

共形場のコセット構成

東北大理 池田 岳 (TAKESHI IKEDA)

1. 序

共形場理論の例はいくつか知られている. この論説では Wess-Zumino-Witten model [KZ, TK-2] 及び, Virasoro minimal model [BPZ] を扱う. Virasoro minimal model は, 最初に現れた共形場理論の例であるが, WZW model の方がより扱いやすい面がある. というのは, WZW model は Virasoro algebra $\mathcal{V}ir$ の他に Affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の対称性を持ち合わせているからであり, 今のところ最も整備された共形場理論といえるだろう.

WZW model は単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と, レベル k を決めると一つ定まる. ただし, k は複素数で $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number とは異なるとする. とくに本論説では, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現のみを扱うので, k は正の整数の場合を考えることになる. このとき, Sugawara 構成による Virasoro algebra の central charge は, 1 よりも大きい有理数 ($\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{sl}_2$ のときは, $\frac{3k}{k+2}$) であることに注意する.

一方 Virasoro minimal model に対しては, その central charge は 1 よりも小さい有理数となる. 特に, unitarizable な表現に話を限る場合,

$$c(k) := 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}, \quad (k \text{ は正の整数})$$

という値が対応する.

いま k という文字をここでも使ったのは訳がある. 次節で紹介する Goddard-Kent-Olive の構成 [GKO] によると, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の可積分表現から, $\mathcal{V}ir$ の表現が得られるのである. そこで二つの k の関係がはっきりする.

この論説の目的は, 今ふれた表現の間関係を共形場理論の主対象 conformal blocks の関係に拡張することである [I]. GKO の構成を利用すると, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の可積分表現に関する WZW model から unitarizable minimal model の conformal blocks が構成できることを説明する. 得られた写像は同型であることが予想され, 特に $k=1$ のときは予想が正しいことが示せる. 証明には, 自由 fermion により表現が具体的に構成できる事を用いた.

関連する事として, level rank duality に関する研究 [NT] がある. そこでは, GKO 構成で得られる $\mathcal{V}ir$ の表現が $c=0$ である場合が扱われている.

2. GKO による COSET CONSTRUCTION

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の基底 $\{E, H, F\}$ で

$$[H, E] = 2E, [H, F] = -2F, [E, F] = H.$$

を満たすものとする. また, $\mathfrak{g}$ 上の双一次形式を $(E|F) = (F|E) = 1, (H|H) = 2$, その他の組みあわせは 0 と定める. Affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ は $X[n] (X \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{Z}), K$ を基底とし, 交換関係

$$\begin{aligned} [X[n], Y[m]] &= [X, Y][n+m] + n(X|Y)\delta_{n+m,0}K, \\ [K, X[n]] &= 0, \end{aligned}$$

により定まる Lie 環である. その普遍展開環を $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ であらわす. Sugawara operators と呼ばれる次の無限和を考える,

$$S[m] = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \circ \frac{1}{2} H[-n] H[n+m] + E[-n] F[n+m] + F[-n] E[n+m] \circ.$$

ここで, $\circ \cdot \circ$ は

$$\circ X[n] Y[m] \circ = \begin{cases} X[n] Y[m] & n < m \\ \frac{1}{2}(X[n] Y[m] + Y[m] X[n]) & n = m \\ Y[m] X[n] & n > m. \end{cases}$$

と定める. この無限和はもちろん $U(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ には属さないが, その完備化 $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ の元となる. $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ の定義等は Kac の教科書 [K] に従う. ここではひとまず, 可積分表現上で well-defined な operator として作用する, ということだけ注意しておけば十分である.

命題.

$$[S[n], X[m]] = -(K+2)mX[n+m]$$

$$[S[n], S[m]] = (K+2)(n-m)S[n+m] + \delta_{n+m,0} \frac{n^3 - n}{12} 3K(K+2)$$

証明は例えば [KR] に詳しく書いてある.

したがって, $k \neq -2$ ならば, $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ を $K - k \cdot 1 = 0$ で割った algebra $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})_k$ において,

$$T^k[m] := \frac{1}{k+2} S[m]$$

は central charge

$$c = \frac{3k}{k+2}$$

の Virasoro algebra の relations をみたす.

GKO の構成を, ここで用いる場合 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 \times \widehat{\mathfrak{sl}}_2 \supset \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ (対角埋め込み) に即して説明する. 余積 $\Delta: U(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes U(\widehat{\mathfrak{g}})$ を通常どおり $\Delta(A) = A \otimes 1 + 1 \otimes A, A \in \widehat{\mathfrak{g}}$ で定義する. そこで, $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_k \widehat{\otimes} \widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_1$ の元,

$$T^{GKO}[n] = T^k[n] \otimes 1 + 1 \otimes T^1 - \Delta(T^{k+1}[n]), (n \in \mathbb{Z})$$

を考える. ここで, Δ は完備化にまで拡張したものを同じ記号であらわした.

命題. $T^{GKO}[n]$ は次を満たす.

$$[T^{GKO}[n], T^{GKO}[m]] = (n-m)T^{GKO}[n+m] + \frac{n^3-n}{12}\delta_{n+m,0}c(k),$$

$$[T^{GKO}[n], \Delta(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)] = 0.$$

以下 k は正の整数とする. レベル k の可積分表現は, $P_k^+ := \{0, 1, \dots, k\}$ で parametrize される. $\lambda \in P_k^+$ に対応する表現を $L_{k,\lambda}$ で表す. 今, $\lambda \in P_k^+, \varepsilon \in P_1^+$ をとる. $L_{k,\lambda} \otimes L_{1,\varepsilon}$ は $\Delta(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \times \text{Vir}$ 加群となる. ただし, Vir の作用は $T^{GKO}[n]$ によるものである.

定理 [GKO, TK-1, KW]. $\Delta(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \times \text{Vir}$ 加群として,

$$L_{k,\lambda} \otimes L_{1,\varepsilon} \cong \bigoplus_{\substack{\mu \in P_{k+1}^+ \\ \lambda + \mu + \varepsilon \equiv 0 \pmod{2}}} L_{k+1,\mu} \otimes V_{c(k), h_{\lambda+1, \mu+1}}.$$

ここで,

$$h_{r,s} = \frac{((k+3)r - (k+2)s)^2 - 1}{4(k+2)(k+3)}$$

である.

可積分表現が unitarizable であることより次が従う.

系. $V_{c(k), h_{r,s}}, (r = 1, \dots, k+1, s = 1, \dots, k+2)$ は unitarizable である.

3. WZW-MODEL

WZW-model について説明する前に、右 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群 $L_{k,\lambda}^\dagger$ を導入しておくのが便利である。

$$L_{k,\lambda}[d] = \{v \in L_{k,\lambda} \mid T^k[0]v = (h_\lambda + d)v\}$$

と定めると、直和分解 $L_{k,\lambda} = \bigoplus_{d \geq 0} L_{k,\lambda}[d]$ ができる。ここで、 $T^k[0]$ の最低固有値 h_λ は

$$h_\lambda = \frac{\lambda(\lambda + 2)}{4(k + 2)}$$

で与えられる。 $L_{k,\lambda}[0]$ は、 $\mathfrak{g}$ 部分加群で、 $\lambda + 1$ 次元既約表現 L_λ と同型であることも、ここで注意しておく。さて、制限双対空間を

$$L_{k,\lambda}^\dagger = \bigoplus_{d \geq 0} (L_{k,\lambda}[d])^*$$

と定めると、 $L_{k,\lambda}$ との間の自然な pairing

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : L_{k,\lambda}^\dagger \times L_{k,\lambda} \longrightarrow \mathbb{C}$$

に関して、

$$\langle ua|v \rangle = \langle u|av \rangle (= \langle u|a|v \rangle) \quad (a \in U(\hat{\mathfrak{g}}), u \in L_{k,\lambda}^\dagger, v \in L_{k,\lambda})$$

を満たす右 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造が一意的に入る。 $L_{k,\lambda}^\dagger$ もまた $T^k[0]$ の固有値に関する直和分解

$$L_{k,\lambda}^\dagger = \bigoplus_{d \geq 0} L_{k,\lambda}^\dagger[d]$$

を持つ。

既に前節で、

$$X(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X[m]z^{-m-1}$$

$$T(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} T[m]z^{-m-2}$$

という級数を用いたが、これらは $(L_{k,\lambda}^\dagger \otimes L_{k,\lambda})^*$ に値を持つ $\mathbb{C}^\times$ 上の正則関数ともみることができる。というのは、 $u \otimes v \in L_{k,\lambda}^\dagger \otimes L_{k,\lambda}$ に対して、例えば $\langle u|X(z)|v \rangle := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle u|X[m]|v \rangle z^{-m-1}$ は、 $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ の元となるからである。次に、もっと複雑な関数 conformal blocks の定義を与えよう。

定義. $L_{k,\lambda}^* = (L_{k,\lambda_3}^\dagger \otimes L_{k,\lambda_2} \otimes L_{k,\lambda_1})^*$ に値を持つ $\mathbb{C}^\times$ 上の多価正則関数 $\phi(z)$ が Conformal block とは次の条件を満たすときとする:

(1) $z \in \mathbb{C}^\times$ を固定するとき, それぞれ $w^{-1}, w-z, w$ に関する 3つの Laurent 級数

$$\phi(z; u_3 X(w) \otimes u_2 \otimes u_1), \phi(z; u_3 \otimes X(w-z) u_2 \otimes u_1), \phi(z; u_3 \otimes u_2 \otimes X(w) u_1)$$

が, 収束して, $0, \infty, z$ のみに極を持つ 1つの有理関数に解析接続される.

(2) 微分方程式

$$\frac{d}{dz} \phi(z; u_3 \otimes u_2 \otimes u_1) = \phi(z; u_3 \otimes T^k[-1] u_2 \otimes u_1)$$

を満たす.

Remark. $\hat{L}_{k,\lambda} := \prod_{d \geq 0} L_{k,\lambda}[d]$ とおくと, canonical な同型

$$(L_{k,\lambda_3}^\dagger \otimes L_{k,\lambda_2} \otimes L_{k,\lambda_1})^* \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(L_{k,\lambda_2} \otimes L_{k,\lambda_1}, \hat{L}_{k,\lambda_3})$$

により, $\phi(z; u_3 \otimes u_2 \otimes u_1)$ は, $\phi(z; u_3 \otimes u_2 \otimes u_1) = \langle u_3 | \phi(z; u_2 \otimes u_1) \rangle$ をみたす $\phi(z; u_2 \otimes u_1)$ と一対一に対応する. あるいは, u_2 に線型に依存する operators の family $\phi(z; u_2) : L_{k,\lambda_1} \rightarrow \hat{L}_{k,\lambda_3}$ で, $\phi(z; u_2 \otimes u_1) = \phi(z; u_2) u_1$ を満たすもの, として扱う方が便利なきもある.

$\mathbb{P}^1$ 上の 3点 $0, z, \infty$ に表現が乗っている場合を考えたが, 一般に N 点の場合に conformal block の定義を拡張することもできる. 3点のときには vertex operator と呼ぶ事も多い. Vertex operator に対し, 点 z にある表現 L_{k,λ_2} を $L_{k,\lambda_2}[0] = L_{\lambda_2}$ に制限して得られる operator を primary field という.

命題. Primary field は次を満たす:

$$[X[n], \phi(z; v)] = z^n \phi(z; Xv), (X \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{Z}, v \in L_{\lambda_2}),$$

$$[T[n], \phi(z; v)] = z^n (z \frac{d}{dz} + (n+1)h_{\lambda_2}) \phi(z; v), (n \in \mathbb{Z}, v \in L_{\lambda_2}).$$

逆に, この条件を満たす $\phi(z)$ があれば, それを conformal block に拡張することができる. しかもその拡張は一意的である.

Conformal blocks のなす局所系を $\mathcal{L}_{k,\lambda}$ で表す. 次のことが知られている.

定理[TK]. $\mathcal{L}_{k,\lambda}$ の階数は高々 1 であり, 1 となるための必要十分条件は次で与えられる:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \text{ は } 2k \text{ 以下の偶数,}$$

$$(1, 2, 3) \text{ の任意の置換 } (i, j, k) \text{ に対して } \lambda_i + \lambda_j - \lambda_k \geq 0.$$

定理の条件を満たす $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 全体の集合をここでは CG_k で表す. Clebsch-Gordan の条件にレベル k による制限がついたものという意味である.

4. VIRASORO MINIMAL MODEL

互いに素な二つの正の整数 p, q により central charge が,

$$c = c_{p,q} := 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$$

と表されるとき, 1 つの Virasoro minimal model が対応する. そのような c に対し,

$$R_c = \{h_{r,s} \mid r, s \in \mathbb{Z}, 0 < r < q, 0 < s < p\},$$

$$h_{r,s} = \frac{(pr - qs)^2 - (p - q)^2}{4pq}$$

とおく. 既約最高ウェイト表現 $V_{c,h}$ ($h \in R_c$) に対する共形場理論が minimal model である. $h_{q-r, p-s} = h_{r,s}$ であるから R_c の元の個数は $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ であることに注意しておく.

関連する重要な事実として次がよく知られている.

定理[FQS,L]. $0 < c < 1$ のとき, $V_{c,h}$ が unitarizable であるための必要条件は,

$$c = c(k) = c_{k+3, k+2} \quad (k = 1, 2, \dots), h \in R_{c(k)}$$

が成り立つことである.

この系列に属する Virasoro minimal model を 特に unitarizable minimal model と呼ぶこともある.

ここでいったん一般の minimal model に話を戻す. conformal block の定義は, $L_{k,\lambda}$ の代わりに $V_{c,h}$, $X(z)$ の代わりに $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ を使って同様に与える. conformal blocks の局所系を $\mathcal{V}_{c,h}$ で表すことにする.

定理[Ku]. $\mathcal{V}_{c,h}$ の階数は高々 1 であり, 1 となるための必要十分条件は次が成立することである: ある $r_i, s_i \in \mathbb{Z} (1 \leq i \leq 3)$ が存在して, $h_i = h_{r_i, s_i}$ でかつ,

$$r_1 + r_2 + r_3 \text{ は } 2q - 1 \text{ 以下の奇数,}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 \text{ は } 2p - 1 \text{ 以下の奇数,}$$

$$(1, 2, 3) \text{ の任意の置換 } (i, j, k) \text{ に対して } r_i + r_j - r_k \geq 1, s_i + s_j - s_k \geq 1.$$

証明には [FFu] の結果を用いる.

Remark. この結果は, 共形場理論の誕生を告げる論文 [BPZ] において既に, 証明は抜きではあるが述べられている.

定理の条件を満たす $h = (h_1, h_2, h_3)$ 全体の集合をここでは, BPZ_c で表す.

5. COSET CONSTRUCTIONS OF CONFORMAL BLOCKS

第 2 節で説明した GKO 構成を用いることにより, 次の結果が得られる.

定理. $\lambda_i + \mu_i + \varepsilon_i \equiv 0 \pmod{2} (1 \leq i \leq 3)$ を満たす $\lambda \in CG_k, \mu \in CG_{k+1}, \varepsilon \in CG_1$ が与えられたとする. h を $h_i = h_{\lambda_i+1, \mu_i+1} (1 \leq i \leq 3)$ によって定めると, $h \in BPZ_{c(k)}$ であり, 自然な局所系の写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\text{ex}}}(\mathcal{L}_{k+1, \mu}, \mathcal{L}_{k, \lambda} \otimes \mathcal{L}_{1, \varepsilon}) \rightarrow \mathcal{V}_{c(k), h}$$

が存在する.

得られた写像は同型であることが予想されるが, 特に $k = 1$ のときは Spinor 表現を用いる事により予想が正しいことを証明できる. 次節において, その証明の方針を述べる.

Remark. 定理および予想は一般の N 点 conformal block に対しても同様に定式化できる. 詳しい事は [I].

6. SPINOR 表現

Clifford 代数 $Cl_\delta (\delta = 0, 1/2)$ を生成元 $\psi_i[n], \bar{\psi}_i[n], i = 1, 2, n \in \mathbb{Z} + \delta$, 及び反交換関係

$$\{\psi_i[n], \psi_j[m]\} = \{\bar{\psi}_i[n], \bar{\psi}_j[m]\} = 0,$$

$$\{\psi_i[n], \bar{\psi}_j[m]\} = \delta_{i,j} \delta_{n+m,0}$$

によって定める. その Fock 表現 $\mathcal{F}_\delta$ をそれぞれ, vectors $|\delta\rangle$ により生成され,

$$\psi_i[n]|\delta\rangle = 0 \quad \text{for } n \geq 0,$$

$$\bar{\psi}_i[n]|\delta\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0$$

により定まるものとする. さらに $\mathcal{F}_\delta^{\text{even}}, \mathcal{F}_\delta^{\text{odd}}$ により, 生成元の個数に関する even part 及び odd part をそれぞれ表す.

ここで, a, b を ψ_i または $\bar{\psi}_i$ とするとき, $:\cdot\cdot:$ を,

$$:a[n]b[m]: = \begin{cases} a[n]b[m] & n < m \\ \frac{1}{2}(a[n]b[m] - b[m]a[n]) & n = m \\ b[m]a[n] & n > m \end{cases}$$

と定義する.

母関数 (free fermion)

$$\psi_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \delta} \psi_i[n] z^{-n-1/2}, \quad \bar{\psi}_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \delta} \bar{\psi}_i[n] z^{-n-1/2},$$

を導入する. これらは, $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_\delta, \widehat{\mathcal{F}}_\delta)$ に値を持つ $\mathbb{C}^\times$ 上の正則関数ともみなせる. $\delta = 0$ のときは, 2 価関数である. このような operators の計算の方法については, 例えば [FFr] に詳しく書いてある. ここで, operators

$$E_1(z) = \psi_1(z)\bar{\psi}_2(z), \quad F_1(z) = \psi_2(z)\bar{\psi}_1(z), \quad H_1(z) = :\psi_1(z)\bar{\psi}_1(z): - :\psi_2(z)\bar{\psi}_2(z):$$

$$E_2(z) = \psi_1(z)\psi_2(z), \quad F_2(z) = \bar{\psi}_2(z)\bar{\psi}_1(z), \quad H_2(z) = :\psi_1(z)\bar{\psi}_1(z): + :\psi_2(z)\bar{\psi}_2(z):$$

を導入する. $E_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_1[n] z^{-n-1}$ のように展開すると,

定理 [KP,F]. これらは Fock 空間上に $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 \times \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現を定め,

$$\mathcal{F}_{1/2}^{\text{even}} \cong L_{1,0} \otimes L_{1,0}, \quad \mathcal{F}_{1/2}^{\text{odd}} \cong L_{1,1} \otimes L_{1,1},$$

$$\mathcal{F}_0^{\text{even}} \cong L_{1,0} \otimes L_{1,1}, \quad \mathcal{F}_0^{\text{odd}} \cong L_{1,1} \otimes L_{1,0}$$

が成り立つ.

GKO construction を $k = 1$ の時に適用すると,

$$L_{1,0} \otimes L_{1,0} \cong L_{2,0} \otimes V_{1/2,0} \oplus L_{2,2} \otimes V_{1/2,1/2}$$

$$L_{1,1} \otimes L_{1,1} \cong L_{2,2} \otimes V_{1/2,0} \oplus L_{2,0} \otimes V_{1/2,1/2}$$

$$L_{1,0} \otimes L_{1,1} \cong L_{2,1} \otimes V_{1/2,1/16}$$

$$L_{1,1} \otimes L_{1,0} \cong L_{2,1} \otimes V_{1/2,1/16}$$

となる.

表現を与える operators は,

$$\psi_{\pm}(z) := \psi_2(z) \pm \bar{\psi}_2(z)$$

とおくとき,

$$T^{GKO}(z) = \frac{1}{4} : \psi_-(z) \frac{d\psi_-(z)}{dz} : + \frac{1-2\delta}{16} z^{-2}$$

となり, $\Delta(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の方は

$$E(z) = \psi_1(z)\psi_+(z), F(z) = -\bar{\psi}_1(z)\psi_+(z), H(z) = 2 : \psi_1(z)\bar{\psi}_1(z) :$$

で与えられる.

例として, $\lambda = \varepsilon = (0, 0, 0), \mu = (0, 0, 0), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (0, 2, 2)$ の場合について考えてみる. レベル 1 で $(0, 0, 0)$ に対応する vertex operator を $[0]_1$ であらわす.

$$\Phi(z) := [0]_1 \otimes [0]_1 : \mathcal{F}_{1/2}^{even} \otimes \mathcal{F}_{1/2}^{even} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_{1/2}^{even}$$

と Fock 空間に実現される.

Second factor (つまり点 z にある表現) のベクトル v を固定することにより得られる operator を

$$\Phi^v(z) : \mathcal{F}_{1/2}^{even} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_{1/2}^{even}$$

で表す.

$v \in L_{2,0} \otimes V_{1/2,0}$ のとき, 分解

$$\mathcal{F}_{1/2}^{even} \cong L_{2,0} \otimes V_{1/2,0} \oplus L_{2,2} \otimes V_{1/2,1/2}$$

にあわせて, $\Phi^v(z)$ を成分に分け行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} [0]_2 \otimes [0]_{1/2} & 0 \\ 0 & [0]_2 \otimes [0]_{1/2} \end{pmatrix}$$

となる. ここで, $[0]_2$ によって レベル 2 の vertex operator で second factor が 0 のもの ($\mu = (2, 0, 2), (0, 0, 0)$ がある) のことを表した. また, $[0]_{1/2}$ で $c = 1/2$ の Virasoro minimal model の vertex operator で second factor が 0 のものを表した. 同様の記号を用いて,

$v \in L_{2,2} \otimes V_{1/2,1/2}$ のときは,

$$\begin{pmatrix} 0 & [2]_2 \otimes [1/2]_{1/2} \\ [2]_2 \otimes [1/2]_{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

$[0]$ は本質的には identity operator で, 実際 second factor に最高ウェイトベクトルを代入すると identity となる. 同様の意味で, $[1/2]_{1/2}$ は本質的には $\psi_-(z)$ である. その他の vertex operators も free fermion により記述でき, GKO 構成による分解の各成分も決定できる. その結果から, $k = 1$ の時に予想が正しい事を示すことができる.

REFERENCES

- [BPZ] Belavin, A.A., Polyakov, A.M., Zamolodchikov, A.B., *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984), 333-380.
- [F] Frenkel, I.B., *Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory*, Journal of functional analysis **44** (1981), 259-327.
- [FFr] Feingold, A.J., Frenkel, I.B., *Classical affine Lie algebras*, Advan.in Math. **56** (1985), 117-172.
- [FFu] Feigin, B., Fuchs, D., *Representations of the Virasoro algebra*, Representations of the Lie groups and related topics, Gordon and Breach, New York, 1990, pp. 465-554.
- [FQS] Friedan, D., Qiu, Z., Shenker, S., *Conformal invariance, unitarity, and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1575-1578.
- [GW] Gepner, D., Witten, E., *String theory on group manifolds*, Nucl. Phys. **B278** (1986), 493-549.
- [GKO] Goddard, P., Kent, A., Olive, D., *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **103** (1986), 105-119.
- [I] Ikeda, T., in preparation.
- [K] Kac, V.G., *Infinite dimensional Lie algebras (3rd edition)*, Cambridge University Press, 1990.
- [Ku] Kuroki, G., in preparation.
- [KP] Kac, V.G., Peterson, D.H., *Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **78** (1981), 3308-3312.
- [KR] Kac, V.G., Raina, A.K., *Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, Adv. Ser. in Math. Phys. vol.2, World Scientific, 1987.
- [KW] Kac, V.G., Wakimoto, M., *Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwarz and Ramond algebras*, Lecture notes in physics **261** (1986), 345-371.
- [KZ] Knizhnik, V.G., Zamolodchikov, A.B., *Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247** (1984), 83-103.
- [L] Langlands, R.P., *On unitary representations of Virasoro algebra*, Infinite-dimensional Lie algebras and their applications (Vershik, A.M., Zhelobenko, D.P., eds.), World Sci., 1988, pp. 141-159.
- [NT] Nakanishi, T., Tsuchiya, A., *Level-rank duality of WZW models in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 351-372.
- [TK-1] Tsuchiya, A., Kanie, Y., *Unitary representations of the Virasoro algebra*, Duke Mathematical Jour. **22** (1986), 1013-1046.
- [TK-2] ———, *Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid groups*, Adv. Stud. in Pure Math. **16** (1987), 297-372.