

A multi-parametric linear program
and its dual and converse programs

久大 経済 岩本誠一 (Seiichi Iwamoto)

1. はじめに

本論文では, Bellman [1, p.47] が提示した マルチパラメトリックな N 変数 $(N-1)$ 制約 線形計画問題 (主問題) およびその双対問題, 逆転問題, 双対逆転問題の合計 4 つの線形計画問題を考える。いずれも $(N-1)$ 個のパラメータ $a = (a_1, a_2, \dots, a_{N-1})'$ を右辺定数ベクトルまたは目的係数ベクトルとして含む問題である。

第2節では用語・定義を説明して, 4問題を導入する。第3節では4つの最適値関数の関係, 性質, 上界・下界を与え, 特にパラメータが非負単調列 a とするには, 4問題の完全解を与える。

2. 双対問題と逆転問題

以下 本論文を通じて 次の記号・定義を用いる。

N : 2以上の自然数

$$A = \begin{bmatrix} / & / & & 0 \\ & / & / & \\ 0 & & \ddots & / \\ & & & / \end{bmatrix}_{N-1}^N$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} / \\ / \\ \vdots \\ / \end{bmatrix}_N$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

$(,)$: 内積

A' : A の転置行列

R^n : n 次元ユークリッド空間, $R^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$

$$R_+^n = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$$

$$R_-^n = \{x \in R^n \mid x_i \leq 0, 1 \leq i \leq n\}$$

$$x \geq y \iff x_i \geq y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$x \geq y \iff x \geq y, \quad x \neq y$$

$$x > y \iff x_i > y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$a \vee b = \max(a, b) = \begin{cases} a & \{a \geq b \\ b & \{a < b \end{cases} \text{ とき, 特 } a^+ = a \vee 0$$

$$a \wedge b = \min(a, b) = \begin{cases} a & \{a \leq b \\ b & \{a > b \end{cases} \text{ とき, 特 } a^- = a \wedge 0$$

$$\bigvee_{i=1}^n a_i = \max_{1 \leq i \leq n} a_i : a_1, a_2, \dots, a_n \text{ の最大値}$$

$$\bigwedge_{i=1}^n a_i = \min_{1 \leq i \leq n} a_i : a_1, a_2, \dots, a_n \text{ の最小値}$$

$$\bar{\lambda} = 1 - \lambda$$

以下、次の4つの線形計画(LP)問題を考える。

$$\text{問題1} \quad f_N(a) = \min(e, x) \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq a, \quad x \in R_+^N$$

$$\text{問題2} \quad g_N(a) = \text{Max}(a, y) \quad \text{s.t.} \quad A'y \leq e, \quad y \in R_+^{N-1}$$

ただし、問題1, 2においては $a \in R^{N-1}$ とする。

$$\text{問題3} \quad F_N(a) = \text{Max}(e, x) \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq a, \quad x \in R_+^N$$

$$\text{問題4} \quad G_N(a) = \min(a, y) \quad \text{s.t.} \quad A'y \geq e, \quad y \in R_+^{N-1}$$

ただし、問題3, 4では特に $a \in R_+^{N-1}$ に制限する。

問題1は Bellman [1, p.47] が提示している。問題1と問題2の対、および問題3と問題4の対はともに線形計画における主問題と双対問題の関係にある。これを単に双対関係 dual relation という。また、問題1と問題3の対は互に“逆転”領域における最小化問題と最大化問題である。ただし、ここで逆転領域とは制約関係が

$$Ax \leq b, \quad x \in X \quad \text{と} \quad Ax \geq b, \quad x \in X$$

の関係にあるときをいう。このとき問題1と問題3は互に逆転関係 converse relation にあるという。したがって問題2と問題4の対もまた互に逆転関係にあり、一方を主問題、他方を逆転問題という。

本論文では問題1を主問題 primal problem, 問題2を

双対問題 dual problem, 問題 3 を逆転問題 converse problem, 問題 4 を双対逆転問題 primal-converse problem とともに呼ぶことにする。最大化が行われる(問題 2, 3 の)領域はコンパクト凸であり, 最小化される(問題 1, 4 の)領域は非有界・閉凸集合である。

3. 最適値関数の性質と相互関係

問題 1 と 2 の対, および問題 3 と 4 の対の間には次の双対関係がある。

命題 3.1 (i) $f_N(a) = g_N(a) \quad a \in R^{N-1}$

(ii) $F_N(a) = G_N(a) \quad a \in R_+^{N-1}$

さて 問題 1 の最大値関数 f_N と 問題 2 の最小値関数 g_N の性質を考えよう。このため, まず 問題 1 を線形不等式系で表現しておこう。

$$\begin{array}{ll}
 \min & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{N-1} + x_N \\
 \text{s.t. (1)} & x_1 + x_2 \geq a_1 \\
 & (2) \quad x_2 + x_3 \geq a_2 \\
 & \vdots \\
 & (N-1) \quad x_{N-1} + x_N \geq a_{N-1} \\
 & (N) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N \geq 0
 \end{array}$$

問題 1
(主問題)

この不等式系 (1)~(N) に同値な表現として次が得られる。

補題 3.1 線形不等式系 $Ax \geq a, x \in R_+^N$ は次の不等式系 (1)⁺~(N)⁺ に同値である。ただし $a \in R^{N-1}$ 。

$$\begin{aligned}
 (1)^+ \quad x_1 + x_2 &\geq a_1^+ \\
 (2)^+ \quad x_2 + x_3 &\geq a_2^+ \\
 \vdots &\vdots \\
 (N-1)^+ \quad x_{N-1} + x_N &\geq a_{N-1}^+ \\
 (N)^+ \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N &\geq 0.
 \end{aligned}$$

補題 3.2 (i) $f_N(a) = 0 \quad a \in \mathbb{R}_-^{N-1}$

$$f_N(a) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a_i^+ \quad a \in \mathbb{R}^{N-1}$$

(ii) 関数 f_N は次の意味で非減少である。

$$(ii-a) \quad a_1 \leq a_2 \Rightarrow f_N(a_1) \leq f_N(a_2)$$

$$(ii-b) \quad 0 \leq a_1 < a_2 \Rightarrow 0 \leq f_N(a_1) < f_N(a_2)$$

$$(ii-c) \quad 0 < a \Rightarrow 0 < f_N(a)$$

(iii) 関数 f_N は凸である。

補題 3.3 (i) N が偶数 n とし

$$f_N(a) \geq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \dots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \dots + a_{N-2}^+)$$

(ii) N が奇数 n とし

$$f_N(a) \geq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \dots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \dots + a_{N-1}^+).$$

次に問題2を線形不等式系で表現して考えよう。

$$\begin{array}{ll}
 \text{問題2} & \text{Max } a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_{N-2} y_{N-2} + a_{N-1} y_{N-1} \\
 \text{(双対問題)} & \text{s.t. } (1) \quad y_1 \leq 1 \\
 & (2) \quad y_1 + y_2 \leq 1 \\
 & (3) \quad y_2 + y_3 \leq 1 \\
 & \vdots \\
 & (N-1) \quad y_{N-2} + y_{N-1} \leq 1 \\
 & (N) \quad y_{N-1} \leq 1 \\
 & (N+1) \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-2}, y_{N-1} \geq 0
 \end{array}$$

左に $a \in R^{N-1}$.

問題の最大値関数 $g_N: R^{N-1} \rightarrow R^1$ は次の上界をもつ.

補題 3.4 (i) N が偶数のとき

$$g_N(a) \leq [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-2} \vee a_{N-1})] \\ \wedge [(a_1 \vee a_2) + (a_3 \vee a_4) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}]$$

(ii) N が奇数のとき

$$g_N(a) \leq [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}] \\ \wedge [(a_1 \vee a_2) + (a_3 \vee a_4) + \cdots + (a_{N-2} \vee a_{N-1})].$$

したがって, 命題 3.1, 補題 3.3, 補題 3.4 より, 問題 1 の最小値関数 f_N と問題 2 の最大値関数 g_N の上界・下界が得られる。

命題 3.2 (i) N が偶数のとき

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a_i^+ \\ \leq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \\ \leq f_N(a) = g_N(a) \\ \leq [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)] \\ \wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+] \\ \leq \frac{N}{2} \left(\bigvee_{i=1}^{N-1} a_i^+ \right)$$

(ii) N が奇数のとき

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a_i^+ \\
& \leq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \\
& \leq f_N(a) = g_N(a) \\
& \leq [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+] \\
& \quad \wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)] \\
& \leq \frac{N}{2} \left(\bigvee_{i=1}^{N-1} a_i^+ \right).
\end{aligned}$$

系 3.1 ([1, p.47]) 数列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうちただ一つ a_{i_0} だけが正ならば

$$f_N(a) = g_N(a) = \bigvee_{i=1}^{N-1} a_i = a_{i_0}.$$

このとき, $\hat{x}_{i_0} = a_{i_0}$, $\hat{x}_i = 0$ ($i \neq i_0$) が問題1の最小点であり, $y_{i_0}^* = 1$, $y_i^* = 0$ ($i \neq i_0$) が問題2の最大点である。

系 3.2

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a_i^+ \leq f_N(a) = g_N(a) \leq \frac{N}{2} \left(\bigvee_{i=1}^{N-1} a_i^+ \right).$$

次に問題3と問題4の最適値関数を与えよう。まず問題3を線形不等式系で表現しておく。

$$\begin{array}{ll}
\text{Max} & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{N-1} + x_N \\
\text{s.t.} & (1) \quad x_1 + x_2 \leq a_1 \\
& (2) \quad x_2 + x_3 \leq a_2 \\
& \vdots \\
& (N-1) \quad x_{N-1} + x_N \leq a_{N-1} \\
& (N) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N \geq 0
\end{array}$$

問題3
(逆転問題)

ただし $a \in R_+^{N-1}$.

問題 3 の最大値関数 $F_N: R_+^{N-1} \rightarrow R_+^1$ には次の性質がある。

補題 3.5 (i) $0 \leq F_N(a) \leq \frac{1}{2} (a_1 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i + a_{N-1})$

(ii) 関数 F_N は次の意味で非減少である。

(ii-a) $a_1 \leq a_2 \Rightarrow F_N(a_1) \leq F_N(a_2)$

(ii-b) $a_1 < a_2 \Rightarrow F_N(a_1) < F_N(a_2)$

(ii-c) $0 < a \Rightarrow 0 < F_N(a)$

(iii) 関数 F_N は凹である。

補題 3.6 (i) N が偶数のとき

$$F_N(a) \leq (a_1 + a_3 + \dots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-2} + a_{N-1})$$

(ii) N が奇数のとき

$$F_N(a) \leq (a_1 + a_3 + \dots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1}).$$

次に問題 4 を線形不等式で表現して考えよう。

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_{N-2} y_{N-2} + a_{N-1} y_{N-1} \\ \text{s.t.} & (1) \quad y_1 \geq 1 \\ & (2) \quad y_1 + y_2 \geq 1 \\ \text{問題 4} & (3) \quad y_2 + y_3 \geq 1 \\ & \vdots \\ & (N-1) \quad y_{N-2} + y_{N-1} \geq 1 \\ & (N) \quad y_{N-1} \geq 1 \\ \text{(双対逆転問題)} & (N+1) \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-2}, y_{N-1} \geq 0 \end{array}$$

ただし $a \in R_+^{N-1}$.

この不等式系 (1)~(N+1) から

$$y_{N-2} + y_{N-1} \geq 1, \quad y_{N-1} \geq 0, \quad y_1 + y_2 \geq 1, \quad y_1 \geq 0$$

を削除しても同値である。問題4の最大値関数 $G_N: R_+^{N-1} \rightarrow R_+^1$ の1つの下界を求めよう。

補題 3.7 (i) N が偶数のとき

$$G_N(a) \geq [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})] \\ \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}]$$

(ii) N が奇数のとき

$$G_N(a) \geq [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}] \\ \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})].$$

命題 3.1, 補題 3.6, 補題 3.7 より, 問題3の最大値関数 F_N と問題4の最小値関数 G_N の上界・下界が得られる。

命題 3.3 (i) N が偶数のとき

$$\begin{aligned} & \frac{N}{2} \left(\bigwedge_{i=1}^{N-1} a_i \right) \\ & \leq [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})] \\ & \quad \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}] \\ & \leq G_N(a) = F_N(a) \\ & \leq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \\ & \leq (a_1 + a_{N-1}) + \frac{1}{2} (a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-2}) \\ & = \frac{1}{2} \left(a_1 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i + a_{N-1} \right) \end{aligned}$$

(ii) N が奇数のとき

$$\begin{aligned}
 & \frac{N}{2} \left(\bigwedge_1^{N-1} a_i \right) \\
 & \leq \left[a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1} \right] \\
 & \quad \vee \left[(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1}) \right] \\
 & \leq G_N(a) = F_N(a) \\
 & \leq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}) \\
 & \leq (a_1 + a_{N-1}) + \frac{1}{2} (a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-2}) \\
 & = \frac{1}{2} \left(a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1} \right).
 \end{aligned}$$

系 3.3 列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうちただ1つ a_{i_0} が正で他がすべて0
ならば,

$$F_N(a) = G_N(a) = \begin{cases} \bigvee_1^{N-1} a_i = a_{i_0} & i_0 = 1 \text{ or } N-1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他 } (1 < i_0 < N-1) \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき

$$x^* = \begin{cases} (a_1, 0, \dots, 0) \text{ or } (0, \dots, 0, a_{N-1}) \\ (0, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

が問題3の最大点であり, 実行可能な

$$\hat{y} = \begin{cases} (1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{N-1}) \text{ or } (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{N-2}, 1) \\ (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{i_0-1}, 0, \hat{y}_{i_0+1}, \dots, \hat{y}_{N-1}) \end{cases}$$

が問題4の最小点である。

系 3.4

$$\frac{N}{2} \left(\bigwedge_1^{N-1} a_i \right) \leq F_N(a) = G_N(a) \leq \frac{1}{2} \left(a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1} \right).$$

命題 3.2 と 命題 3.3 より, 次の逆転関係が得られる.

命題 3.4 $a \in R_+^{N-1}$ としておく.

(i) N が偶数のとき

$$\begin{aligned} G_N(a) &= F_N(a) \\ &\leq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \\ &\leq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \\ &\leq f_N(a) = g_N(a) \end{aligned}$$

(ii) N が奇数のとき, 特に $a_1 = 0$ または $a_{N-1} = 0$ ならば,

$$\begin{aligned} G_N(a) &= F_N(a) \\ &\leq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}) \\ &\leq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \\ &\leq f_N(a) = g_N(a). \end{aligned}$$

注意 1 (i) N を偶数とする.

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1} < a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} < a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}$$

のとき,

$$\begin{aligned} G_N(a) &= F_N(a) \\ &\leq a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1} \\ &< a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} \\ &\leq f_N(a) = g_N(a). \end{aligned}$$

(ii) N を奇数とする.

$$(ii-a) \quad a_1 = 0, \quad a_3 + a_5 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1} < a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}$$

のとき

$$G_N(a) = F_N(a)$$

$$\begin{aligned}
&\leq a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1} \\
&< a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1} \\
&= a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+ \\
&\leq f_N(a) = g_N(a)
\end{aligned}$$

$$(ii-b) \quad a_{N-1} = 0, \quad a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-3} < a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2}$$

のとき

$$\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a) \\
&\leq a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1} \\
&< a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+ \\
&\leq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}$$

したがって、以上 3 つの場合には、逆転問題の最適値は主問題の最適値より小さい。

注意 2 $N=3$, $a_1 \geq a_2 > 0$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
f_3(a) &= \min x_1 + x_2 + x_3 \\
&\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \geq a_1 \\
&\quad \quad x_2 + x_3 \geq a_2 \\
&\quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

より

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, a_1, 0) \text{ のとき, } f_3(a) = a_1.$$

他方

$$\begin{aligned}
F_3(a) &= \max x_1 + x_2 + x_3 \\
&\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq a_1 \\
&\quad \quad x_2 + x_3 \leq a_2 \\
&\quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

だから,

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (a_1, 0, a_2) \text{ のとき, } F_3(a) = a_1 + a_2,$$

したがって

$$F_3(a) = a_1 + a_2 > a_1 = f_3(a).$$

となり, 命題 3.4 (ii) には 条件「 $a_1 = 0$ または $a_{N-1} = 0$ 」は 欠かせないことがわかる。この例では, 逆転問題の 最大値は主問題の最小値より大きくなっている。

命題 3.2, 3.3 で与えた最適値関数 f_N, g_N, F_N, G_N に対する上界・下界は, 非負単調列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ を考えると, 可成り厳密であることがわかる。

系 3.5 パラメータ $a = (a_1, a_2, \dots, a_{N-1})'$ が 非負単調非減少列

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{N-1}$$

のとき, 問題 1 ~ 問題 4 は 共通の最適値と以下の最適点をもつ。

(i) N が偶数のとき, 4 問題は共通の最適値

$$(i-a) \quad f_N(a) = g_N(a) = F_N(a) = G_N(a) = a_1 + a_3 + \dots + a_{N-1}$$

と次の最適点をもつ。

$$(i-b-1) \quad (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) = (a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots, a_{N-1}, 0)$$

は問題 1 の最小点である。

$$(i-b-2) \quad (y_1^*, y_2^*, \dots, y_{N-1}^*) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$$

は問題 2 の最大点である。

$$(i-b-3) \quad (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) = (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots, 0, a_{N-1})$$

は問題 3 の最大点である。

(i-b-4) $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{N-1}) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ は問題4の最小点である。

(ii) N が奇数 a とき, 4 問題は以下の最適解をもつ。

$$\begin{aligned} \text{(ii-a)} \quad f_N(a) &= g_N(a) = a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1} = F_N(a) = G_N(a) \end{aligned}$$

(ii-b-1) $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) = (0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \dots, a_{N-1}, 0)$ は問題1の最小点である。

(ii-b-2) $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_{N-1}^*) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ は問題2の最大点である。

(ii-b-3) $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) = (a_1, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots, 0, a_{N-1})$ は問題3の最大点である。

(ii-b-4) $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{N-1}) = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$ は問題4の最小点である。

参考文献

- [1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.
- [2] 岩本 誠一, 「動的計画論」, 九州大学出版会, 1987年.