

Steiner system と association-scheme

慶応大学 芳沢 光雄

代数的組合せ論の基本的概念である association-scheme をみたす Steiner system について得られたいくつかの結果を述べる。

定義 association-scheme

X : finite set, $R_i (i=0, \dots, d) \subset X \times X$ が次の条件をみたすとき、 X と $\{R_0, \dots, R_d\}$ の組を d -class の association-scheme とする。

$$(i) \exists I; R_I = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

$$(ii) X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d$$

$$(iii) R_i = {}^t R_i := \{(y, x) \mid (x, y) \in R_i\} \quad (i=0, \dots, d)$$

(iv) $i, j, h \in \{0, \dots, d\}$ を任意に fix したとき、

$$|\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (y, z) \in R_j\}| \text{ は } (x, y) \in R_h \text{ のもとで、}$$

$$x, y \text{ のとり方によらず一定 } (= \mu(i, j, h)).$$

association-scheme の例については、[1] を参照。

定義 Steiner system

Ω : finite set, $|\Omega| = v$, $B \subset \Omega^{(k)}$, $1 < k < v$ のとき、

$(\Omega, \mathcal{B})$ が Steiner system $S(t, k, v)$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Omega$ に対し、 $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ を含む $\mathcal{B}$ の元がただ一つある。

Ω の元を point, $\mathcal{B}$ の元を block という。

Steiner system の例については [6], [7] 等を参照。

association-scheme をみたす Steiner system は、association-scheme の導入の仕方によって色々と変わるのであるが (see [4])、ここでは最も一般的な次の方法をとることにする。

定義 $S(t, k, v)$ が block-schematic

$\Leftrightarrow X = \mathcal{B}$, $x, y \in X$ に対し $(x, y) \in R_i \leftrightarrow |x \cap y| = i$ ($i = 0, \dots, k$) と約束するとき、 $X, \{R_0, \dots, R_k\}$ が association-scheme をなす。

尚、現在までに知られている block-schematic Steiner system は、次のものである。

$$S(2, k, v), S(3, 4, 8), S(3, n+1, n^2+1) \ (n: \text{even}),$$

$$S(3, 6, 22), S(4, 7, 23), S(5, 8, 24), S(4, 5, 11), S(5, 6, 12).$$

$S(2, k, v)$ が block-schematic であることは [3] で示されていることに注意する。その他のものは自己同型群 (後列の場合はマシュー群) などと考えれば block-schematic であることが分る。

さて一般的な研究方法として、次のようなことを考える。

$S(t, k, v)$ に対して、 $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_{\lambda_0}\}$ としたとき、 $\lambda_0 \times \lambda_0$ 行列 A_h ($0 \leq h \leq k$) (h -adjacency matrix) を次のように定める。

$$A_h(i, j) = 1 \text{ if } |B_i \cap B_j| = h, 0 \text{ otherwise.}$$

$S(t, t_2, v)$ が block-schematic ならば、 $A_i A_j = \sum_{k=0}^{t_2} \mu(i, j, k) A_k$
 $(0 \leq i, j \leq t_2)$ である。

ある fix した block と i 点で交わる blocks 数を λ_i とするとき、 λ -次ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ は λ_i に對する A_i の固有ベクトルである。

$\alpha, \beta \in \Omega$ に対して、 λ -次ベクトル a_α を $a_\alpha(i) = 1$ 若 $\alpha \in B_i$,
 $= 0$ 若 $\alpha \notin B_i$, λ -次ベクトル a_β も同様に定めれば、 $a_\alpha - a_\beta$ も A_i
 の固有ベクトルになり ($i=0, \dots, t_2$)、対応する固有値を d_i とす
 れば、 $\sum_{k=0}^{t-1} \binom{t_2}{k} d_k + \binom{t_2}{t} = \binom{t_2-1}{t-1} (\lambda_t - \lambda_{t+1})$ ($t=0, \dots, t-1$) が成り立つ。

以上のことから blocks に関する整数条件 (see [7]) などを使
 って以下の結果を得た。ここで次の Th.1 に関しては、より
 一般的な形まで $(t-(v, t_2, \lambda) \text{ design})$ 拡張されている (see [8])。

Th.1 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $t_2 - t = n$ となる block-schematic $S(t, t_2, v)$
 $(t \geq 3)$ は有限個。

Th.2 [5] $S(t, t+1, v)$ が block-schematic

$\Leftrightarrow$ (i) $t=2$, (ii) $t=3, v=8$, (iii) $t=4, v=11$ or (iv) $t=5, v=12$.

Th.3 [5] $S(t, t+2, v)$ が block-schematic

$\Rightarrow$ (i) $t=2$, (ii) $t=3, v=17$ or (iii) $t=34$ or 8 , $v=t+23$.

Th.4 [5] $S(t, t+3, v)$ が block-schematic

$\Rightarrow$ (i) $t=2$, (ii) $t=3, 4, 5, v=t+19$ or (iii) $t=6$ or $8, v=t+39$.

尚、Th.2, 3, 4 を得るにあたっては計算機を使用しており、
 $t_2 - t$ の値が増えるに従って、計算時間は急速に増えた。
 (最後の整数条件まで)

ここで $\mathcal{Th} 2$ は必要十分条件の形で示されているが、 $\mathcal{Th} 3, 4$ については必要条件の形で示されている。これは ϵ が小さいところでは、intersection matrices ($\mu(1, 0, k)$ から成る行列) が矛盾なく求められ、又、 ϵ が大きくなると、intersection matrices も計算機を使っても求められそうにないことからである。(勿論、 $\mathcal{Th} 3, 4$ の (ii) についての話である。)

さて最後に、 $\mathcal{Th} 1$ の証明の idea を使って次の $\mathcal{Th}$ を得た。

$\mathcal{Th} 5 [10]$ 次のような条件を満たす distance-regular graph Γ はない。
 $\left\{ \begin{array}{l} l_2 < l_d \text{ であり、次の (i), (ii), (iii) のどれかを満たす。} \\ \text{(i) } d: \text{odd, } q \geq d \geq 7 \\ \text{(ii) } d: \text{odd, } q \geq d-1 \geq 28 \\ \text{(iii) } d: \text{even, } q \geq d \geq 28. \end{array} \right.$

記号等については [2] を参照。又、この $\mathcal{Th} 5$ の条件をもう少し変えるといくつか例があることを述べておく。

例：正十二面体の点と辺についてのグラフは、

$$l_2 = 3, d = 5, l_d = 1, q = 5.$$

参考文献

- [1] 坂内英一：代数的組合せ論，数学 31 (1979) 126-143.
- [2] N. Biggs : Algebraic graph theory, Camb. Univ. Press (1974).
- [3] R. Bose : Strongly regular graphs, partial geometries, and partially balanced designs, Pacific J. Math. 13 (1963) 389-419.

- [4] P. Cameron : Two remarks on Steiner systems, *Geometriae Dedicata*
4 (1975) 403-418.
- [5] H. Enomoto and M. Yoshizawa : On block-schematic Steiner systems
 $S(t, t+2, v)$ and $S(t, t+3, v)$ (to appear)
- [6] C. Lindner and A. Rosa : *Topics on Steiner systems*, North-Holland (1980)
- [7] 永尾 汎 : 群とデザイン, 岩波 (1974).
- [8] M. Yoshizawa : Block intersection numbers of block-designs,
(to appear in *Osaka J. Math.*)
- [9] : : : On block-schematic Steiner systems $S(t, t+1, v)$.
- [10] : : : On some distance regular graphs, (to appear in *Disc. Math.*)