

集積値問題とファイバー環

大同工業大学 成田淳一郎

(Junichiro Narita)

1. 準備と目標

平面領域 D の $H^{\infty}(D)$ の極大イデアル空間を $\mathcal{M}(D)$, シロフ境界を $\mathbb{M}(D)$ で表す。 $\mathcal{M}(D)$ の $\zeta \in \partial D$ 上のファイバーを $\mathcal{M}_{\zeta}(D)$ (D が有界領域のときは座標関数 $z \in H^{\infty}(D)$ により $\mathcal{M}_{\zeta}(D) = \hat{z}^{-1}(\zeta)$ と表される), ファイバー環を $A_{\zeta}(D) = \hat{H}^{\infty}(D)|_{\mathcal{M}_{\zeta}(D)}$, そのシロフ境界を $\mathbb{M}_{\zeta}(D)$ と表す。 ζ が D の本質境界点 (essential boundary point, その点のある近傍にすべての $H^{\infty}(D)$ の元が有界正則に拡張されるのでない) であれば $\mathbb{M}_{\zeta}(D) = \mathbb{M}(D) \cap \mathcal{M}_{\zeta}(D)$ である。

$\pi: \Delta \rightarrow D$ を普遍被覆写像とすると π は $\mathcal{M}(\Delta)$ から $\mathcal{M}(D)$ への連続写像に拡張出来, 拡張した写像も π で表すことにする。原点 $0 \in \mathcal{M}(\Delta)$ に対する $\mathbb{M}(\Delta)$ 上の一意的な表現測度を ν_0 とすると, その π による像測度 $\lambda_{z_0} = \pi^*(\nu_0)$ ($z_0 = \pi(0)$) は z_0 に対し π の取り方によらず定まり, これを z_0 に対する $\mathcal{M}(D)$

上の調和測度と呼ぶ。 $\text{supp } \lambda_z$ は $z \in D$ によらないので、これを単に $\text{supp } \lambda$ と表す。任意の $f \in H^\infty(D)$ に対し $f(z) = \int_{M(D)} \hat{f} d\lambda_z$ が成り立ち、これから $\text{supp } \lambda \supset \Omega(D)$ が従う。(cf. [3] Chapter 7, [4])

$f \in H^\infty(D)$ の z の集積値集合 $\mathcal{C}(f, z)$, $\text{range } R(f, z)$ を

$$\mathcal{C}(f, z) = \{w \in \mathbb{C} ; \exists z_n \in D \text{ s.t. } z_n \rightarrow z, f(z_n) \rightarrow w\}$$

$$R(f, z) = \{w \in \mathbb{C} ; \exists z_n \in D \text{ s.t. } z_n \rightarrow z, f(z_n) = w\}$$

と置く。集積値定理 ([2]) により $\mathcal{C}(f, z) = f(M_z)$ 。また $S \subset \partial D$ に対し

$$\mathcal{C}_S(f, z) = \{w \in \mathbb{C} ; \exists \zeta_n \in S, \exists w_n \in \mathcal{C}(f, \zeta_n) \text{ s.t. } \zeta_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w\}$$

と置く。M. Tsuji は次のことを示した ([8] Th VIII.41)

「 $E \subset \partial D$ の対数容量が 0 で $\zeta \in E$ のとき集合

$$(*) \quad \mathcal{C}(f, \zeta) \setminus [\mathcal{C}_{\partial D \setminus E}(f, \zeta) \cup R(f, \zeta)]$$

は対数容量 0 である。」

また A.J. Lohwater [6] は $D = \Delta = \{ |z| < 1 \}$, $E \subset \partial D$ の長さ 0 のときにも、 $\zeta \in E$ に対し集合 (*) の対数容量が 0 であることを示した。これらの結果の関数環からのアプローチとして、T.W. Gamelin [5] が次の 2 つの定理を示している。

定理 A $\forall \zeta \in \partial D, \forall f \in H^\infty(D)$ に対し

$$\hat{f}(M_\zeta) \setminus [\hat{f}(\Omega_\zeta) \cup R(f, \zeta)] \text{ は解析容量 0 である。}$$

定理 B $\forall \zeta \in \partial D, \forall f \in H^\infty(D)$ に対し

$\hat{f}(M_\zeta) \setminus [\hat{f}(M_\zeta \cap \text{supp } \lambda) \cup R(f, \zeta)]$ は対数容量 0 である。

Gamelin はこの定理 A が, 結論をこれ以上小さな集合で置き換えられぬという意味で strict なことを示す例をあげているが, ここではそれをやや拡張した次の形で示したい。

定理 1 任意の, 境界が本質境界点ばかりからなる有界領域 D 内の, 解析容量 0 の相対閉部分集合 S に対し, 定理 A の集合が S に一致する場合がある。

$\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ のときには $M_\zeta(\Delta) = M_\zeta(\Delta) \cap \text{supp } \lambda$ であるから定理 A の集合は定理 B の集合と一致し, 対数容量 0 になる。Gamelin は D の全ての境界が本質境界点のときには定理 A が strict かどうか, 特に対数容量 0 に変えられぬかという問題を出しているが, 例えば次のような場合にも対数容量 0 に出ることがわかった。 $\Delta_0 = \{0 < |z| < 1\}$ から原点にのみ集積する互いに交わらぬ Δ_0 内の閉円板列を除いて得られる領域を Δ 領域と呼ぶ。

定理 2 D が境界の長さが有限な Δ 領域のときには

$\hat{f}(M_\zeta) \setminus [\hat{f}(M_\zeta) \cup R(f, \zeta)]$ は対数容量 0 である。

2. 定理1の証明

有界領域 D の形式的に可算無限個の disjoint union を $D \times \mathbb{N}$ で表し, この上の有界正則関数の全体を $H^{\infty}(D \times \mathbb{N})$, その極大イデアル空間を $\mathcal{M}(D \times \mathbb{N})$ で表す. 各 $D \times \{n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) で D の座標を値として持つ関数を $Z \in H^{\infty}(D \times \mathbb{N})$ で表す.

1つの複素平面に含まれる, 各 D_n が D と相似で互いに交わらない可算無限個の領域の列 $\{D_n\}$ が, どの D_n の閉包にも含まれない1点 a にのみ集積しているとき, $H^{\infty}(D \times \mathbb{N})$ は $H^{\infty}(UD_n)$ と同型で, よって $\mathcal{M}(D \times \mathbb{N})$ も $\mathcal{M}(UD_n)$ と同相である. 以下この同一視により, $\mathcal{M}(UD_n)$ に関する記号 $\mathcal{M}_a(UD_n)$, $\mathcal{M}_a(UD_n)$ 等も用いるが, これらは $\mathcal{M}(D \times \mathbb{N})$ の部分集合としては $\{D_n\}$, a の取り方によらない. なお Z は UD_n 全体の座標関数とはもちろん異なる. a は UD_n の本質境界点なので $\mathcal{M}_a(UD_n) = \mathcal{M}_a(UD_n) \cap \mathcal{M}(UD_n)$.

補題1 D の全ての境界点为本質境界点のとき

$$\widehat{Z}(\mathcal{M}_a(UD_n)) = \partial D$$

(証明) 正則関数に対する最大値の原理により $\mathcal{M}(UD_n)$ は

$$\overline{\mathcal{M}(UD_n) \setminus [(UD_n) \cup \mathcal{M}_a(UD_n)]}$$

に含まれ,

$$\widehat{Z}(\mathcal{M}(UD_n) \setminus [(UD_n) \cup \mathcal{M}_a(UD_n)]) = \partial D$$

より $\widehat{Z}(\mathcal{M}(UD_n)) \subset \partial D$.

また各 $\zeta \in \partial D$ は D の本質境界点なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $h \in H^\infty(D)$ を, $\|h\|_\infty = 1$, h は $\{z \in \mathbb{C}; |z - \zeta| > \varepsilon\}$ に正則に拡張出来てそこで $|h| < 1$ をみたすように取れる (cf.

[3] Th 3.1 の証明). $H^\infty(D \times \mathbb{N})$ の各 $D \times \{n\}$ で h に等しい関数を H とすると, [7] の Lemma より任意の $\eta \in \bar{D}$ に対して

$\hat{H}(\hat{Z}^{-1}(\{\eta\})) = \{h(\eta)\}$ となるから $|H|$ を考えて, シロフ境界 $\partial(\cup D_n)$ は $\hat{Z}^{-1}(\{z; |z - \zeta| \leq \varepsilon\})$ と交わることがわかる.

$\varepsilon > 0$ は任意であるから $\hat{Z}^{-1}(\{\zeta\})$ とも交わる. (証明終)

$\Delta_0 = \{0 < |z| < 1\}$ 内の閉集合列 $\{E_n\}$ を

- ・ 各 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_n$ は D に等角同値で, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_n$ 内の原点 0 が D の 1 点 p に対応している.

- ・ Δ_0 に含まれる円板列 $\Delta_n = \{|z - c_n| < r_n\}$, $W_n = \{|z - c_n| < s_n\}$ で, $E_n \subset \Delta_n \subset W_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\{W_n\}$ は互いに交わらない, $c_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{s_n} < \infty$ をみたすものが取れる.

の各条件をみたすように取る. このとき Behrens [1] の一連の定理により, $V = \Delta_0 \setminus \cup E_n$ とおくとファイバー $\mathcal{M}_0(V)$ は

$\mathcal{M}_0(\cup D_n)$ から $\hat{Z}^{-1}(p)$ を 1 点に同一視して得られる商空間と同相であり, ファイバー内のシロフ境界も一致する. また,

各 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_n$ で D との等角同値により D の座標関数 $z \in H^\infty(D)$ に対応する関数を $f_n(z) \in H^\infty(\hat{\mathbb{C}} \setminus E_n)$ とするとき

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(z) - p) + p \in H^{\infty}(V)$$

であり, この関数が $\mathcal{M}_0(V)$ 上取る値は上の同一理により, $\hat{Z}$ が $\mathcal{M}_0(UD_n)$ (の商空間) 上取る値と一致している. よ, て補題 1 から $\hat{f}(\mathcal{M}_0(V)) = \partial D$ である.

補題 2 $R(f, 0) = D$.

これは上の条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{s_n} < \infty$ から Rouché の定理等用いて, 初等的に示せる. 詳細は省略する.

さて, $U = V \setminus f^{-1}(S)$ とおくと $f^{-1}(S)$ も解析容量 0 であり U 上の有界正則関数は全て V 上の有界正則関数に拡張される. 従って $H^{\infty}(U) \cong H^{\infty}(V)$, $\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(V)$ であり,

$$\hat{f}(\mathcal{M}_0(U) \setminus [\hat{f}(\mathcal{M}_0(V)) \cup R(f, 0, U)]) = S$$

となる.

3. 定理 2 の証明

$\mathcal{M}_z(D)$, $\mathcal{M}_z(D) \cap \text{supp } \lambda$ は共に D の z の近傍での形にのみ依存して定まるので ([2], [5]), z が原点以外の場合は $\mathcal{M}_z(D) = \mathcal{M}_z(D) \cap \text{supp } \lambda$ となり定理 B により成り立つ. さらに原点でも $\mathcal{M}_0(D)$, $\mathcal{M}_0(D) \cap \text{supp } \lambda$ がそれぞれ $\mathcal{M}(D) \setminus \mathcal{M}_0(D)$, $\text{supp } \lambda \setminus \mathcal{M}_0(D)$ の閉包と $\mathcal{M}_0(U)$ の共通部分であることと言えば, 原点でも $\mathcal{M}_0(D) = \mathcal{M}_0(D) \cap \text{supp } \lambda$ となり定理が成り立つ. $\text{supp } \lambda$ については λ_{z_0} ($z_0 \in D$) の $\hat{z}$ (z は座標関数) に

よる像測度が Σ に対する ∂D 上の普通の調和測度と一致することから $\lambda(M_0(D)) = 0$. よって $M_0(D) \cap \text{supp } \lambda$ は $\text{supp } \lambda$ の相対位相で内点を持たない。また $\mathcal{M}(D)$ に関しては,
 $f \in H^\infty(D)$ の非接境界関数を考えることにより $H^\infty(D) \subset L^\infty(\partial D)$ とみることができる。また $\mathcal{M}(D)$ が $L^\infty(\partial D)$ の極大イデアル空間に一致する ([9] §4) ことからわかる。

References

- [1] M. Behrens, The maximal ideal space of algebras of bounded analytic functions on infinitely connected domains, Trans. A.M.S., 161 (1971), 358-380.
- [2] T.W. Gamelin, Localization of the corona problem, Pacific J. Math., 34 (1970), 73-81.
- [3] _____, Lectures on $H^\infty(D)$, Univ. Nacional de la Plata, Argentine, 1972.
- [4] _____, Iversen's theorem and fiber algebras, Pacific J. Math., 46 (1973), 389-414.
- [5] _____, Cluster values of bounded analytic functions, Trans. A.M.S., 225 (1977), 295-306.
- [6] A.J. Lohwater, On the theorem of Gross and Iversen, J. Analyse Math., 7 (1959-1960), 209-221.

- [7] J. Narita, A remark on the corona problem for plane domains,
J. Math. Kyoto Univ., 25 (1985), 293 - 298.
- [8] M. Tsuji, Potential theory in modern function theory, Maruzen,
Tokyo, 1959.
- [9] L. Zalcman, Bounded analytic functions on domains of infinite
connectivity, Trans. A.M.S., 144 (1969), 241 - 270.