

Gauss 過程の表現と再生核空間

名古屋大 櫃田 倍之

1. 2つの可分な Gauss 過程 $X_1 = \{X_1(t); t \in [0, 1]\}$, $X_2 = \{X_2(t); t \in [0, 1]\}$ が与えられたとき, それらの標準表現に現われる重複度および spectre 測度が一致するための十分条件を, 再生核 Hilbert 空間を使って考察する. 目標とする結果は簡明で, 両者の再生核 Hilbert 空間が同一ならば, 重複度, spectre 測度は同じであることが主張される.

便宜上, $X_i(0) = 0$ ($i=1, 2$) 及び $E[X_i(t)] \equiv 0$ ($i=1, 2$) と固定する. $r_i(t, s) = E[X_i(t)X_i(s)]$ ($i=1, 2$) とおく.

2. 一般に可分 Gauss 過程 $X = \{X(t); t \in [0, 1]\}$ が与えられると, Hida-Cramér (cf [3]) の意味での標準表現

$$(1) \quad X(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t F_i(t, u) dB^i(u) + \sum_{\{t_j \leq t\}} \sum_{l=1}^{L_j} G_{ij}^{\perp}(t) B_{t_j}^{\perp l},$$

$$N, L_j \leq \infty$$

が存在する. $dB^i(u)$ ($i=1, \dots, N$) は $E[dB^i(u)^2] = m_i(du)$ を
 みたす Gauss 加法過程, $B_{t_j}^{\ell}$ ($j=1, 2, \dots; \ell=1, 2, \dots, L_j$) は $N(0,1)$
 に従う確率変数であるが, これらはすべて互に独立である.
 $m_i(du)$ は連続な測度とする (不連続な部分は, (1) の右辺の
 $B_{t_j}^{\ell}$ の中にくり込まれてゐるとしてよい). このとき, N を
連続重複度, L_j を t_j における 離散重複度 とする. また右辺
 に表われる加法過程 $B = \{B(t); t \in [0, 1]\}$

$B(t) = \{B^i(t), i=1, \dots, N; \chi_{[t_j, 1]}(t) B_{t_j}^{\ell}, j=1, 2, \dots; \ell=1, \dots, L_j\}$
 を X の innovation 過程 とよぶことにしよう. $\chi_{[t_j, 1]}$ は区間
 $[t_j, 1]$ の定義関数であるが, $[t_j, 1]$ は $G_j^{\ell}(t_j) \neq 0$ となる ℓ
 については, $[t_j, 1]$ を, $G_j^{\ell}(t_j) = 0$ となる ℓ については,
 $(t_j, 1]$ を意味する.

注意. 各 j に対して, $G_j^{\ell}(t_j) \neq 0$ となる ℓ は, 標準表現の
 性質から, ^{高々} 1 つしかない.

もちろん, X と B の時間 t までに張る σ -加法族は等しい:

$$\beta_t(X) = \beta_t(B), \quad t \in [0, 1].$$

innovation 過程を規定する組

$$\{N, m_i(du) (i=1, \dots, N); t_j (j=1, 2, \dots), L_j\}$$

を Gauss 過程 X の 標準システム とよぼう. 明らかに,

補助定理 1. Gauss 過程 $X_1 = \{X_1(t); t \in [0, 1]\}$ 及 u
 $X_2 = \{X_2(t); t \in [0, 1]\}$ の標準システムが等しいことと,

X_1 と X_2 の間に因果的 (causal) であつ因果的に可逆な線形変換が存在することは同値である。但し、因果的 であるとは、 $\beta_t(X_1) \subset \beta_t(X_2)$ の意味である。第2の命題をより詳しく言えば、共通の確率空間の上に X_1 及び X_2 を実現することができ、 $\beta_t(X_1) = \beta_t(X_2)$, $t \in [0,1]$, がなりたつようにできるといふことである。

3. 補助定理1によつて、 X_1 と X_2 の間の因果的及び因果的に可逆な対応をみつければ、目標が達成される。このことを、両生核 Hilbert 空間を使つて言ふ。まず、主定理を正確に述べよう。

主定理. Gauss 過程 X_1 と X_2 の共分散 $\Gamma_1(t,s)$, $\Gamma_2(t,s)$ を両生核とする Hilbert 空間をそれぞれ $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ 及び $\mathcal{H}(\Gamma_2)$ とする。 $\mathcal{H}(\Gamma_1) = \mathcal{H}(\Gamma_2)$ ならば、 X_1 と X_2 の標準システムは一致する。

ここでは、簡単のために、 $\Gamma_i(t,s)$ が連続の場合の証明を述べる。 $\Gamma_i(t,s)$ が連続でない場合にも、可分性を仮定してゐることから、記号および計算の複雑化を除けば、ほぼ同じ構想で証明できる。

まず、次の知られた定理は基本的である。

定理 (Aronszajn[1]) $\mathcal{N}(\Gamma_1) = \mathcal{N}(\Gamma_2)$ であることと、

定数 $C_1, C_2 > 0$ があって、

$$C_1 \Gamma_1 \ll \Gamma_2 \ll C_2 \Gamma_1$$

がなりたつことは、同等である。但し、 $\ll$ は差が正值であることを示す。

これから、次のことがわかる。

定理 (Driscoll[2]) $\Gamma_1(t, s)$ 及び $\Gamma_2(t, s)$ が連続な正值核であるときに、 $\mathcal{N}(\Gamma_1) = \mathcal{N}(\Gamma_2)$ ならば、次のような、有界線形可逆写像 $L: \mathcal{N}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{N}(\Gamma_2)$ が存在する：

$$(2) \quad L(\Gamma_1(t, \cdot)) = \Gamma_2(t, \cdot)$$

注. $\Gamma_1(t, \cdot)$ は $\mathcal{N}(\Gamma_1)$ で密であるから、 L は (2) によって決定される。

主定理の証明 $\mathcal{N}_t(\Gamma_i)$ ($i=1, 2$) を $\{\Gamma_i(s, \cdot); s \leq t\}$ によって張られる $\mathcal{N}(\Gamma_i)$ ($i=1, 2$) の閉部分空間とする。 P_t^i を $\mathcal{N}(\Gamma_i)$ から $\mathcal{N}_t(\Gamma_i)$ への射影とすると、対応 L によって、

$$L \mathcal{N}_t(\Gamma_1) = L P_t^1 \mathcal{N}(\Gamma_1) = P_t^2 \mathcal{N}(\Gamma_2) = \mathcal{N}_t(\Gamma_2)$$

がなりたつことは明白である。^{同型} 対応 $\Gamma_i(\cdot, s) \leftrightarrow X_i(s)$ ($i=1, 2$) を考えれば以下のことが言える。(ここで $X_i(s)$ は $H_i = \{X_i(s); s \in [0, 1]\}$ の線形苞の要素と考えるのである) 対応 L をそのまま H_1 から H_2 への写像として移行してみれば、

これは, X_1 と X_2 の間の因果的かつ因果的に可逆な線形変換
 を与える. 従って, X_1 と X_2 の標準システムは共通である.

文献

- [1] N. Aronszajn : Theory of reproducing kernels ,
 Trans. Amer. Math. Soc. 68(1950)337-404 .
- [2] M. F. Driscoll : The reproducing kernel Hilbert space
 structure of the sample paths of a Gaussian process ,
 Z. Wahr. verw. Geb. 26(1973)309-316 .
- [3] T. Hida : Canonical representations of Gaussian processes
 and their applications , Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A 33
 (1960)109-155.