

Linear Stability of Fluid Flows and its Applications

By

SHINICHIRO YANASE *, TAKESHI WATANABE**

Abstract

First, mathematical formulation of linear stability analysis in fluid mechanics is given. Next, several examples in which the linear stability analysis was successfully applied are presented. Then, bifurcation diagrams are shown, and the basic equations by which fluid motions are calculated for specific boundary conditions are explained. Finally, numerical methods to obtain *quasi-analytic solutions* in high accuracy are addressed, on which the perturbation is superimposed and thus the linear stability analysis can be applied, in the case that an exact solution is difficult to obtain.

§ 1. 序章

線形安定性理論は、流体力学において古くから解の時間発展を調べるために用いられている数学的手段で、多くの流れに適用され大きな成功を得ている。流体力学における線形安定性理論のアイデアは以下の3項目である。

1. ある主流を考え、それに微小な (厳密には無限小) 攪乱を加えてその時間発展を調べる
2. 主流は、問題に応じて適当な解を与える必要がある
3. 興味の対象は、主流を求めることではなく、攪乱の変化の方にある

ここでいう主流とは、Hagen-Poiseuille 流の解のような厳密解であってもいいし、Blasius 境界層のような近似解であってもよい。また、レイノルズ応力項を含めて考えれば乱流の平均流でも良いが、その場合は、暗黙にレイノルズ応力項を仮定していることになる点に注意を要する。さらに、気象学でしばしば用いられる適当な形を持つ流れでもよ

Received October 6, 2014. Accepted May 7, 2015.

2010 Mathematics Subject Classification(s):

Key Words: 流体力学, 線形安定性, 解の分岐, 準解析解, *Newton-Krylov* 法.

Supported by JAPAN SUPPORT

*岡山大学自然科学研究科, 岡山, 700-8530, Japan.

e-mail: yanase@mech.okayama-u.ac.jp

**JAXA/ISAS, 神奈川, 252-5210, Japan.

e-mail: tora3@kpb.biglobe.ne.jp

い. ともかく, 興味の対象は, 攪乱がどのように時間的发展をするかにある. それに関連して, 乱流の秩序構造では, 線形不安定モードの空間パターンが高いレイノルズ数まで明瞭に残っている例が, しばしば報告されている. それゆえ, 線形安定性解析は乱流研究においても非常に重要である.

§ 2. 線形安定性理論の数学的骨格

次のような n 次元力学系を考える. 実際は, この力学系は流体方程式の変数を関数展開し, 適当に打ち切ることによって得られる.

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

ここで $\mathbf{x}$ は n 次元ベクトル関数である. 定常解 (序章で述べた主流) $\mathbf{x}_0$ は,

$$(2.2) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

の解である. $\mathbf{x}_0$ に微少攪乱 $\mathbf{x}'$ を加え, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'$ とする. 一般的に $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}_0|$ であるが, 攪乱の大きさがある程度大きくても, 微小攪乱として取り扱いが可能な場合も多い. 次に, t を時間, $\mathbf{A}$ を n 次元ベクトルとして

$$(2.3) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}e^{\sigma t}$$

とおく. $\mathbf{A}$ は固有ベクトル, σ は固有値と呼ばれる. $\mathbf{A}$, σ は固有方程式

$$(2.4) \quad \sigma \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{A}$$

を解くことによって求められる. すると解 $\mathbf{x}$ は

$$(2.5) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}e^{\sigma t}$$

で与えられる. たとえ定常解 (主流) として近似解 $\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}$ しか求まらない場合でも, 固有値・固有ベクトルは以下の方程式

$$(2.6) \quad \sigma \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) \mathbf{A}$$

を解くことによって, 近似的に求められる. この固有方程式から得られる解は

$$(2.7) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x} + \mathbf{A}e^{\sigma t}$$

となる. このとき, $\mathbf{A}$, σ には $O(|\delta \mathbf{x}|)$ 程度の誤差が含まれるが, 線形安定性理論においては, このようにして計算が実行される場合が多い.

上で述べたように, 流れに対する理解を拡張するために, 厳密解が求められない流れに対して, 線形安定性解析を適用する場合が多い. その場合は, 元々の流体方程式に

適当な外力等を加えて、厳密解として取り扱うことも可能である。また乱流では、レイノルズ応力項を暗黙に導入していることによる不確定性が当然含まれる。

参考文献 [1], Fig.1 に、線形安定性理論による解の拡張を示す。最も内側の小円は厳密解、その外側の円は摂動等による近似解、星形は線形・非線形安定性によって求められた非定常解である。さらにその外側の円は、後に示す準解析解 (または秩序解、骨格解とも呼ぶ) で、これによって流体方程式 (Navier-Stokes 方程式, NS 方程式) の解が矢印のように大きく拡張される。またそれらの線形安定性も調べられている。なお、最も外側の長方形は、NS 方程式のすべての解の集合を模式的に示している。

§ 3. 線形安定性理論の具体例

§ 3.1. Kármán 渦列

Kármán 渦列は、非常によく知られた流れであり、円柱状の渦が交互に並ぶことが知られている。これに対して非常に簡単化した主流を仮定する。この流れは円柱付近ではなく、かなり下流における後流の 2 次元速度分布と考える。なお、これは近似解である点に注意しなければならない。

$$(3.1) \quad u = U - U \exp \left\{ - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right\}$$

ここで u は流れ方向 (x 方向) の流速, U は無限遠方での流速, y は x と垂直な座標, L は後流の幅のスケールを表すとする。これを主流とする。Reynolds 数 $Re = UL/\nu$ で, ν は動粘性係数である。主流に x 方向に波数 α を持つ 2 次元攪乱を加える。

$$(3.2) \quad \text{攪乱} \propto e^{i(\alpha x - \omega t)}$$

線形安定性計算の結果、攪乱の大きさを約 10% とすると、ある程度大きな Reynolds 数で、渦列間の縦横比が 0.45 (実験では、物体付近で約 0.15, 遠くで約 0.5, Kármán の渦点の理論では 0.28) なので、実験で観測された遠方場の流れに近い解が得られる。参考文献 [2], 図 12.11(b) に、流れが定常な座標系における流線が示されている。

§ 3.2. 回転シア一流の線形安定性

流体系 (システム) が角速度 Ω で一様回転するとする。このとき、流体系は、図 1 に示すように、Cyclonic と Anti-cyclonic のどちらかの回転系となる。線形安定性計算を行うと、Cyclonic 渦 (Cyclonic 系の渦) は非常に安定で、ほぼ完全に 2 次元的な円柱状渦が発達することがわかる。一方、Anti-cyclonic 渦 (Anti-cyclonic 系の渦) は、系の回転速度があまり大きくない場合、極めて 3 次元的に不安定で、円柱状渦の構造が破壊され、乱流化することが示されている (参考文献 [3])。

参考文献 [4], Figs.4(a)-(e) に、回転シア一流の線形安定性計算に対応する直接数値計算の結果が示されている。各図は ω^2 の等値面を示し、Kelvin-Helmholtz 不安定から

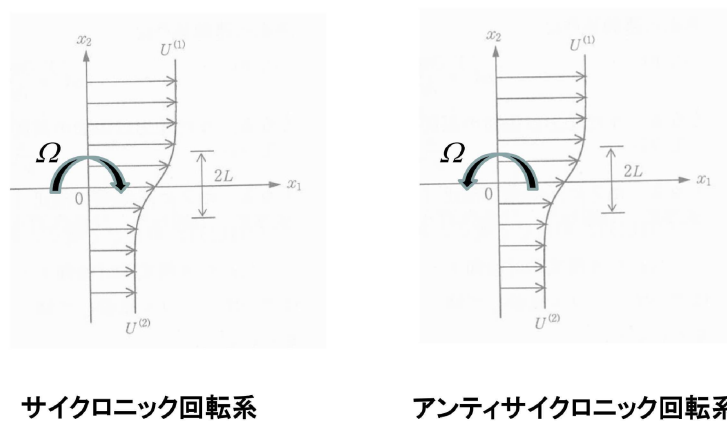


Figure 1. Cyclonic 系と Anti-cyclonic 系.

成長したロール状渦の、十分発達した状態を示す．ここで、Rossby 数 $Ro = U_0/(2\Omega\delta)$ で、 U_0 は無限遠方でのシアーの速度、 Ω は系の回転速度、 δ はシアーの変化領域の幅の $1/2$ である．Fig.4(b) の Cyclonic 渦は、系が回転しない場合よりもより 2 次元的な構造となり、Figs.4(c), (d) の Anti-cyclonic 渦は、特に $Ro = 5$ で強い 3 次元化が発生していることが分かる．

§ 4. 解の分岐パターン

解の典型的な分岐パターンとしては，図 2-図 5 に示すようなものがある．これらは，定常解または周期解であるが，それぞれの解に対して線形安定性を調べることができ，安定なら安定解，不安定なら不安定解と呼ばれる．

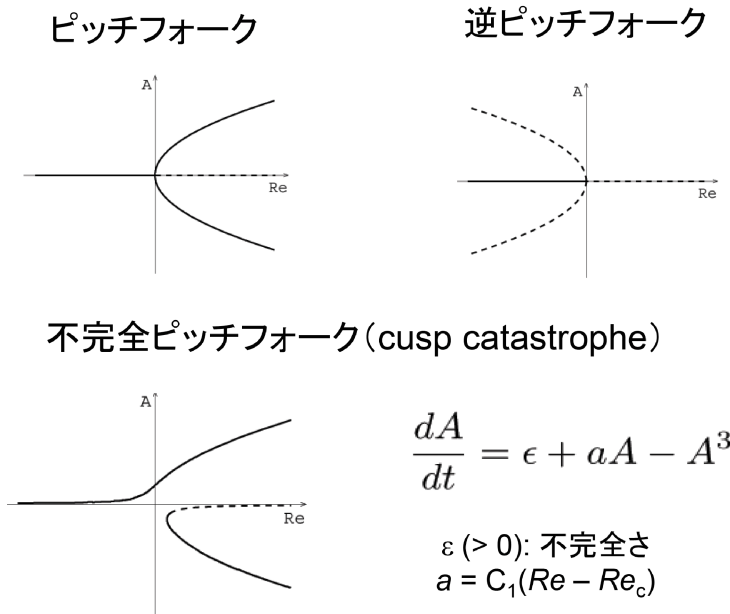


Figure 2. Pitchfork 分岐.

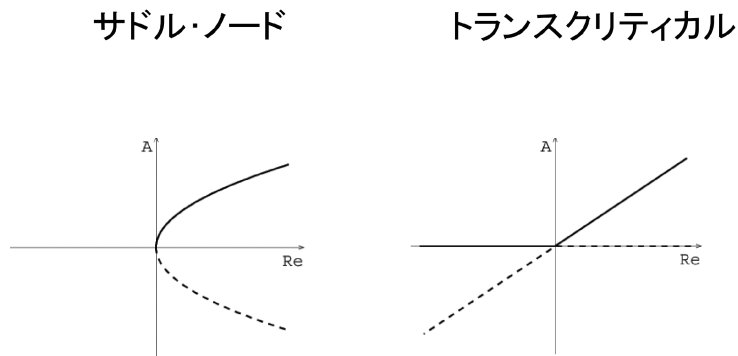


Figure 3. Saddle-node と Transcritical.

ここで，安定・不安定解の役割について述べる．安定解は実現されるが，不安定解は

- (1) 他に安定解があれば離れる
- (2) 他に安定解がない場合
 - a) 安定多様体の方向から近づき不安定多様体方向から離れる

サドル・ノードと、トランスクリティカル

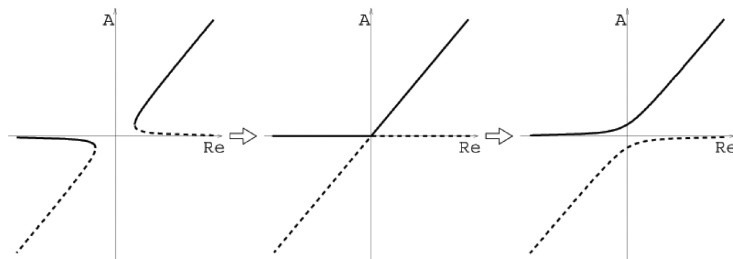


Figure 4. Saddle-node から Transcritical への変化.

周期軌道 (安定な)

固定点 (安定な)



Figure 5. Hopf 分岐.

b) 一種のアトラクターとなる
等の事実が知られている.

§ 5. 準解析解

準解析解とは、流体方程式の従属変数 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ を、 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ をそれぞれ, x , y , z 方向の単位ベクトルとして、関数展開

$$(5.1) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^M (v_i(t)\mathbf{i} + v_{i+M}(t)\mathbf{j} + v_{i+2M}(t)\mathbf{k}) \psi_i(\mathbf{x})$$

によって $N(= 2M)$ 個のスカラー関数 $v_i(t)$ ($1 \leq i \leq 2M$) に置き換える. なお, $v_i(t)$ ($2M+1 \leq i \leq 3M$) は非圧縮条件

$$(5.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

により, $v_i(t)$ ($1 \leq i \leq 2M$) で表されると考える. $\mathbf{v}(t) = {}^t(v_1(t), \dots, v_N(t))$ の従う力学系

$$(5.3) \quad \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t), t, Re)$$

に変換した方程式の, 数値的に可能な限り精度の高い解である. ここで Re は Reynolds 数である. 関数展開の性質により, いくらでも精度の高い解が得られるため, これを準解析解と呼ぶことにする. 準解析解にはいくつかの種類があり, 実空間 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ で表すと以下のようなになる. もちろん, これ以外の種類の準解析解が存在する可能性があることを指摘しておく.

(1) 定常解 (第 6 章では式 (6.4))

$$(5.4) \quad \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}(x, y, z, t), \quad t : \text{任意}$$

(2) 進行波解 (第 6 章では式 (6.5))

$$(5.5) \quad \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}(x + ct, y, z, t), \quad t : \text{任意}, c : \text{位相速度}$$

(3) 周期解 (第 6 章では式 (6.6))

$$(5.6) \quad \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}(x, y, z, nT), \quad n : \text{整数}, T : \text{周期}$$

(4) 周期進行波解 (第 6 章では式 (6.7))

$$(5.7) \quad \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}(x + ncT, y, z, nT), \quad n : \text{整数}, c : \text{群速度}, T : \text{周期}$$

周期進行波解では, 進行波解が周期的に変化する.

等がある. また, 具体的に準解析解を求める方法には, 反復法, Newton-Raphson 法, Poincaré 断面法, Newton-Krylov 法等がある.

次に, 流体方程式を取り扱いやすい形に変形する方法を説明する.

(1) 2 次元流

流れ関数を使えば, 流れ関数に対する一つの方程式に変換できる

(2) 平板間流

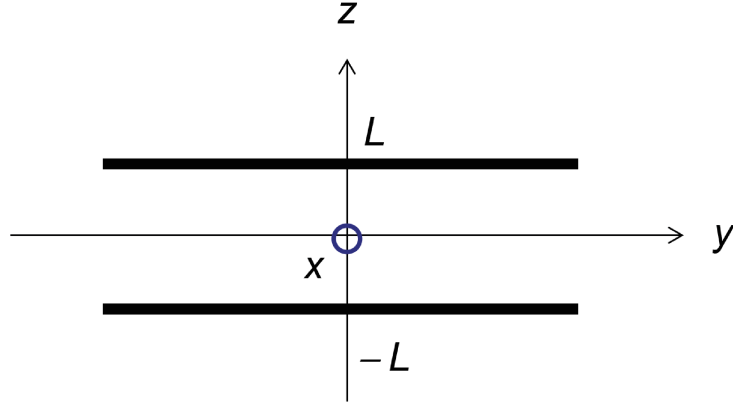


Figure 6. 平板間流.

$\mathbf{u} = (u, v, w)$, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ に対する基礎方程式は、以下のようになる.

$$(5.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta v = \Delta H_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \nu \Delta^2 v$$

$$(5.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \omega_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

ここで

$$(5.10) \quad H_x = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)u, \quad H_y = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)v, \quad H_z = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)w$$

である. 境界条件は

$$(5.11) \quad v(x, y \pm L) = \frac{\partial}{\partial z} v(x, y \pm L) = 0, \quad \omega_y(x, y, \pm L) = 0$$

である.

(3) 円柱周りの流れ

図 7 のようになる.

速度場が円柱上 ($r = a$) においてゼロとなることから、以下のような条件が得られる. 半径 r 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$, 周 θ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ とする. このとき

$$\nabla \times (\mathbf{k}\Psi) = \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

また

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{k}\Phi)) &= \nabla \times \left(\mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\ &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \right) \Phi - \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi \end{aligned}$$

速度場の分解

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\Psi \mathbf{k}) + \nabla \times (\nabla \times (\Phi \mathbf{k}))$$

$$\Delta_{r, \theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta = \Delta_{r, \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

基礎方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{r, \theta} \Psi = \nu \Delta_{r, \theta} \Psi - \mathbf{k} \cdot [\nabla \times \{\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})\}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{r, \theta} \Phi = \nu \Delta^2 \Delta_{r, \theta} \Phi - \mathbf{k} \cdot (\nabla \times [\nabla \times \{\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})\}])$$

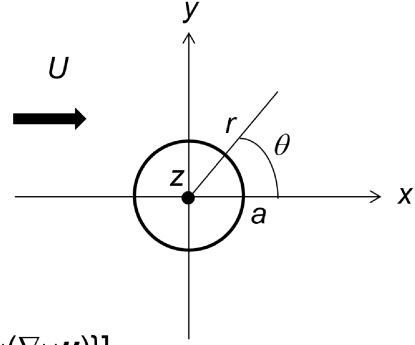


Figure 7. 円柱周りの流れ.

となる. したがって, $r = a$ における境界条件は

$$(5.12) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \right) \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi = 0$$

である.

(4) 球周りの流れ

Poloidal-Toroidal 分解を用いると, 図 8, 図 9 のようになる. ここでは, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ である. なお, x 軸に関して対称な流れでは, 図 8 に示したような境界条件が得られている.

(5) 矩形管内の周期流

管軸方向に周期条件を課した, 矩形管内流の定式化は, 図 10 に示すようになる. 圧力を求める際に, 注意が必要である (参考文献 [5]).

速度場の分解

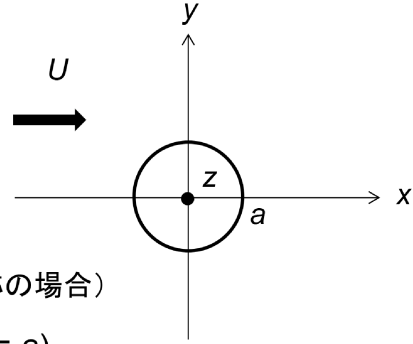
$$\mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times (P\mathbf{r})) + \nabla \times (T\mathbf{r})$$

$$\mathbf{u}_P = \nabla \times (\nabla \times (P\mathbf{r})) : \text{ポロイダル部}$$

$$\mathbf{u}_T = \nabla \times (T\mathbf{r}) : \text{トロイダル部}$$

球面上の境界条件 (x 軸に関して軸対称の場合)

$$P = T = \text{一定}, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \text{一定} \quad (r = a)$$



基礎方程式1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{r} \cdot \{2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\} \nabla T - r^2 \nabla^2 T] - \mathbf{r} \cdot [\nabla \times \{\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})\}] \\ = \nu [\mathbf{r} \cdot \{2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\} \nabla (\nabla^2 T) - r^2 \nabla^4 T] \end{aligned}$$

Figure 8. 球周りの流れ 1.

§ 6. Newton-Krylov 法による数値解 (準解析解を含む) の求解法

適当な偏微分方程式系が自律系の形

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = f_i(\mathbf{v}(t)),$$

に帰着できるとする. ただし $i = 1, 2, \dots, I$, $\mathbf{v} = {}^t(v_1, v_2, \dots, v_I)$ である. この系の初期値問題を

$$v_i(t) = \phi_i(\mathbf{v}(0), t),$$

と書く. 今 $\mathbf{v}(t)$ が非定常で, かつ, ある時刻 $t = T > 0$ において

$$v_i(0) = \phi_i(\mathbf{v}(0), T),$$

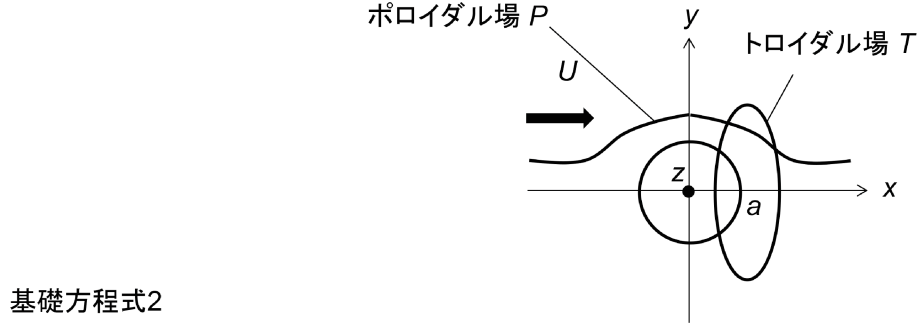
が満たされるものを周期解とするのは自然な定義である. この定義を用いれば

$$(6.1) \quad v_i(0) - \phi_i(\mathbf{v}(0), T) = 0,$$

と書くことによって Newton 法を適用できる.

このようなアイデア自体は力学系及び Newton 法の考え方の自然な拡張になっているから, 式 (6.1) のような形で周期解を求めようとする試みは古くから存在しており, 例えば参考文献 [6] では 2 点境界値問題として定式化され解法が詳述されている. 解法は基本的に現在我々が用いている方法と同じである. この方法は周期解を求める問題に応用されたが, 最初は自律系ではなく周期外力を仮定した非自律系が研究対象となった [7]. 理

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \nabla \times (\nabla \times (P\mathbf{r})) + \nabla \times (T\mathbf{r}) \\ &= \{2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\} \nabla P - \nabla^2 P \mathbf{r} + \nabla T \times \mathbf{r}\end{aligned}$$



基礎方程式2

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{r} \cdot \{2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\} \nabla (\nabla^2 P) - r^2 \nabla^4 P] + \mathbf{r} \cdot (\nabla \times [\nabla \times \{\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})\}]) \\ = \nu [\mathbf{r} \cdot \{2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\} \nabla (\nabla^4 P) - r^2 \nabla^6 P]\end{aligned}$$

Figure 9. 球周りの流れ 2.

由は簡単で、まだ周期 T を変数として式 (6.1) を解く方法が知られていなかったからである。周期 T も変数として扱って正確に求める方法は参考文献 [8] によって提案された。これは今日のいわゆる Poincaré 断面の不動点として周期解を求める手法と同じものである。

この Poincaré 断面の不動点、というアイデアはより一般には phase condition と呼ばれる。本質的には、周期軌道上の任意の点が初期値となり得る、という自由度 1 分の不定性によって生じる問題だから、初期値を周期軌道上の適当な点に留め置きさえすればどんな条件でも良い。Poincaré 断面の不動点以外の phase condition として例えば直交条件 [9] がある。これは

$$(\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v}(0)) = 0$$

と表される。ここで n は Newton 法の第 n ステップを表す。すなわち、Newton 法の補正が、その点における周期軌道の接線に直交する、という条件である。

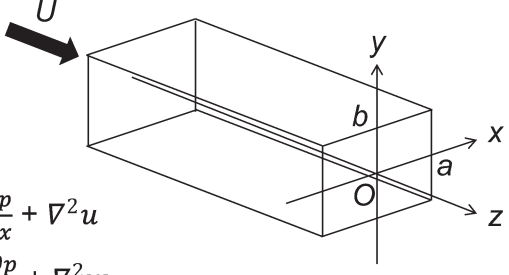
式 (6.1) は適当な関数 g_i 及び適当なパラメタの集合 $\mathbf{p}$ を導入して

$$(6.2) \quad g_i(\mathbf{v}(0), \mathbf{p}) - \phi_i(\mathbf{v}(0), T) = 0,$$

と書けば周期解以外の適当な解に拡張される。ただし $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_L)$ である。

さて式 (6.2) を数値的に解くことを考える。 $(\mathbf{v}^n, T^n, \mathbf{p}^n)$ を Newton 法の第 n ステップにおける推定値とし、 $(\mathbf{v}^n + \Delta \mathbf{v}, T^n + \Delta T, \mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p})$ を真の解と仮定して式 (6.2) に代入して線形化して整理すると

$$(6.3) \quad g_i(\mathbf{v}^n) - \phi_i(\mathbf{v}^n) = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial v_j} - \frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right) \Delta v_j + \frac{\partial \phi_i}{\partial T} \Delta T - \frac{\partial g_i}{\partial p_l} \Delta p_l$$



$\mathbf{V} = (u, v, w)$

基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2 w$$

$$v = -\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$p(x, y, z, t) = \int_0^x \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)u + v \nabla^2 u \right\} d\xi + \int_0^y \left[-\frac{\partial v}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)v + v \nabla^2 v \right] d\eta + p(0, 0, z, t)$$

$p(0, 0, z, t)$ は右式より決定される

$w_0(t)$ は管断面平均流速

$$\int_{-a}^a dx \int_{-b}^b w(x, y, z, t) dy = \frac{1}{4ab} w_0(t)$$

Figure 10. 矩形管内流.

を得, 更に直交条件として

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} \Delta v_j = \frac{\partial g_j}{\partial p_l} \Delta v_j = 0$$

が課される. ただし Einstein の総和規約を適用するものとする. 上式は行列の形で

$$\mathbf{r} = A\mathbf{c}$$

と書かれる. ここで

$$\mathbf{r} = {}^t(g(\mathbf{v}^n) - \phi(\mathbf{z}^n), \underbrace{0, \dots, 0}_{L+1 \text{ 個}}), \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial v_j} & \frac{\partial g_i}{\partial v_j} & \frac{\partial \phi_i}{\partial t} & \frac{\partial g_i}{\partial p_l} \\ \hline \frac{\partial \phi_j}{\partial t} & 0 & 0 \\ \hline \frac{\partial g_j}{\partial p_l} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = {}^t(\Delta \mathbf{v}, \Delta T, \Delta \mathbf{p})$$

である. これを解いて

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta \mathbf{v}, \quad T^{n+1} = T^n + \Delta T, \quad \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p}$$

によって適当な収束判定基準を満たすまで Newton 法を進める.

これを数値的に解く場合 Jacobi 行列 $\frac{\partial \phi_i}{\partial v_j}$ を求める必要があるが, Krylov 部分空間法に基づく反復法を用いると簡便である. Krylov 部分空間は

$$\mathcal{K} = \text{span} \{ \mathbf{r}, A\mathbf{r}, A^2\mathbf{r}, \dots \}$$

によって張られるため, 次元を増やす際に「 A を乗じる」という操作が生じる. いま第 m 番目の基底を用いて第 $m+1$ 番目の基底を求める操作を Jacobi 行列に対して実行して

$$d_i^{(m+1)} = \frac{\partial \phi_i}{\partial v_j} d_j^{(m)}$$

と書くことにする. ところが右辺は

$$\phi_i(\mathbf{v}^n + \mathbf{d}^{(m)}, T) - \phi_i(\mathbf{v}^n, T)$$

を線形化したものにほかならないから, 結局

$$d_i^{(m+1)} = \phi_i(\mathbf{v}^n + \mathbf{d}^{(m)}, T) - \phi_i(\mathbf{v}^n, T)$$

つまり「 A を乗じる」という操作は「初期値に攪乱 $\mathbf{d}^{(m)}$ を加えて $t = T$ まで積分する」という操作に置き換えられる.

さて次に具体的な問題について考える. 任意の $T > 0$ に対して

$$g_i(\mathbf{v}(0)) = v_i(0), \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

とすれば

$$(6.4) \quad v_i(0) - \phi_i(\mathbf{v}(0), T) = 0,$$

となって定常解を求める問題となる. すなわち「どんな T まで時間積分しても初期値 $\mathbf{v}(0)$ は変化しない」ということである. したがって, この場合, 収束判定基準としては軌道の長さを採って

$$\int_0^T \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dt < \epsilon$$

とするのが良いかもしれない. なお T は変数ではないから T については解かない.

一方定常進行波解はやはり任意の T に対して

$$g_{ii'}(\mathbf{v}(0)) = v_{ii'}(0)e^{-iki'UT}, \mathbf{p} = (UT)$$

とすれば

$$(6.5) \quad v_{ii'}(0)e^{-iki'UT} - \phi_{ii'}(\mathbf{v}(0), T) = 0,$$

と定式化される．特に断らなかつたが定常進行波解であれば，進行方向に関して等方的だから，その方向に関して Fourier 変換されているものとし，その方向に関するインデックスを i' と置いた．また U は，定常進行波解の位相速度， k 波数である．この場合も定常解の場合と同様，軌道の長さを基準とするが，進行波解と同じ速度で移動する座標系から見た軌道の長さを取って

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} (\phi e^{ik i' U t}) \right| dt < \epsilon$$

とするのが良いかもしれない． T が変数でない点は定常解の場合と同様である．

周期解の場合は

$$g_i(\mathbf{v}(0)) = v_i(0), \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

として

$$(6.6) \quad v_i(0) - \phi_i(\mathbf{v}(0), T) = 0,$$

となる．収束判定基準は

$$|v_i(0) - \phi_i(\mathbf{v}(0), T)| < \epsilon$$

等が妥当であろう．

更に周期進行波解の場合は

$$g_{ii'}(\mathbf{v}(0)) = v_{ii'}(0) e^{-ik i' U T}, \mathbf{p} = (UT)$$

として

$$(6.7) \quad v_{ii'}(0) e^{-ik i' U T} - \phi_{ii'}(\mathbf{v}(0), T) = 0,$$

とすれば良い．周期進行波解は流体力学の文脈では relative periodic solution という呼称が用いられることもある．また反応拡散系の分野では traveling breather と呼ばれる場合もあるが，解のクラスとしては同じものであり，要するに時間周期的に変形しつつ空間的にある群速度で移動する解である．すなわち，解と同じ群速度で移動する座標系から見ると周期解に見える．この場合の収束判定基準は

$$\left| v_{ii'}(0) e^{-ik i' U T} - \phi_{ii'}(\mathbf{v}(0), T) \right| < \epsilon$$

のようなものが考えられる．

一般に力学系の振舞を解析するに当たって，秩序解 (準解析解) とその安定性は非常に重要なテーマであるが，今のところ，数値的に求め得る解のクラスは上述の，定常解，定常進行波解，時間周期解，周期進行波解の 4 種類である．しかし最初に述べたように，要するに Newton 法の拡張であるから，関数 g_i の形を工夫することによって他に様々なクラスの解を求め得る可能性があり，今後の課題として重要である．

References

- [1] 柳瀬眞一郎, 日本機械学会論文集 (B 編), 73 巻 728 号 (2007), 909-915.
- [2] 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 乱流力学 (朝倉書店), (1999).
- [3] Yanase, S., Flores, C., Métais, O. and Riley, J.J., Rotating free-shear flows .I, Linear stability analysis, *Phys. Fluids*, A5 (1993), 2725-2737.
- [4] Lesieur, M., Yanase, S. and Métais, O., Stabilizing and destabilizing effects of solid-body rotation upon quasi-two-dimensional shear layers, *Phys. Fluids*, A3,(1991), 403-407.
- [5] Watanabe, T. and Yanase, S., Bifurcation study of three-dimensional solutions of the curved square-duct flow, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 82, (2013), 074402.
- [6] Keller, H.B., *Numerical methods for two-point boundary-value problems* (Blaisdell), (1968).
- [7] Aprille, Jr., T.J., and Trick, T.N., A steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs, *Proceedings of the IEEE*, 60, No.1, (1972).
- [8] Aprille, Jr., T.J. and Trick, T.N., A computer algorithm to determine the steady-state response of nonlinear oscillators, *IEEE transactions on circuit theory*, CT-19, No.4, (1972).
- [9] Doedel, E., AUTO: A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems, *Congressus Numerantium*, 30, (1981), 265-384.