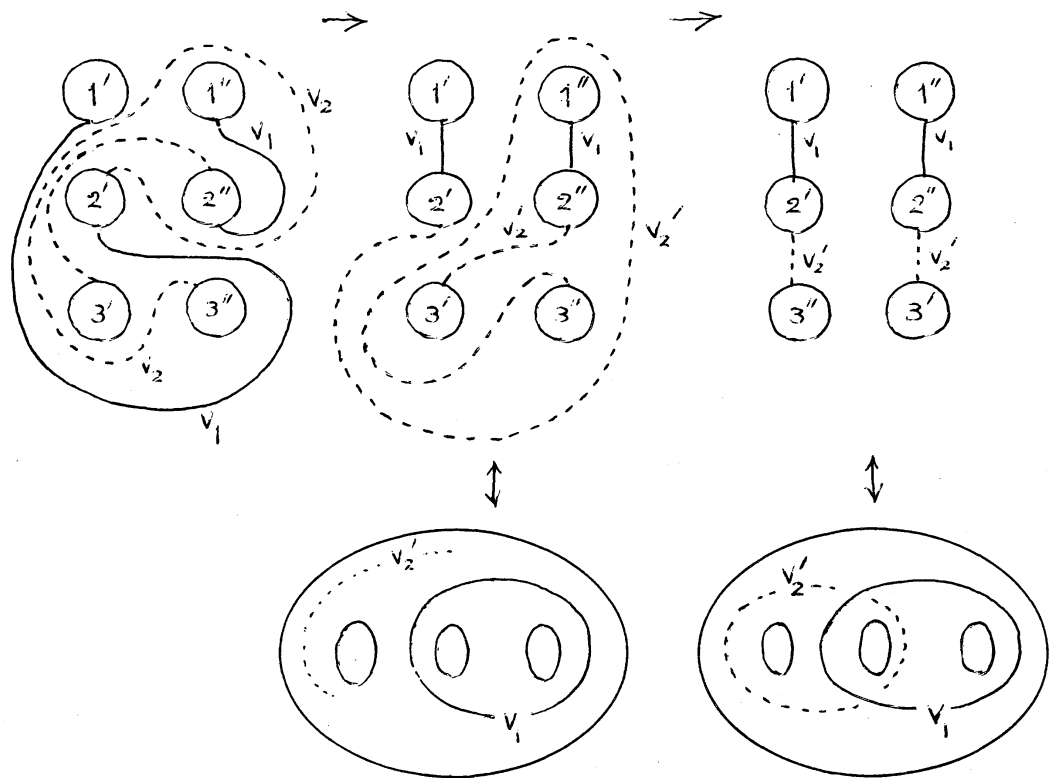


図 4

補題3 $\pi_1(M) = 1$ の多様体 M が genus 2 の単純な Heegaard 分解をもてば $M = S^3$ である。

$\pi_1(M) = (x_1, x_2 \mid (v_1) = 1, (v_2) = 1)$ であり, $(v_1), (v_2)$ は $x_1 x_2, x_1 x_2^{-1}, x_1, x_2$ のどれかであり, $\pi_1(M) = 1$ となるには, $|(v_i)| = 1$ となる v_i が存在することが判るから補題1により, genus 1 の Heegaard 分解をもつ多様体になり, $M = S^3$ であることが結論される。

定理 $\pi_1(M) = 1$ の多様体 M が genus 3 の単純な Heegaard 分解をもつば, $M = S^3$ である。

証明は次の各場合 (I), (II) の (i) ~ (iii) にわけて考える。

(I) $|(\nu_i)| = 1$ である ν_i が存在する場合, この場合は補題 1 により, genus 2 の場合に戻り, 補題 3 により $M = S^3$ である。

(II) $|(\nu_i)| > 1$ ($i = 1, 2, 3$) の場合, この場合,

$$\pi_1(M) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid (\nu_1)=1, (\nu_2)=1, (\nu_3)=1 \rangle$$

であり, $(\nu_1), (\nu_2), (\nu_3)$ は次の 14 個の語の中のどれかである。

$$x_1 x_2, x_1 x_2^{-1}, x_1 x_3, x_1 x_3^{-1}, x_2 x_3, x_2 x_3^{-1},$$

$$x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 x_3^{-1}, x_1 x_2^{-1} x_3, x_1 x_2^{-1} x_3^{-1}, x_1 x_3 x_2, x_1 x_3 x_2^{-1},$$

$$x_1 x_3^{-1} x_2, x_1 x_3^{-1} x_2^{-1} \quad (\text{以上 14 個})$$

(i) $|(\nu_i)| = 3$ ($i = 1, 2, 3$) の場合, $\pi_1(M) = 1$ とはなり
ない。

(ii) $|(\nu_i)| = 3$, ($i = 1, 2$), $|(\nu_3)| = 2$ の場合, も同じく
 $\pi_1(M) = 1$ とはなり ない。

(iii) $|(\nu_1)| = 3$, $|(\nu_i)| = 2$ ($i = 2, 3$) の場合, $\pi_1(M) = 1$ となる場合は ν_2, ν_3 について補題 2 を適用する =
とができる, $V' = \alpha(V - N(\nu_2 V) \cup N(\nu_3 V))$, $W' = W \cup$
 $N(\nu_2 V) \cup N(\nu_3 V)$ とし genus 1 の Heegaard 分解

$\{V', W', M\}$ が与えられる, その結果 $M = S^3$ である。

(iv) $|(V_i)| = 2$ ($i = 1, 2, 3$) の場合, $\pi_1(M) = 1$ とはなりえない。以上。

一般に, genus が高い場合でも 単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が $|(V_i)| \leq 2$ ($i = 1, 2, \dots, n, n = g(V)$) を満たしている場合は, $\pi_1(M) = 1$ ならば $M = S^3$ である。と次のようにして判る。すなわち, $|(V_i)| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ならば $X_j \rightarrow (12)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) によって $\pi_1(M) \rightarrow S_2$ が onto-map となり $\pi_1(M) \neq 1$ であるから, 少なくとも一つ $|(V_i)| = 1$ となる V_i が存在し, 補題 1 を用いて, 逐次 Heegaard 分解の genus を下げて行くことができる。

WALDHAUSEN, F. : Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre,

Topology 7 (1968), 195-203