

Scheme の Brauer 群について: B の 2

阪大 理 小崎 高太郎

I B の 1 に続いて scheme の Brauer 群の基礎的部分について GB II に従い étale cohomology の観点から調べる。以下考える scheme は簡単のためすべて noetherian とし特に断らないかぎり考える topology は étale topology とする。但し $X \in \mathcal{A}$ を考えると $\mathcal{A}$ は base prescheme X のみを noetherian と仮定する。

§1 $H^2(X, G_m, X)$ の 2, 3 の性質について

1° X を prescheme とし $X \in \mathcal{A}$ 上の sheaf of invertible rational functions R_X^* を presheaf $\text{Gal}(X \in \mathcal{A}) \ni Y/X \rightarrow \{Y \text{ 上の invertible rat. func. に } \mathcal{A} \text{ が presheaf になっている事は容易に associate した sheaf とする。更に } \varepsilon: X \in \mathcal{A} \rightarrow X_{\text{zan}}$ を canonical morphism とすると $\varepsilon_*(R_X^*) = R_{X_{\text{zan}}}^*$ (Zariski topology の意味での inv. rat. func. の sheaf) である。 X が artinian scheme の場合は $G_{m, X} \cong R_X^*$ で、一般には X の maximal points を $x_1, \dots, x_n$ と

(1)

すると $j: S = \coprod \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x_i} \rightarrow X$ を canonical morphism とすれば、 $G_{m,S} \cong R_S^*$ で、 $j_* (G_{m,S}) \cong R_X^*$ である事は容易にわかる。

2° prescheme X に対し irreducible closed subset $\overline{\{x\}}$ が X の associated cycle であるとは、 $\mathcal{O}_{X,x}$ の maximal ideal $\mathfrak{m}_x$ が $\mathcal{O}_X$ に associate していること、i.e. $\mathcal{O}_{X,x}$ のある元の annihilator ideal になっていること。 $X = \text{Spec } A$ (A : noetherian) なるときは x に対応する ideal $\mathfrak{p}$ が A の associated prime であることと同値である。更に associated cycles のうち maximal でないものを imbedded associated cycle とする。

3° X が imbedded associated cycle をもたないとなると étale sheaves の natural homomorphism $G_{m,X} \rightarrow R_X^*$ は injective

① $Y \rightarrow X$ が flat なら Y も imbedded associated cycle をもたない (E.G.A. IV (5.7.5) (6.4.2)) ことに注意し更に $Y_X \in \text{flat}(U)$

で $Y = \text{Spec } A$ と affine なものが topological generator となる事から canonical map $A^* \rightarrow \prod A_{\mathfrak{p}_i}^*$ (但し $\mathfrak{p}_i$ は A の minimal primes) が injective なる事をいへばよい。さて

(1) $= \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ を reduced primary decomposition とする。仮定より $\mathfrak{q}_i$ に対応する prime を $\mathfrak{p}_i$ としてよい。故に $\mathfrak{q}_i = \text{Ker}(A \rightarrow A_{\mathfrak{p}_i})$ $\therefore A \rightarrow \prod A_{\mathfrak{p}_i}$ は injective. //

そこで exact sequence $0 \rightarrow G_{m,X} \rightarrow R_X^* \rightarrow \text{Div } X \rightarrow 0$
(2)

により X 上の sheaf of Cartier divisors を定義する. $\mathcal{O} : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ を canonical morphism とする. exact sequence $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(G_m) \rightarrow \mathcal{O}_X(\mathbb{A}_X^*) \rightarrow \mathcal{O}_X(Div X) \rightarrow R\mathcal{O}_X(G_m)$ を得るが $R\mathcal{O}_X(G_m) = \mathcal{O}_X(G_m) = \mathcal{O}_X^*$, $\mathcal{O}_X(\mathbb{A}_X^*) = R_{X_{\text{zar}}}^*$ だから $\mathcal{O}_X(Div X) \cong Div X_{\text{zar}} (= R_{X_{\text{zar}}}^* / \mathcal{O}_X^*)$

4° Classical と Cartier divisors の sheaf との関係.

sheaf of invertible meromorphic functions M_X^* を presheaf $\text{Cat}(X_{\text{ét}}) \ni Y/X \mapsto \{\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \text{ の全商環の可逆元} \}$ により presheaf になっている事は容易) に associate した sheaf とする. X が reduced ならば canonical isomorphism $M_X^* \cong R_X^*$ が存在する. $M_X^* / \mathcal{O}_X^*$ が classical と Cartier divisors の sheaf である. c.f. E.G.A. IV. (20.2.11), (20.2.13) (ii)

5° $X^{(1)} = \{x \in X \mid \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1\}$ と置て. 函数 $\text{Cat}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \{\text{formal sum } \sum_{x \in X^{(1)}} n_x \overline{\{x\}} \mid n_x \text{ integer } \{n_x\} \text{ locally finite}\}$ を考える. $Y/X, Z/X \in \text{Cat}(X_{\text{ét}})$ とすると $Y/X \xrightarrow{f} Z/X$ は étale ならば $\dim \mathcal{O}_{Z,y} = 1$ ならば $y \in f^{-1}(z)$ に対して $\dim \mathcal{O}_{Y,y} = 1$ そこで $f^*(\overline{\{z\}}) = \sum_{y \in f^{-1}(z)} [k(y) : k(z)] \overline{\{y\}}$ を linear に拡張する事によって上の函数は presheaf とする事ができる. それに associate した sheaf を Z_X^1 と書て sheaf of Weil divisors と呼ぶ. $x \in X$ に対し Z_x を $X_{\text{ét}} = \text{Spec } k(x)_{\text{ét}}$ 上に $\mathbb{Z}$ (integers) で定義せられた constant (abelian) sheaf Z_L . $\text{in} : x \rightarrow X$ を canonical

morphism とすると $Z'_X \cong \coprod_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(Z_2)$ は容易にわかる。

6° $Y = \text{Spec } A$ (A : noetherian) とし $f \in A$ は not zero-divisor とする。

$\text{Spec}(A/fA)$ の maximal points に対応する A の primes を p_1, p_2 とすると $\dim A_{\mathfrak{p}_i}/fA_{\mathfrak{p}_i} = 0$ である。 f は $A_{\mathfrak{p}_i}$ 上でも not zero-divisor である。 $\dim A_{\mathfrak{p}_i} = 1$ 。 $n_{p_i} = \text{length}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(A_{\mathfrak{p}_i}/fA_{\mathfrak{p}_i})$ とし

$C'_A(f) = \sum n_{p_i} \overline{\{p_i\}}$ なる対応を考える。 $f \in A^*$ ならば $C'_A(f) = 0$ である。 $C_A: \{A \text{ の全商環の可逆元} \} / A^* \rightarrow \{ \text{Spec } A \text{ の Weil div} \}$

なる写像を得るが $C'_A(fg) = C'_A(f) + C'_A(g)$ よりこれは

group homomorphism である。 更に $\text{Spec } B \xrightarrow{g} \text{Spec } A$ は étale morphism $A \xrightarrow{g} B$ を対応する ring homomorphism とすると

と $g^*(C_A(f)) = C_B(g(f))$ である (E.G.A. IV (2). 1.4.4)

これをを用いて étale sheaves の morphism $M_X^*/\mathcal{O}_X^* \rightarrow Z_X^1$

を得る。 更に X が reduced ならば morphism $\text{Div}_X \rightarrow Z_X^1$

を得るが ① X が normal ならば $\text{Div}_X \rightarrow Z_X^1$ は injective

② X が regular ならば isomorphic

である。 証明は normal (regular) が étale morphism で得られる事、及び E.G.A. IV (2). 6.9) による。

7° étale cohomology groups と projective limite との関係に關して次の命題を用いる。

Proposition. 0. (S.G.A. A. VII 59)

I を上向きに有向集合とし $\{X_i\}_{i \in I}$ を quasi-compact, quasi-

(X)

separated preschemes の projective system とする。この transition morphism $u_{j,i}: X_j \rightarrow X_i$ は affine とすると $X = \varprojlim X_i$ は存在する。 $i_0 \in I$ に対し G_{i_0} を X_{i_0} 上の locally of finite presentation の commutative group prescheme $i \geq i_0$ に対し $G_i = G_{i_0} \times_{X_{i_0}} X_i$ $G_\infty = G_{i_0} \times_{X_{i_0}} X$ とすると canonical morphism $\varprojlim H^n(X_i, G_i) \xrightarrow{X_{i_0}} H^n(X, G_\infty)$ は任意の n に対して同型で G が non-commutative の場合には $n=1$ に対して同型である。

8° Lemma 1.1 $X \in \mathcal{A}$ $\mathcal{F} \in \mathcal{A} = \text{Spec } k[\mathcal{A}]$ 上の abelian sheaf $i_X: X \rightarrow \mathcal{A}$ を canonical morphism とすると $H^q(X, i_{X*}(\mathcal{F}))$ 及び $H^q(X, R_X^* \mathcal{F})$ は $q \geq 1$ に対して torsion groups である。

① Leray spectral sequence と discrete space 上の sheaf の cohomology of dim > 0 が torsion group になるとより。そこで X が imbedded associated cycle をもたないとする。 $\Rightarrow$ exact sequence $0 \rightarrow G_{m,X} \rightarrow R_X^* \rightarrow D\tilde{w}_X \rightarrow 0$ より exact sequence $H^q(X, R_X^*) \rightarrow H^q(X, D\tilde{w}_X) \xrightarrow{j} H^{q+1}(X, G_{m,X}) \rightarrow H^{q+1}(X, R_X^*)$ を得る。故に Lemma 1.1 を用いて

Corollary 1.2 X が imbedded associated cycle をもたないならば $j: H^q(X, D\tilde{w}_X) \rightarrow H^{q+1}(X, G_{m,X})$ の kernel, cokernel は $q \geq 1$ に対して torsion group である。

Proposition 1.3 X が regular かつ $\dim X \leq 1$ とすると $q \geq 2$ に対して $H^q(X, \mathcal{G}_{m,X})$ は torsion group である。

① Cor. 1.2 より $H^1(X, D\omega_X)$ が $q \geq 1$ に対して torsion group である事をいへばよい。② X が regular 有るより $D\omega_X \cong Z_X^1 \cong \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(Z_x)$ 故に $H^q(X, \cdot)$ が inductive limits と commute する事より lemma 1.1 より出る。③ $\dim X \leq 1$ 有る $D\omega_X$ は skyscraper sheaf として $D\omega_X \cong \bigoplus_{x \in \text{closed}} i_{x*}(i_x^*(D\omega_X))$ として再び lemma 1.1 による。

Remark. X は noetherian である canonical map $B_X(X) \rightarrow H^2(X, \mathcal{G}_{m,X})$ の image は torsion group である $B_X(X) = H^2(X, \mathcal{G}_{m,X})$ 有るためには $H^2(X, \mathcal{G}_{m,X})$ が torsion group になる事が必要。
 $q = 0$ 以下に於て X の maximal points を $x_1, \dots, x_n$ としたとき canonical map $B_X(X) \rightarrow \bigoplus_i B_{X_i}(X_i)$ ($X_i = \text{Spec } k(X_i)$) によって同型する。

Lemma 1.4. $H^1(X, R_X^*) = 0$ として canonical map $H^2(X, R_X^*) \rightarrow \bigoplus_i H^2(X_i, R_{X_i}^*)$ は injective

① $S_i = \text{Spec } \mathcal{O}_{X, x_i}$ $j_S: S = \bigcup S_i \rightarrow X$ を canonical morphism とする。spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(X, R^q j_{S*}(\mathcal{G}_{m,S})) \Rightarrow H^*(S, \mathcal{G}_{m,S})$ に於て S が artinian 有る事より $R^q j_{S*}(\mathcal{G}_{m,S}) = 0$ $H^1(S, \mathcal{G}_{m,S}) = 0$ として exact sequence $0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1 \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow H^2$ より $E_2^{1,0} = H^1(X, j_{S*}(\mathcal{G}_{m,S})) = H^1(X, R_X^*) = 0$ として $E_2^{2,0} = H^2(X, R_X^*)$

$$\rightarrow H^1(S, G_{m,S}) = \coprod H^1(S_i, G_{m,S_i}) = \coprod H^1(X_i, G_{m,X_i}) (\because G_m \text{ free})$$

は injective

Proposition 1.4 X が embedded associated cycle をもた

ないとする $\hookrightarrow$ exact sequence $0 \rightarrow H^1(X, D\omega_X) \rightarrow H^2(X, G_{m,X})$

$\rightarrow H^2(X, R_X^*) \rightarrow H^2(X, D\omega_X) \rightarrow \dots$ を得る。更に canonical map $H^2(X, G_{m,X}) \rightarrow \coprod H^2(X_i, G_{m,X_i})$ の kernel は $H^1(X, D\omega_X)$

⑤ lemma 1.3 による。 $\hookrightarrow H^1(X, D\omega_X) = 0$ となる

Lemma 1.5 F は torsion free to abelian group M である

とした $\text{Spec } k(X)$ 上の constant sheaf とする。

$$H^1(X, i_{X*}(F)) = 0$$

⑤ $G = \text{Gal}(k(X)/k(X))$ とすると $H^1(X, i_{X*}(F)) \hookrightarrow H^1(X, F) = H^1(G, M) = \varinjlim \text{Hom}(G/H, M) = 0$ (H normal $[G:H] < \infty$)

Proposition 1.6 X が regular $\wedge$ $\dim X \leq 1$ かつ

closed point $x \in X$ に対し $k(x)$ が separably closed ならば canonical map $H^2(X, G_{m,X}) \rightarrow \coprod_i H^2(X_i, G_{m,X_i})$ は injective

⑤ X regular ならば $D\omega_X \cong \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(\mathbb{Z}_2)$ である Prop 1.4 と lemma 1.5 より出る。④の場合 $D\omega_X \cong \bigoplus_{x \in \text{closed}} i_{x*}(i_x^*(D\omega_X))$ で $H^1(X, D\omega_X) = \coprod H^1(X, i_{x*}(i_x^*(D\omega_X))) \hookrightarrow \coprod H^1(X, i_x^*(D\omega_X)) = 0$

Corollary 1.7 1.6 の条件の下に canonical map

$$\text{Br}(X) \rightarrow \coprod_i \text{Br}(X_i) \text{ は injective}$$

の結果は X が regular affine scheme の場合に限る

Auslander - Goldman [1] によって得られている。

§2. $B_n(X)$ と $H^2(X, G_{m,x})$ の関係について

$H^2(X, G_{m,x})$ は一般には torsion group とはならない (Mumford)
 かつ $B_n(X)$ と $H^2(X, G_{m,x})$ はおなうずしも一致しない。

Lemma 2.1 $X = \text{Spec } A$ を local scheme とする。 $\xi \in H^2(X, G_m)$
 が $B_n(X)$ の元であるためには finite étale surjective morphism
 $Y = \text{Spec } B \rightarrow X = \text{Spec } A$ が存在して $f^*(\xi) = 0$ (trivial) といふ)
 が必要であり, finite free A -algebra B が存在して $f: Y = \text{Spec } B$
 $\rightarrow X = \text{Spec } A$ によって $f^*(\xi) = 0$ になる事充分である。

① 必要性は B の 1 による。 充分性を示す。 finite surjective
 morphism $f: Y \rightarrow X$ に関する spectral sequence (S.G.A. IV (8.1))
 $E_2^{p,q} = H^p(Y/X, \mathcal{H}^q(G_{m,x})) \Rightarrow H^*(X, G_{m,x})$ に対して $\mathcal{H}^1(G_m)(Y \times_X - Y \times_X)$
 $= H^1(Y \times_X - Y \times_X, G_m) = H^1(Y \times_X - Y \times_X, G_m) = 0$ ($\because Y \times_X - Y \times_X$ semi-local)
 故に exact sequence $0 \rightarrow H^2(Y/X, G_m) \rightarrow H^2(X, G_{m,x}) \rightarrow H^2(Y/X, \mathcal{H}^2(G_m))$
 を得る。 $H^2(Y/X, \mathcal{H}^2(G_m)) = \text{Ker}(H^2(Y, G_m) \rightarrow H^2(Y \times_X Y, G_m))$
 故に exact sequence $0 \rightarrow H^2(Y/X, G_m) \rightarrow H^2(X, G_{m,x}) \rightarrow H^2(Y, G_m)$
 を得る。 $A_{\mathbb{Z}}$ によれば $B_n(Y/X) \hookrightarrow H^2(Y/X, G_m)$ 故に ξ
 に対応する $B_n(Y/X) \subset B_n(X)$ の π をとればよい。

Lemma 2.2. $\dim X = 0$ ならば $B_n(X) \cong H^2(X, G_{m,x})$

① $X = \text{Spec } A$ A artinian local といふ。 A の剰余
 体を k とする $\mathbb{Z}$ $H^2(X, G_{m,x}) \cong H^2(\mathbb{P}^1, G_m)$ ($\because G_{m,x}$ は lisse)

(8)

$Br(X) \cong Br(k) \quad (B \text{ の } 1) \quad \text{且} \rightarrow Br(k) \cong H^2(A, G_m) \text{ (classical)}$

Lemma 2.3 A : noetherian local ring of dim 1, maximal ideal m , $A/m = k$ $X = \text{Spec } A$ とする。そのとき ① k : sep. closed
又は ② A : regular (= discrete valuation ring)
ならば $Br(X) \cong H^2(X, G_{m,X})$

①② A : regular の場合. noetherian local ring B と local flat integral ring homomorphism $\varphi: A \rightarrow B$ で $m_A = B$ の maximal ideal かつ $\bar{\varphi}: A/m \hookrightarrow B/m$ により B/m は A/m の algebraic closure になっているものも存在する。(E. G. A. O_{III} (10.3.1)) $A, B \otimes k = \bar{k}$ が regular だから. B は regular local ring で $\dim B = 1$ (E. G. A. O_{IV} (17.3.3)). B の商体を K と書く。 $\xi \in H^2(A, G_m) \neq H^2(X, G_{m,X})$ をとってくる $H^2(K, G_m)$ への写像は K 上の Brauer 群の元だからある finite separable extension $L = K[x]$ が存在してそこで split する。 x の K 上の最小多項式 $f(x)$ は B 係数で monic としてよい。そこで $C = B[x]/(f(x))$ とおくと C は domain で B -free, $\dim C = 1$ で C の maximal ideals の剰余体は algebraically closed. $\therefore H^2(C, G_m) \rightarrow H^2(L, G_m)$ は injective (Prop 1.6) 故に ξ の $H^2(C, G_m)$ への写像は零。 C は A 上 integral だから C は A -finite subalgebra の inductive limit 故にある A -finite subalgebra D が存在して ξ の $H^2(D, G_m)$ への写像が零 (Prop 0). C は A -flat

既知 torsion free . 既知 D も torsion free で $\text{finitely generated}$
 一方 A は discrete valuation ring. 既知 D は A -free. そこで
 Lemma 2.1 を用いればよい. ① の場合も殆ど同様.

Proposition 2.4 $X = \text{Spec } A$ を local henselian scheme
 とすると $B_2(X) \subseteq H^2(X, G_{m,X})$

② $\bar{A}$ を A の strict henselization とすると $H^2(\bar{A}, G_m) = 0$
 既知ある surjective étale morphism $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ が存
 在して $H^2(B, G_m)$ の逆像は零 (Prop 0) B の A の
 maximal ideal 上の ideal を $\mathfrak{m}$ とすると $B_{\mathfrak{m}}$ は A -finite
 étale (E.G.A. IV (18.5.11)) そこで Lemma 2.1 を用
 いればよい.

Proposition 2.5 X を local scheme l を X の residual
 characteristic と異なる素数とする. $H^2(X, G_m)$ の l -Torsion
 elements がすべて $B_2(X)$ に属する必要充分条件は任意の
 $n > 0$ に対し任意の $\xi \in H^2(X, \mu_{l^n})$ / $\cap \xi \in H^2(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ が
 isotrivial なる事.

① Kummer's exact sequence $0 \rightarrow \mu_{l^n, X} \rightarrow G_{m, X} \xrightarrow{l^n} G_{m, X} \rightarrow 0$
 より exact sequence $0 = H^1(X, G_m) \rightarrow H^2(X, \mu_{l^n}) \rightarrow H^2(X, G_m) \rightarrow H^3(X, G_m)$
 を得るが ここで Lemma 2.1 より $H^3(X, G_m) = 0$ である. 更に $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ と $\mu_{l^n, X}$ は
 finite étale Topology に対し local に同型だから (---) も明か
 である.

Proposition 2.6 (M. Artin) X を体 k 上の lisse な scheme の local ring の scheme とすると $l \neq \text{char}(k)$ に対し $H^2(X, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ の元はすべて isotrivial である。特に $\text{char}(k) \neq l$ なる $\text{Br}(X) \cong H^2(X, \mathbb{G}_m)$

証明は容易でない。

Theorem 2.7 X を noetherian prescheme とし

① $\dim X = 1$, $\forall x \in X$ closed に対し $k(x)$ は separably closed
又は ② $\dim X \leq 2$ X regular とすると $\text{Br}(X) \cong H^2(X, \mathbb{G}_m)$

③ $\exists \in H^2(X, \mathbb{G}_m)$ として先づ $\text{codim} \geq 2$ の closed subscheme Y が存在して $\exists | X-Y \in \text{Br}(X-Y)$ となる事を示す。 X の maximal points を $x_1, \dots, x_n$ $S = \coprod \text{Spec } \mathcal{O}_{X, x_i}$ とすると $H^2(S, \mathbb{G}_m) = \varinjlim_{U \ni x_1, \dots, x_n \text{ open}} H^2(U, \mathbb{G}_m) = \varinjlim_U H^1(U, \text{GP}(n)_U) \cong \varinjlim_U H^1(U, \text{GP}(n)_U)$ に注意すれば

Lemma 2.2 より $\exists$ open dense subscheme $U \subset X$ $\exists | U \subset \text{Br}(U)$ 。もし $Z = X - U$ が $\text{codim} \geq 1$ の irreducible component Z_0 を含めば、その generic point を x とすると Lemma 2.3 により $\text{Br}_l(\mathcal{O}_{X, x}) \cong H^2(\mathcal{O}_{X, x}, \mathbb{G}_m)$ 故に上と同様に x を含む open subscheme V が存在して $\exists | V \subset \text{Br}(V)$ ところが $U \cap V \neq \emptyset$ だから $\exists | U$ に対応する constant rank の Azumaya Algebra を $\mathcal{A}$, $\exists | V$ に対応する constant rank の Azumaya Algebra を $\mathcal{B}$ とすると $\mathcal{A}|_{U \cap V} \sim \mathcal{B}|_{U \cap V}$ 。故に locally free

(11)

$\mathcal{O}_{U,V}$ -Module $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ が存在して $(\mathcal{A}|_{U,V}) \otimes_{\text{End}(\mathcal{E})} \mathcal{E} \cong (\mathcal{B}|_{U,V}) \otimes_{\text{End}(\mathcal{E}')} \mathcal{E}'$
 canonical morphism $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,X} \times U \rightarrow U, V$ を j とすると
 $\dim(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,X} \times U) = 0$ だから $j^*(\mathcal{E}), j^*(\mathcal{E}')$ は free である
 故に適当に open $W \subset V$ をとって $\mathcal{E}|_{U,W}, (\mathcal{E}'|_{U,W})$
 を free である。ゆえに $\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_U(\mathcal{O}_W)$ -Module として
 $U(W)$ に拡張したものを $\mathcal{A}, (\mathcal{A}')$ とする。 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \otimes \text{End}(\mathcal{F})$
 $\mathcal{B}' = \mathcal{B}|_W \otimes \text{End}(\mathcal{F}')$ とすると $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}', \mathcal{B}|_W \sim \mathcal{B}'$ で
 $\mathcal{A}'|_{U,W} \subseteq \mathcal{B}'|_{U,W}$ 故に $U \cup W$ 上の Algebra $\mathcal{C}$ で
 $\mathcal{C}|_U \subseteq \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}|_W \subseteq \mathcal{B}'$ なるものが存在する。 $\mathcal{C}$ は Azumaya
 Algebra になる事は定義から明らか。 noetherian induction
 により始めの主張が証明される。 X が regular の場合 $i_* \mathcal{A} \rightarrow Y$
 $\rightarrow X$ を canonical inclusion $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}_U$ に対応する Azumaya
 Algebra とすると $\text{codim } Y \geq 2$ X regular より $i_*(\mathcal{O}_U) \cong \mathcal{O}_X$
 (E.G. A IV 5.10.5) 更に $i_*(\mathcal{A})$ は coherent (同. 5.11.1)
 更に $\forall W \subset X$ open に対して $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(i_*(\mathcal{A}), \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)(W)$
 $\cong \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_W}(i_*(\mathcal{A})/W, i_*(\mathcal{O}_U)/W), i_*(\mathcal{O}_U)/W)$
 $\cong \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_{U,W}}(\mathcal{A}|_{U,W}, \mathcal{O}_{U,W}), \mathcal{O}_{U,W})$
 $\cong \mathcal{A}(W \cap U) \cong i_*(\mathcal{A})(W)$ ($\because \mathcal{A}$: locally free, coherent)
 故に $i_*(\mathcal{A})$ は reflexive

lemma A : regular local ring $\dim A \leq 2$ M :
 finitely generated reflexive A -module $\Rightarrow A$ -free.

② 仮定より任意の finitely generated A -module M に対し $\text{proj. dim } M \leq 2$. そこで N を finitely generated reflexive A -module とし その dual を N' とする exact sequence $0 \rightarrow Q \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow N' \rightarrow 0$ (但し P_1, P_0 finite free) を考える. dual をとる $0 \rightarrow N \rightarrow P_0' \rightarrow P_1' \rightarrow Q' \rightarrow 0$ は exact $P_1' \rightarrow Q'$ の image を M とおくと $0 \rightarrow N \rightarrow P_0' \rightarrow P_1' \rightarrow M \rightarrow 0$ は exact 故に上の注意より N は free //

次に $i_*(A)$ は locally free. 更に $A \otimes A^\circ \cong \text{Hom}_{O_X}(A, A)$ より $i_*(A) \otimes i_*(A)^\circ \cong \text{Hom}_{O_X}(i_*(A), i_*(A))$ を得る. 従って $i_*(A)$ は Azumaya-Algebra で $i_*(A)|_U = A$ の定める cohomology class を引いたから prop 1.6 より A の定める cohomology class を与える.

Corollary 2.5 X を regular connected prescheme $\dim X \leq 2$ η を X の generic point $K = k(\eta)$ とすると $B_n(X) \subset B_n(K)$ $\forall x \in X$ に対し $B_n(O_{X,x}) \subset B_n(K)$ だがこのとき

$$B_n(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} B_n(O_{X,x})$$

② Prop 2.4 の証明と同じ.

II. $H^i(X, G_m)$ 特に $B_n(X)$ は $H^2(X, G_m)$ において消えるか等について調べる.

50. X が affine の場合 遠藤氏が解られるのでここでは次の事を注意するにとどめる.

Proposition 0.1 (Tsen) K を代数的閉体上の一変数代数関数体とすると $n \geq 0$ に対し $H^i(K, G_m) = 0$ 特 $B_n(K) = 0$

Proposition 0.2 k を separably closed な有限体の ℓ を ℓ と異なる素数. K を k 上の一変数代数関数体とすると $H^i(K, G_m)(\ell) = 0$ ($i \geq 1$) 特 $B_n(K)(\ell) = 0$

§1. 体上の algebraic curve の場合について述べる.

Proposition 1.1 X を代数的閉体 k 上の algebraic curve とすると $B_n(X) = 0$

① X は irreducible としてよい. その generic point を η $K = k(\eta)$ を剰余体とすると K は k 上の一変数代数関数体で $B_n(X) \hookrightarrow B_n(K) = 0$

[注意] k を単に separably closed としただけでは 1.1 は一般には成立しない. 例えば $X = \text{Spec } k[t]$ としたとき $B_n(X) = 0 \Leftrightarrow k$ alg. closed

Proposition 1.2 k が separably closed の場合 ($k \neq \text{char } k$) に対し $B_n(X)(\ell) = 0$

② Proposition 0.2 と Prop. 1.1 による.

ところが X が k 上 proper なら実は $B_n(X) = 0$ である. そのために étale topology と f.p.p.f. topology の比較定理を用いる (官能自の講義参照)

Proposition 1.3 X を separably closed な体 k 上 proper (14)

な scheme と L . k' を k の algebraic closure $X' = X \times_k k'$

$R^1 f_* (\mathcal{G}_m) = \underline{\text{Pic}}_{X/k}$ (但し $f: X \rightarrow \text{Spec } k$ は structure morphism)

とするときの exact sequence が成り立つ。

$$0 \rightarrow H^1(k_{p,e}, \underline{\text{Pic}}_{X/k}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{G}_m) \rightarrow H^2(X', \mathcal{G}_m)$$

今の場合 $\underline{\text{Pic}}_{X/k}$ は representable だが (J. P. Murre) 特に関
represent する object が k 上 line 束の場合より $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$
又は $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ の場合 (F. G. A. T. D. T. IV Prop 2.10) 上の比
較定理を用いて $H^i(k_{p,e}, \underline{\text{Pic}}_{X/k}) \cong H^i(k_{e,l}, \underline{\text{Pic}}_{X/k}) = 0$ (12)
故に $0 \rightarrow H^2(X, \mathcal{G}_m) \rightarrow H^2(X', \mathcal{G}_m)$ と injective

Corollary 1.4. X を separably closed 体上 proper な
curve とすると $H^2(X, \mathcal{G}_m) = \text{Br}(X) = 0$

更にそれ以外で $\text{Br}(X) = 0$ になる例として

Proposition 1.5. X を有限体上 proper で regular な curve
とすると $i \neq 0, 3$ に対し $H^i(X, \mathcal{G}_m) = 0$ 特に関 $\text{Br}(X) = 0$ 故に X
の connected component の数とすると $H^3(X, \mathcal{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^c$
(田原氏の講演参照)

§2. $\dim X \geq 2$ の場合はもう少し簡単な結果は存じ。

$\dim X = 2$ の場合に関しても触れるが、特に有限体
上 proper, line な surface に関しても $\text{Br}(X)$ は有限群
であってその元の位数は Zeta 函数 及び Néron-Severi group
によって実際に表わす事が予想されて、特別の場合

(curve の場合と abelian surface の場合) $\text{char}(k) = p$
 p -torsion part を除いてその可成り立つ事が証明されている
 (J. Tate, [67]). 実際はこの射的写像は p -torsion
 part の部分も少なくとも有限性は証明されているらしい。

射的写像として projective space の Brauer 群を考える。
 そのため

Lemma 2.1 k を任意の体, $k[X_1, \dots, X_n]$ を k 上の多項式環
 $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k$ を $X_i \rightarrow 0$ なる ring homomorphism とす
 る。そのとき, k の n -元群 group homomorphism
 $B_n(k[X_1, \dots, X_n]) \rightarrow B_n(k)$ の kernel は p -primary であ
 る。但し $p = \text{char}(k)$

① $n=1$ のときは Auslander - Goldman [] による。
 n に関する induction による。次の commutative diagram

$$k[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow[\alpha]{X_2, \dots, X_n \rightarrow 0} k[X_1] \xrightarrow[\beta]{X_1 \rightarrow 0} k$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$k(X_1)[X_2, \dots, X_n] \xrightarrow[\gamma]{X_2, \dots, X_n \rightarrow 0} k(X_1)$$

を考へる。 $\beta^* \alpha^*(a) = 0 \Rightarrow \exists n' \ d^*(a^{p^{n'}}) = 0 \therefore \gamma^*(f^*(a^{p^{n'}})) = 0$
 $\therefore \exists m \ f^*(a^{p^{n'}})^{p^m} = f^*(a^{p^{n'+m}}) = 0$ (induction の仮定) $k[X_1, \dots, X_n]$
 は regular domain だから f^* は injective (I prop. 6)
 $\therefore a^{p^{n'+m}} = 0$ //

Proposition 2.2 k を体 $B_n(k) = 0$ P^n を k 上の projective n -space とすると, $\text{char}(k) = p > 0$ 異なる任意の素数 l に対し $B_n(P^n)(l)$ (l -torsion part) $= 0$

① P^n の hyperplane $S \ni - \rightarrow \dots \rightarrow$ とすると $P^n - S \cong \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ とこの P^n は regular E かつ再び I. Prop. 1.6 かつかえて, $B_n(P^n) \hookrightarrow B_n(P^n - S)$ とこの k 上の lemma より $B_n(P^n)(l) = 0$

p -torsion part に関しては, Cor. 1.4 Prop. 1.5 より k が有限体又は sep. closed 体ならば $B_n(P^n) = 0$

Proposition 2.3 (宮田氏の注意) k を有限体又は sep. closed 体, P^2 をその上の 2次元の projective space とすると $B_2(P^2) = 0$

① 2次元の proper regular algebraic scheme の Brauer 群の birational invariance (説明略) により $B_2(P^2) \cong B_2(P \times P)$ そこで $X = P \times_k P$, $Y = P$, $f: X \rightarrow Y$ を $- \rightarrow$ の projection とすると, $f_* (G_{m,X}) \cong G_{m,Y}$, $R^i f_* (G_{m,X}) \cong \underline{\text{Pic}}_{P/P} / P^i$ $\cong \underline{\text{Pic}}_{P/k} \times P^i \cong \mathbb{Z} P^i$ (constant sheaf). 更に M. Artin の定理 (田原氏の講義参照) より $R^i f_* (G_{m,X}) = 0$ ($i \geq 2$) ところで spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* (G_{m,X})) \Rightarrow H^{p+q}(X, G_{m,X})$ より exact sequence $H^2(Y, f_* (G_{m,X})) \rightarrow H^2(X, G_{m,X}) \rightarrow H^1(Y, \underline{\text{Pic}}_Y)$ を得るが, $H^2(Y, f_* (G_{m,X})) = H^2(Y, G_{m,Y}) = B_2(Y) = B_2(P) = 0$

$H^1(Y, \text{Pic}_{X/Y}) = H^1(Y, \mathbb{Z}_Y)$ だが Y は geometrically unibranch. 故に $H^1(Y, \mathbb{Z}_Y) = 0$ (S.G.A.A. IX. Prop 3.6)

故に $B_2(X) = 0$ //

II 以下に於て Brauer 群と他の幾何学的整数論的対象との関係について大ざっぱに説明する。

§1 Picard - Igusa の不等式

k を体とし $\text{char}(k) = p$. X を k 上の algebraic scheme とする.

$\ell \neq p$ を素数とすると ℓ Kummer's exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_{\ell^n, X} \rightarrow G_{m, X} \xrightarrow{\ell^n \text{倍}} G_{m, X} \rightarrow 0$$

が exact sequence $0 \rightarrow \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} \rightarrow H^2(X, \mathcal{U}_{\ell^n, X}) \rightarrow \ell^n H^1(X, G_{m, X}) \rightarrow 0$

を得る。但し任意の abelian group M と任意の整数 m に対して

$mM = \{x \in M \mid mx = 0\}$. exact sequences of projective system

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{U}_{\ell^n, X} & \rightarrow & G_{m, X} & \xrightarrow{\ell^n \text{倍}} & G_{m, X} \rightarrow 0 \\ n > m & & \downarrow \ell^{n-m} \text{倍} & & \downarrow \ell^{n-m} \text{倍} & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{U}_{\ell^m, X} & \rightarrow & G_{m, X} & \rightarrow & G_{m, X} \rightarrow 0 \end{array}$$

より exact sequences of projective system

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{U}_{\ell^n, X}) & \rightarrow & \ell^n H^1(X, G_{m, X}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z} & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{U}_{\ell^m, X}) & \rightarrow & \ell^m H^1(X, G_{m, X}) \rightarrow 0 \end{array}$$

を得るが projective system $\{\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}\}$ の transition

morphisms は surjective である limit 1行より exact sequence

$$0 \rightarrow \varprojlim \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} \rightarrow \varprojlim H^2(X, \mathcal{U}_{\ell^n, X}) \rightarrow \varprojlim \ell^n H^1(X, G_{m, X}) \rightarrow 0$$

を得る

一般に $\varprojlim H^i(X, \mathcal{H}_{\ell^n, X}) = H^i(X, \mathbb{Z}_\ell[i])$, 任意の abelian group M に対して $\varprojlim_{\ell^n} M = T_\ell(M)$ ($\mathbb{Z}_\ell$ -modules) と置けば,

$$0 \rightarrow \varprojlim \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) \rightarrow T_\ell(M) \rightarrow 0$$

は exact. $\mathbb{A}$ k を separably closed X を k 上 proper とすると $\text{Pic}(X)$ は有限生成の abelian group $NS(X)$ の ℓ -divisible ($\ell \neq \text{char}(k)$) group $\text{Pic}(X)^\circ$ による拡大である。
 $0 \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow NS(X) \rightarrow 0$ exact より

$\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} \cong NS(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ であり $NS(X)$ は有限生成の $\mathbb{Z}$ -module であるから $\varprojlim \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} \cong NS(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ 故に exact sequence

$$0 \rightarrow NS(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) \rightarrow T_\ell(H^2(X, G_{m, X})) \rightarrow 0$$

を得る。更に今の場合 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_\ell} H^i(X, \mathbb{Z}_\ell[i]) = B_{i, \ell} < \infty$

そこで、 $NS(X)$ の rank を ρ X の Picard number を ρ

$$\text{rank } T_\ell(H^2(X, G_{m, X})) = B_{2, \ell} - \rho$$

故に特に不等式 $\rho \leq B_{2, \ell}$ を得る。

X を更に irreducible π k 上 lisse π surface とすると, ℓ -adic cohomology に関する Lefschetz fixed point theorem により

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i B_{i, \ell} = \{X \times X \text{ の diagonal の self-intersection number}\}$$

ℓ -adic duality により $B_{i, \ell} = B_{4-i, \ell}$ $B_{0, \ell} = B_{4, \ell} = 1$

$B_{1, \ell} = B_{3, \ell}$ は Picard scheme の次元の 2 倍 であるから

$B_{2, \ell}$ は ℓ に independent. 故に $\text{rank } T_\ell(H^2(X, G_{m, X}))$

も ℓ に independent. $B_{2,\ell} = B_2$ とおくと Picard-Igusa の不
等式 $\rho \leq B_2$

を得る. 井草田]は $B_2 = C_2 + 2(q-1)$ (但し C_2 は $X \times X$ の diagonal
の self-intersection number q は Picard variety の次元の 2 倍
として定義したのがこれに今の定義と一致している事は上に示
した通り.

§2. Zeta function との関係 (J. T. Tate [6, 7])

k を素数 p の有限体でその元の個数を q , X を k 上 projective
curve なる surface とし $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ (但し $\bar{k}$ は k の alg. closure)
は connected とする. そのとき ℓ ($\neq p$)-adic cohomology groups
 $H^i(\bar{X}, Q_\ell) = \varprojlim H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}) \otimes Q_\ell$ は有限次元の Q_ℓ -vector
space で X の Frobenius endomorphism F は ℓ 上 ℓ 作用
 $H^i(\bar{X}, Q_\ell)$ の endomorphism $\varphi_{i,\ell}$ の characteristic polynomial
を $P_i(X, T) = \det(1 - \varphi_{i,\ell} T)$ とすると X の Zeta 函数
は

$$Z(X, S) = \frac{P_1(X, q^{-S}) P_2(X, q^{-S})}{(1 - q^{-S}) P_2(X, q^{-S}) (1 - q^{2-S})}$$

となる. 更に P_1 従って P_2 は ℓ に無関係な integral coefficients を
持つ事がわかっている.

Conjecture (Tate, M. Artin)

Brauer group $Br(X)$ は有限群で

$$P_2(X, q^{-s}) \sim \frac{[Br(X)] |\det(D_i \cdot D_j)|}{q^{d(X)} [NS(X)_{tors}]^2} (1 - q^{1-s})^{p(X)} \quad (s \rightarrow 1)$$

但し $\left\{ \begin{array}{l} d(X) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - 1 + \dim(\text{Picar Var}(X)) \quad (d(X) \geq 0) \\ NS(X) = \{ I_m(\text{Pic}(X) \rightarrow NS(\bar{X})) \} \\ NS(\bar{X}) = \bar{X} \text{ の divisors の algebraic equivalence classes} \\ p(X) = NS(X) \text{ の rank} \\ (D_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ は } NS(X) \text{ の mod Torsion の base} \\ (D_i \cdot D_j) \text{ は } D_i, D_j \text{ の total intersection number} \end{array} \right.$
 この conjecture に対し次の事が分る。

Theorem (Tate [6, 7])

X を k 上の 2 つの curves の類又は abelian surface とすると $Br(X)(\text{non } p) = \prod_{\ell \neq p} Br(X)(\ell)$ は有限群で

$$R(T) = P_2(X, T) / (1 - qT)^{p(X)} \text{ とおくと}$$

$$R(q^{-1}) = \pm p^v \frac{[Br(X)(\text{non } p)] \det(D_i \cdot D_j)}{[NS(X)_{tors}]^2}$$

Bibliography

- [1] M. Artin, A. Grothendieck : S. G. A. A. 1963/64 I. H. E. S.
- [2] M. Auslander, O. Goldman : The Brauer group of a commutative ring, Trans. A. M. S. 97 (1960) 367-409
- [3] A. Grothendieck : Fondements de la géométrie algébrique
- [4] " : Le groupe de Brauer (GB) I, II, III.
- [5] " : Éléments de géométrie algébrique Chap IV
Publ. Math. de I. H. E. S.
- [6] J. T. Tate : On the conjecture of Birch and Swinnerton
- Dyer and geometric analog. Séminaire Bourbaki 306
- [7] " : Endomorphisms of abelian varieties
over finite fields, Invent. Math. 2 (1966) 134-144
- [8] J. Igusa : Betti and Picard numbers of abstract
algebraic surfaces, Proc. Nat. Acad. Sc. 46 (1960) 724-726