

短区間における Dirichlet 約数問題の 平均値定理について

山口大・理 木内 功 (Isao Kiuchi)
名大・多元数理 谷川 好男 (Yoshio Tanigawa)

§1. 序.

約数関数 $d(n)$ に対して

$$\Delta(x) = \sum_{n \leq x}' d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1) - \frac{1}{4}$$

とおく. ここで γ は Euler 定数で, $\sum_{n \leq x}'$ は x が整数のときは最後の項を $d(x)/2$ にすることを意味する. このとき $\Delta(x) \ll x^{1/4+\varepsilon}$ を主張するのが Dirichlet 約数問題であるが, 現在のところ Huxley によって $\Delta(x) \ll x^{23/73}(\log x)^{315/146}$ が知られている. 一方 Tong [9] は

$$\int_1^X \Delta(x)^2 dx = \frac{\zeta(3/2)^4}{6\pi^2 \zeta(3)} X^{3/2} + O(X \log^5 X)$$

を証明し, 平均的には上の予想が正しいことを示した. ゼータ関数の立場からは約数関数 $\sigma_a(n)$ ($-1 < a \leq 0$) の振る舞いを考察するのが重要である. そこで有理数 $r = h/k$, $(h, k) = 1$, $k > 0$ に対し

$$\Delta_0(x; r) = \sum_{n \leq x}' d(n)e(rn) - k^{-1}(\log x + 2\gamma - 1 - 2 \log k)x - E_0(0; r)$$

および

$$\Delta_a(x; r) = \sum_{n \leq x}' \sigma_a(n)e(rn) - k^{-1+a} \zeta(1-a)x - \frac{k^{-1-a} \zeta(1+a)}{1+a} x^{1+a} - E_a(0; r)$$

($-1 < a < 0$) の 2 乗平均が問題にされてきた. ここで $e(\alpha) = \exp(2\pi i \alpha)$, また $E_a(0; r)$ は, $\operatorname{Re} s > 1$ で定義される次の関数

$$E_a(s; r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)e(rn)}{n^s}$$

を全 s 平面に解析接続したものの $s = 0$ における値である. 実際

$$c_1(a) = \frac{1}{(6+4a)\pi^2} \frac{\zeta(3/2-a)\zeta(3/2+a)\zeta^2(3/2)}{\zeta(3)}$$

とおき、

$$\int_1^X |\Delta_a(x; r)|^2 dx = c_1(a) k X^{3/2} + F_a(X; r)$$

によって関数 $F_a(X; r)$ を定めると、 $1 \leq k \leq X$ のとき

$$F_a(X; r) = O(k^2 X^{1+\varepsilon} + k^{3/2} X^{5/4+a/2+\varepsilon})$$

なる評価が成り立つことが、 $a = 0$ の時は Jutila [3]、 $-1/2 < a < 0$ の時は木内 [4] により示されている. 一方 $k = 1$ のときは更に詳しく、

$$\int_1^X |\Delta_a(x; 1)|^2 dx = \begin{cases} c_1(a) X^{3/2+a} + O(X) & \dots \quad -1/2 < a < 0, \\ \frac{\zeta(3/2)^2}{24\zeta(3)} X \log X + O(X) & \dots \quad a = -1/2, \\ O(X) & \dots \quad -1 < a < -1/2 \end{cases}$$

が Meurman [8] によって得られている. 最近、柳沢直樹氏 [10] は $-1 < a < -1/2$ の時、Chowla-Walum の方法によって

$$\int_1^X |\Delta_a(x; 1)|^2 dx = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1+a}(n)^2}{n^2} X + O(X^{3/2+a} \log X)$$

を示し、Meurman の最後の場合の結果を改良することに成功している.

これらの関数の局所的な挙動を調べるには short intervals における積分をみるのが重要である. $d(n)$ の場合に Jutila [2] は、 $X \geq 2$, $1 \leq U \ll X^{1/2} \ll H \leq X$ の条件下で

$$\begin{aligned} & \int_X^{X+H} |\Delta_0(x+U; 1) - \Delta_0(x; 1)|^2 dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \leq \frac{X}{2U}} \frac{d(n)^2}{n^{3/2}} \int_X^{X+H} x^{1/2} \left| e\left(U \sqrt{\frac{n}{x}}\right) - 1 \right|^2 dx + O(X^{1+\varepsilon}) + O(HU^{1/2} X^\varepsilon) \end{aligned}$$

が成り立つことを示し、更に系として $HU \ll X^{1+\varepsilon}$, $X^\varepsilon \ll U \leq \frac{1}{2} X^{1/2}$ のとき、

$$\int_X^{X+H} |\Delta_0(x+U; 1) - \Delta_0(x; 1)|^2 dx \asymp HU \log^3(X^{1/2}/U)$$

を示した.

我々はこの Jutila の結果を $\Delta_a(x; r)$ の場合に拡張した. 即ち

定理. $X \geq 2$, $1 \leq U \ll X^{1/2} \ll H \leq X$, $4kU \leq X$ かつ $-1 < a \leq 0$ とする.
このとき

$$(1) \quad \int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U; r) - \Delta_a(x; r)|^2 dx \\ = \frac{k}{4\pi^2} \sum_{n \leq \frac{X}{4kU}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} \left| e\left(\frac{U}{k} \sqrt{\frac{n}{x}}\right) - 1 \right|^2 dx + K_a(X; r)$$

によって誤差項 $K_a(X; r)$ を定めると

$$K_a(X; r) \ll k^2 X^{1+\varepsilon} + \begin{cases} k^{3/2} H X^{1/4+a/2+\varepsilon} & \dots \quad -1/2 < a \leq 0, \\ 0 & \dots \quad -1 < a \leq -1/2 \end{cases}$$

が成り立つ.

またこの定理より次の系を得る.

系. k, U, H には定理の条件、及び $k^3 < U$, $H = o(X)$ を仮定する. この時 $-1/2 < a \leq 0$ に対し

$$K_a(X; r) \ll k^2 X^{1+\varepsilon} + \begin{cases} k^{3/2+a} H U^{1/2+a} X^\varepsilon & \dots \quad -1/4 \leq a \leq 0, \\ k^{1-a} H U^{1/2+a} X^\varepsilon & \dots \quad -1/2 < a < -1/4 \end{cases}$$

が成り立つ. 更に $k^{2+2a} X^{1+\varepsilon} \ll H U^{1+2a}$, $k^{\max(3+6a, 2+2a)} X^\varepsilon \ll U^{1+2a}$, $U \leq \frac{kX^{1/2}}{2}$ が満たされているならば,

$$\int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U; r) - \Delta_a(x; r)|^2 dx \asymp \begin{cases} H U \log^3\left(\frac{kX^{1/2}}{U}\right) & \dots \quad a = 0, \\ k^{-2a} H U^{1+2a} & \dots \quad -1/2 < a < 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

注. $-1 < a \leq -1/2$ なる a に対しては trivial estimate により

$$\int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U; r) - \Delta_a(x; r)|^2 dx \ll k^2 X^{1+\varepsilon}$$

であるが、これは Meurman の場合と同様に $a = -1/2$ が critical な点であることを意味している.

§2. 定理の略証.

k を正の整数、 h を k と互いに素な整数とすると、 $\bmod k$ の剰余類 $\bar{h}$ を $h\bar{h} \equiv 1 \pmod{k}$ で定める. また有理数 $r = h/k$, $k > 0$, $(h, k) = 1$ に対し、 $\bar{r} = \bar{h}/k$ とおく. さて定理の証明には木内 [4] で示されている次の truncated Voronoï formula を使う. 即ち、 $X \leq x \ll X$ のとき

$$\Delta_a(x; r) = \frac{k^{1/2} x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n) e(-\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \cos \left(4\pi \frac{\sqrt{nx}}{k} - \frac{\pi}{4} \right) + O(kX^\epsilon).$$

そこで

$$\begin{aligned} S_1(x; r) &= \frac{k^{1/2} x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n) \cos(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp \left(i \left(4\pi \frac{\sqrt{nx}}{k} - \frac{\pi}{4} \right) \right), \\ S_2(x; r) &= \frac{k^{1/2} x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n) \cos(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp \left(i \left(4\pi \frac{\sqrt{n(x+U)}}{k} - \frac{\pi}{4} \right) \right), \\ T_1(x; r) &= \frac{k^{1/2} x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n) \sin(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp \left(i \left(4\pi \frac{\sqrt{nx}}{k} - \frac{\pi}{4} \right) \right), \\ T_2(x; r) &= \frac{k^{1/2} x^{1/4+a/2}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X} \frac{\sigma_a(n) \sin(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/4+a/2}} \exp \left(i \left(4\pi \frac{\sqrt{n(x+U)}}{k} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} I &= \int_X^{X+H} (\operatorname{Re}(S_2(x; r) - S_1(x; r)))^2 dx, \\ J &= \int_X^{X+H} (\operatorname{Re}(T_2(x; r) - T_1(x; r)))^2 dx \end{aligned}$$

と置くと Cauchy-Schwarz の不等式により $X^{1/2} \ll H \leq X$ に対し

$$\begin{aligned} &\int_X^{X+H} |\Delta_a(x+U; r) - \Delta_a(x; r)|^2 dx \\ &= I + J + O(kH^{1/2}X^\epsilon(|I|^{1/2} + |J|^{1/2}) + k^2HX^\epsilon) \end{aligned}$$

と書ける. 従って I, J に関する次の評価を示せば十分である.

$$\begin{aligned} (2) \quad I &= \frac{k}{4\pi^2} \sum_{\substack{n \leq X \\ n \leq 4kU}} \frac{\sigma_a(n)^2 \cos^2(2\pi\bar{r}n)}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} \left| e \left(\frac{U}{k} \sqrt{\frac{n}{x}} \right) - 1 \right|^2 dx \\ &\quad + O(k^2 X^{1+\epsilon}) + \begin{cases} O(kH(kU)^{1/2} \log^3 X) & \dots & a = 0, \\ O(kH(kU)^{1/2+a}) & \dots & -1/2 < a < 0, \\ 0 & \dots & -1 < a \leq -1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(3) \quad J = \frac{k}{4\pi^2} \sum_{n \leq \frac{X}{4kU}} \frac{\sigma_a(n)^2 \sin^2(2\pi \bar{r}n)}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} \left| e\left(\frac{U}{k} \sqrt{\frac{n}{x}}\right) - 1 \right|^2 dx$$

$$+ O(k^2 X^{1+\epsilon}) + \begin{cases} O(kH(kU)^{1/2} \log^3 X) & \dots & a=0, \\ O(kH(kU)^{1/2+a}) & \dots & -1/2 < a < 0, \\ 0 & \dots & -1 < a \leq -1/2. \end{cases}$$

どちらも同じように示せるので I の方を簡単に説明しよう. まず $S_j(x; r)$ の和を $X/(4kU)$ で二つに分ける. 即ち、

$$S_j(x; r) = \sum_{n \leq \frac{X}{4kU}} + \sum_{\frac{X}{4kU} < n \leq X} =: S_{j1}(x; r) + S_{j2}(x; r).$$

この時 I_j ($j = 1, \dots, 5$) を

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_X^{X+H} |S_{21}(x; r) - S_{11}(x; r)|^2 dx, \\ I_2 &= \int_X^{X+H} (S_{21}(x; r) - S_{11}(x; r))^2 dx, \\ I_3 &= \int_X^{X+H} (|S_{12}(x; r)|^2 + |S_{22}(x; r)|^2) dx, \\ I_4 &= \int_X^{X+H} (S_{22}(x; r) - S_{12}(x; r)) (\overline{S_{21}(x; r)} - \overline{S_{11}(x; r)}) dx, \\ I_5 &= \int_X^{X+H} (S_{22}(x; r) - S_{12}(x; r)) (S_{21}(x; r) - S_{11}(x; r)) dx \end{aligned}$$

で定義すれば

$$I = \frac{1}{2} I_1 + O(|I_2| + |I_3| + |I_4| + |I_5|)$$

と書ける. I_1 については被積分関数を 2 乗し、first derivative test 及び、部分和

$$(4) \quad \sum_{n \leq x} \sigma_a(n)^2 = \frac{\zeta^2(1-a)\zeta(1-2a)}{\zeta(2-2a)} x + O(x^{1+a/4} \log^2 x)$$

を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{k}{2\pi^2} \sum_{n \leq N} \frac{\sigma_a(n)^2 \cos^2(2\pi \bar{r}n)}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} \left| e\left(\frac{U}{k} \sqrt{\frac{n}{x}}\right) - 1 \right|^2 dx \\ &\quad + O(k^2 X^{1+\epsilon}) \end{aligned}$$

が得られる. 他の I_j についても同様の議論をすることで

$$I_3 \ll k^2 X^{1+\varepsilon} + \begin{cases} kH(kU)^{1/2} \log^3 X & \dots & a = 0, \\ kH(kU)^{1/2+a} & \dots & -1/2 < a < 0, \\ 0 & \dots & -1 < a \leq -1/2 \end{cases}$$

および

$$I_j \ll k^2 X^{1+\varepsilon} \quad (j = 2, 4, 5)$$

が成り立つことがわかる. これで (2) の評価が得られた. (3) も同様であり、これらより定理の主張が得られる.

次に系の証明をスケッチしよう. まず実数 x に対して

$$f(x) = |\exp(ix) - 1|^2 - x^2$$

で関数 $f(x)$ を定義すると $-x^4/12 \leq f(x) < 0$ という不等式が成り立つことに注意する. $-1/2 < a < 0$, $k^3 < U < \frac{kX^{1/2}}{2}$, $H = o(X)$ と仮定する. 定理の右辺の和で $n \leq \frac{k^2 X}{4U^2}$ までの項の寄与を考える. 即ち

$$\begin{aligned} (5) \quad & \frac{k}{4\pi^2} \sum_{n \leq \frac{k^2 X}{4U^2}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} \left(4\pi^2 \frac{U^2}{k^2} \frac{n}{x} + f\left(2\pi \frac{U}{k} \sqrt{\frac{n}{x}}\right) \right) dx \\ &= k^{-1} U^2 X^{-1/2+a} H(1+o(1)) \sum_{n \leq \frac{k^2 X}{4U^2}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{1/2+a}} \\ & \quad + \frac{k}{4\pi^2} \sum_{n \leq \frac{k^2 X}{4U^2}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}} \int_X^{X+H} x^{1/2+a} f\left(2\pi \frac{U}{k} \sqrt{\frac{n}{x}}\right) dx. \end{aligned}$$

(4) と部分総和法により上の右辺の第 1 式は

$$\frac{2\zeta^2(1-a)\zeta(1-2a)}{(1-2a)\zeta(2-2a)} k^{-1} U^2 X^{-1/2+a} H \left(\frac{k^2 X}{2U^2} \right)^{1/2-a} (1+o(1)).$$

一方、第 2 式の絶対値は

$$\frac{\zeta^2(1-a)\zeta(1-2a)\pi^2}{6(3-2a)\zeta(2-2a)} k^{-1} U^2 X^{-1/2+a} H \left(\frac{k^2 X}{4U^2} \right)^{1/2-a} (1+o(1)).$$

で上から評価される. $a > -1/2$ の時 $2/(1-2a) > \pi^2/(6(3-2a))$ であるから (5) の左辺は

$$\asymp k^{-2a} U^{1+2a} H.$$

また残りの項からの寄与は、正であり、かつ

$$kX^{1/2+a}H \sum_{\frac{k^2X}{4U^2} < n \leq \frac{X}{4kU}} \frac{\sigma_a(n)^2}{n^{3/2+a}} \ll k^{-2a}U^{1+2a}H.$$

よって系の主張が得られた。 $a=0$ の時も同様にして得られる。

- 注. 1. 最近、柳沢直樹氏により、特殊な場合の系の主張は漸近式に改良された。
 2. 定理の証明について詳しくは論文 [5] を見てください。
 3. Jutila は [2] の中で、Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ の critical line 上での 2 乗平均の残余項について、short interval での 2 乗平均の結果を証明なしで述べている。我々は最近この結果を critical strip $1/2 < \text{Re } s < 1$ に拡張し、漸近的な結果を得た (cf. [6]).

参考文献

- [1] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley-Sons, New York, 1985.
- [2] M. Jutila, On the divisor problem for short intervals, *Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI* **186**, 23-30 (1984).
- [3] M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1987.
- [4] I. Kiuchi, On an exponential sum involving the arithmetic function $\sigma_a(n)$, *Math. J. Okayama Univ.* **29**, 193-205 (1987).
- [5] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, The mean value theorem of the divisor problem for short intervals, to appear in *Archiv der Math.* **70** (1998).
- [6] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, The mean value theorem of the Riemann zeta-function in the critical strip for short intervals, preprint (1998).
- [7] T. Meurman, On the mean square of the Riemann zeta-function, *Quart. J. Math. Oxford Ser.(2)* **38**, 337-343 (1987).
- [8] T. Meurman, The mean square of the error term in a generalization of Dirichlet's divisor problem, *Acta Arith.* **74**, 351-364 (1996).
- [9] K.-C. Tong, On divisor problem III, *Acta Math. Sinica* **6**, 515-541 (1956).
- [10] N. Yanagisawa, An asymptotic formula for a certain mean value in a divisor problem, preprint (1998).