

Gindikin-Karpelevich formula の拡張

津田塾大学数学・計算機科学研究所 中筋麻貴 (Maki Nakasuji)
Institute for mathematics and computer science,
Tsuda College

R. Langlands によって得られた Gindikin-Karpelevich formula は, p -進体上の古典群の主系列表現における spherical vector の積分を, ルートを用いた大変きれいな形の積で表した公式である. 本稿では, これを組合せ論的に拡張する. なお, ここで得られた結果はアメリカ, Stanford 大学の Daniel Bump 氏との共同研究で得られたものである.

1 Gindikin-Karpelevich formula

G を non-archimedean な局所体 F 上の split semisimple 代数群とする. また, $\mathfrak{o}$ を F の整数環, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{o}$ の極大イデアル, q を剰余体の cardinality とする. このとき, $G(F)$ の Borel 部分群 $B(F)$ は, 極大 split torus $T(F)$ と unipotent radical $N(F)$ を用いて $B(F) = T(F)N(F)$ と表すことができる. $T(F)$ の指標 χ に対し, χ から誘導される $G(F)$ の主系列表現は

$$V(\chi) = \{f : G(F) \rightarrow \mathbb{C} \mid f(bg) = (\delta^{1/2}\chi)(b)f(g)\}$$

と定義される. ここで, $\delta : B(F) \rightarrow \mathbb{C}$ は modular quasicharacter とし, χ は $\chi(tn) = \chi(t)$ として, $N(F)$ 上 trivial となるように B 上に拡張しておく. また, $G(F)$ の作用は right translation とする.

実際, $G = GL_{r+1}(F)$ のとき, ${}^L G$ の diagonal group $T(\mathbb{C})$ の元 $\mathbf{z} = \text{diag}(z_1, \dots, z_{r+1}) \in T(\mathbb{C})$ ($z_i \in \mathbb{C}^\times$) と $\mu \in \mathbb{Z}^{r+1}$ に対し, 指標は $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}^\mu = \prod z_i^{\mu_i}$ と定義される. すなわち, 指標 χ は

$$\chi \left(\begin{pmatrix} y_1 & * & \cdots & * \\ & y_2 & & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & y_{r+1} \end{pmatrix} \right) = \prod z_i^{\text{ord}(y_i)}$$

と表される. このとき, $f^\circ(bk) = \delta^{1/2}\chi(b)$, ($b \in B(F)$, $k \in K = GL_{r+1}(\mathfrak{o})$) を満たす関数 f° は G の主系列表現 $V(\chi)$ における spherical vector となる.

さて, ワイル群 W の元 w に対し, Intertwining 作用素 $M_w : V(\chi) \rightarrow V({}^w\chi)$ を次で定義する. なお, N_- は G の下三角の maximal unipotent radical を表す:

$$M_w f(g) = \int_{N_-} f(nwg)dn. \quad (1.1)$$

R.Langlands による Gindikin-Karpelevich formula は, (1.1) において $w = w_0$ (ワイル群の最長元), $f = f^\circ$ とし, $g = 1$ のときの明示公式である.

Theorem 1.1 ルート系 Φ の *positive root* の集合を Φ^+ とする. このとき以下の等式が成り立つ.

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(nw_0) dn = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}z^\alpha}{1 - z^\alpha}. \quad (1.2)$$

Gindikin と Karpelevich によって得られたオリジナルの Gindikin-Karpelevich formula は, $p = \infty$ のとき, すなわち, 実半単純リー群の表現論に表れる Harish-Chandra の c -関数に関するものであった. (詳しくは [5], [9]) 1971 年, R.Langlands はこれを p 進群に拡張し ([9]), 後に (1980) W. Casselman が別証明を与えた ([4]).

本稿では, Theorem 1.1 を次の 3 つの方法で拡張する.

- 1) クリスタルを用いて表示する. (第 2 節)
- 2) 1) をメタプレクティック群に拡張する. (第 3 節)
- 3) w を任意のワイル群の元, f を spherical vector f° を一般化した関数に拡張する. (第 4 節)

1), 2) はクリスタル表示として連続する話となるため “2 つの方法で拡張” とするべきかもしれない. なお, 本稿で述べられなかった証明とさらなる考察は, 1), 2) は [2], 3) は [3] を参考にさせていただきたい.

2 Gindikin-Karpelevich formula のクリスタル表示

Φ をルート系 (ここでは A_r 型を扱う) とする. α_i ($i = 1, \dots, r$) を simple root, $\alpha_i^\vee$ を対応する coroot とする. Λ を weight lattice とすると, Φ に対するクリスタル $\mathcal{B}$ は各要素の weight を表す写像 $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow \Lambda$, Kashiwara operator $f_i, e_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{0\}$ ([6] では $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ と定義されている.), Kashiwara operator で定義される $\phi_i, \varepsilon_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ をもつ. ここで Kashiwara operator は $v \in \mathcal{B}$ に対し, $e_i(v) \neq 0$ のとき $f_i e_i(v) = v$, $\text{wt}(e_i(v)) = \text{wt}(v) + \alpha_i$, 同様に $f_i(v) \neq 0$ のとき $e_i f_i(v) = v$, $\text{wt}(f_i(v)) = \text{wt}(v) - \alpha_i$ を満たす. また, ϕ_i は $f_i^\phi(v) \neq 0$ となる最大の整数 ϕ , $\varepsilon_i(v)$ は $e_i^\varepsilon \neq 0$ となる最大の整数 ε であり, $\phi_i(v) = \langle \text{wt}(v), \alpha_i^\vee \rangle + \varepsilon_i(v)$ を満たすものとする.

ワイル群 W の最長元 w_0 の既約表現を simple reflection の積

$$w_0 = s_{w_1} \cdots s_{w_N} \quad (N = \frac{1}{2}r(r+1))$$

で表し, これを $\Omega = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ とおく.

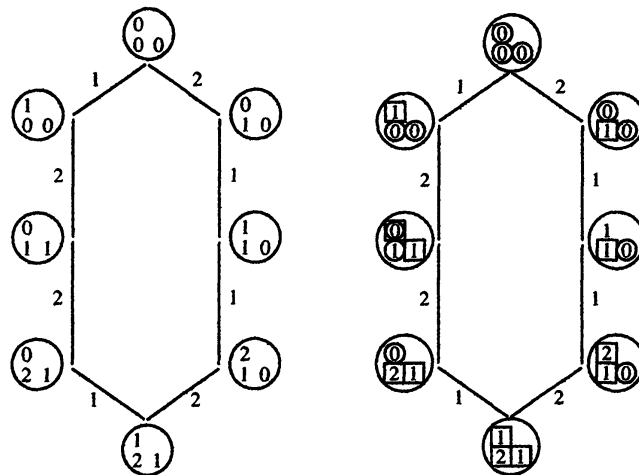


FIGURE 1. $\lambda = (2, 1, 0)$ に対する (左) BZL pattern, (右) decoration を行った BZL pattern. なお, クリスタルの辺に書かれた数字は f_i もしくは e_i の i を表し, 各頂点の値は, b_1 b_2 b_3 を表す.

Definition 2.1 *highest weight* が $\text{wt}(v_{\text{high}}) = \lambda$ のクリスタルを $\mathcal{B}_\lambda$ とする. $v \in \mathcal{B}_\lambda$ に対し, b_1 を $e_{w_1}^{b_1}(v) \neq 0$ となる最大の整数とする. また b_2 を $e_{w_2}^{b_2} e_{w_1}^{b_1}(v) \neq 0$ となる最大の整数とする. 以下同様に定義した $\{b_i\}$ を

$$\text{BZL}(v) = (b_1, \dots, b_N)$$

と表し, *BZL pattern* と呼ぶ (“string parameter” と呼ばれることもある).

BZL pattern の要素について, 次のルールに従って “circling” と “boxing” で decoration を行う. なお, Circling rule は, Littelmann([10]) による BZL pattern の性質から得られたルールである.

Circling rule. $\Omega = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, r, r-1, \dots, 3, 2, 1)$ もしくは $\Omega = (r, r-1, r, r-2, r-1, r, \dots, 1, 2, 3, \dots, r)$ において, $i \in \{1, 3, 6, 10, \dots\}$ に対し, $b_i = 0$ を満たすとき, b_i を circle で囲む.

Boxing rule. $f_{w_i} e_{w_{i-1}}^{b_i-1} \dots e_{w_1}^{b_1}(v) = 0$ を満たすとき, b_i を box で囲む.

実際, A_2 型, $\lambda = (2, 1, 0)$ に対する BZL pattern および decoration を行った BZL pattern の例を Figure 1. に示した.

Brubaker-Bump-Friedberg は, この Circling rule および Boxing rule を用いて, 以下に示す “Tokuyama function G_Ω ” を導入した.

Definition 2.2 $v \in \mathcal{B}$ に対する *BZL pattern* $(b_1, b_2, \dots)$ において, “Tokuyama function” G_Ω を以下で定義する:

$$G_\Omega(v) = \prod_{i=1}^N \begin{cases} (1 - q^{-1})(-q^{b_i-1}) & b_i \text{ が circle でも box でも 囲まれていないとき,} \\ -q^{b_i-1} & b_i \text{ が box でのみ 囲まれているとき,} \\ q^{b_i} & b_i \text{ が circle でのみ 囲まれているとき,} \\ 0 & b_i \text{ が circle および box の両方で 囲まれているとき.} \end{cases}$$

なお, $B(\infty)$ では Boxing rule は起こらないため, 2 行目および 4 行目の定義は無効となることに留意する.

Tokuyama([11]) により, Schur 多項式 s_λ を Gelfand-Tsetlin pattern の言葉で表すことができることが示されているが, Brubaker-Bump-Friedberg は Tokuyama deformation として Weyl character formula のクリスタル表示をこの Tokuyama function G_Ω を用いることにより与えた.

Theorem 2.3 [1, Theorem 5]. λ を dominant weight とする. また $z_1, \dots, z_{r+1}$ を $g \in GL_{r+1}(\mathbb{C})$ の固有値とする. このとき, 既約表現の指標 $\chi_\lambda (= s_\lambda)$ について以下のクリスタル表示が成り立つ.

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - q^{-1} \mathbf{z}^\alpha) \chi_\lambda(g) = \sum_{v \in \mathcal{B}_{\rho+\lambda}} G_\Omega(v) q^{-\langle \text{wt}(v) - w_0(\lambda+\rho), \rho \rangle} \mathbf{z}^{\text{wt}(v) - w_0 \rho}.$$

ここで得られた左辺は, 次に述べる Casselman-Shalika 公式 ($G = GL_{r+1}$ のとき) の右辺に表れる.

Theorem 2.4 λ を dominant weight とする. このとき,

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn = \mathbf{z}^{-w_0 \lambda} \left[\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - q^{-1} \mathbf{z}^\alpha) \right] s_\lambda(z_1, \dots, z_{r+1}) \quad (2.1)$$

が成立する. ここで s_λ は Schur 多項式, ψ_λ は F 上の fixed additive character ψ_0 で定義される nondegenerate additive character を表す:

$$\psi_\lambda \left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ x_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{r+1,1} & \cdots & x_{r+1,r} & 1 \end{pmatrix} \right) = \psi_0(\varpi^{\lambda_1 - \lambda_2} x_{r+1,r} + \cdots + \varpi^{\lambda_r - \lambda_{r+1}} x_{2,1}),$$

ここで, ϖ は $\mathfrak{o}$ の素元とする.

すなわち, (2.1) は次のように書き換えられる.

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn = \sum_{\mathcal{B}_{\lambda+\rho}} G_\Omega(v) q^{-\langle \text{wt}(v) - w_0(\lambda+\rho), \rho \rangle} \mathbf{z}^{\text{wt}(v) - w_0(\rho+\lambda)}. \quad (2.2)$$

これだけで既に Casselman-Shalika formula のクリスタル表示は得られているが, Gindikin-Karpelevich formula へ導くためにはさらなる変形が必要となる. そこで用いるのが, Schutzenberger involution $\text{Sch} : \mathcal{B}_{\lambda+\rho} \longrightarrow \mathcal{B}_{\lambda+\rho}$, および Kashiwara による morphism $M_{\lambda+\rho} : \mathcal{B}(\infty) \longrightarrow \mathcal{B}_{\lambda+\rho} \otimes \mathcal{T}_{-\lambda-\rho}$ ($\mathcal{T}_\lambda$ は weight が λ の 1 元で生成されるクリスタル) である. (morphism M_λ については, A_2 型, $\lambda = (2, 1, 0)$ に対する具体的な図を Figure 2. に示す.) これらを用いることにより, (2.2) は次のように書き換えられる.

Theorem 2.5 λ を dominant weight とする. このとき,

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(u) \psi_\lambda(u) du = \sum_{\mathcal{B}_{\lambda+\rho} \otimes \mathcal{T}_{-\lambda-\rho}} G_\Omega(v) q^{-\langle w_0(\text{wt}(v)), \rho \rangle} \mathbf{z}^{w_0(\text{wt}(v))}.$$

次に, weight の λ を無限としたときの両辺について考察する.

Proposition 2.6 環 $R = \mathbb{C}[q][[z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_r}]]$ とすると, $\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn \in R$ であり, $\lambda \longrightarrow \infty$ とすると, 環 R の topology において $\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn$ は $\int_{N_-(F)} f^\circ(n) dn$ に収束する.

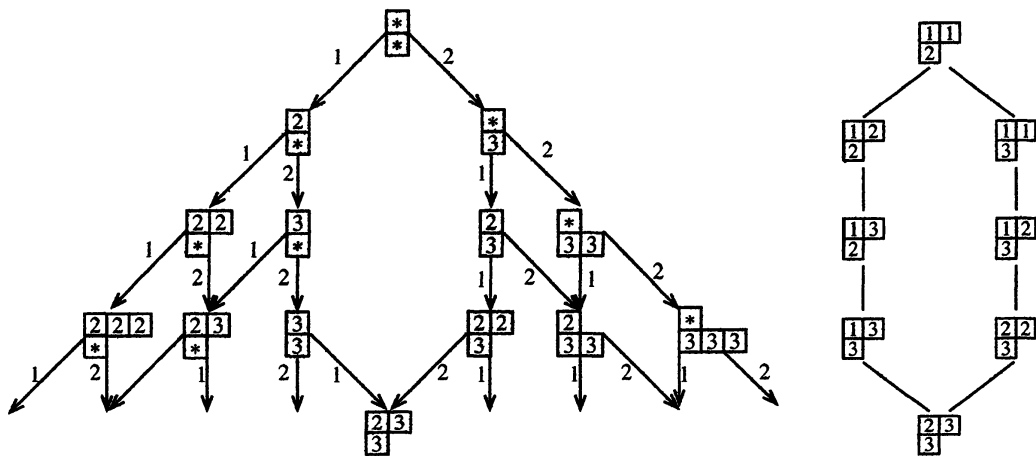


FIGURE 2. (左) $\mathcal{B}(\infty)$, (右) $\lambda = (2, 1, 0)$ の時の M_λ の image.
なお, Kashiwara の記述に従い, 各頂点には対応する tableau をおいた.

一方, 右辺は $B(\infty)$ に渡る和として解釈できるため, Theorem 2.5 から以下が成り立つ.

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n) dn = \sum_{B(\infty)} G_\Omega(v) q^{-\langle w_0(\text{wt}(v), \rho) \rangle} \mathbf{z}^{w_0(\text{wt}(v))}.$$

ここでワイル群の最長元 w_0 による作用を考慮すると, Gindikin-Karpelevich formula のクリスタル表示となる次の定理が得られる.

Theorem 2.7

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(nw_0) dn = \sum_{v \in B(\infty)} G_\Omega(v) q^{\langle \text{wt}(v), \rho \rangle} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}.$$

3 メタプレクティック群への拡張

体 F が 1 の原始 m 乗根を含むとする. 群 G の 1 の原始 m 乗根の群 μ_m による中心拡大を $\tilde{G}(m\text{-fold metaplectic cover})$ とする:

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \tilde{G}(F) \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

また, K^* を $\tilde{G}(F)$ における K の image とする.

前節の spherical vector f° の類似として次の関数を考える.

Definition 3.1 section $\mathbf{s} : G \longrightarrow \tilde{G}(F)$, $k \in K^*$ に対し, $\tilde{f}^\circ : \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ を次を満たすものとして定義する:

$$\tilde{f}^\circ \left(\mathbf{s} \begin{pmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ & t_2 & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & t_{r+1} \end{pmatrix} k \right) = \begin{cases} \prod z_i^{\text{ord}(t_i)} & m \mid \text{ord}(t_i) \quad (1 \leq i \leq r+1) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

関数 f が $f(\varepsilon g) = \varepsilon f(g)$ for $\varepsilon \in \mu_n$ を満たすとき, これを *genuine* と呼ぶことにすると, 上で定義した $\tilde{f}^\circ$ は $\tilde{G}(F)$ 上唯一つの *genuine* 関数となる.

メタプレクティック群の Gindikin-Karpelevich formula に関しては, Kazhdan-Patterson によって次の定理が報告されている.

Theorem 3.2 [8, Proposition I.2.4].

$$\int_{N_-(F)} \tilde{f}^\circ(nw_0)dn = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{m\alpha}}.$$

これに前説で用いた議論を応用することにより，クリスタル表示を与えるのが本節の目的である。

まず， $v \in B(\infty)$ に対して Definition 2.1 で定義された BZL pattern について，Circling rule を考察することにより，次を示すことができる。

Proposition 3.3

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{m\alpha}} = \sum_{\substack{v \in B(\infty) \\ BZL(v) = (b_1, \dots, b_N) \\ b_i \text{ が circle でないなら, } m|b_i}} (1 - q^{-1})^{s(v)} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}.$$

なお， $s(v)$ は circle で囲まれていない b_i の個数を表す。

Tokuyama function の類似関数を

$$G_\Omega^*(v) = \prod_{i=1}^N \begin{cases} q^{-b_i} h(b_i) & b_i \text{ が circle で囲まれていないとき} \\ 1 & b_i \text{ が circle で囲まれているとき} \end{cases}$$

と定義する。ここで，

$$h(a) = \begin{cases} (q-1)q^{a-1} & m|a \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする。このとき，Proposition 3.3 は次で表される。

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{m\alpha}} = \sum_{B(\infty)} G_\Omega^*(v) \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}.$$

$\langle \text{wt}(v), \rho \rangle = -\sum b_i$ であることを考えると，右辺は前説の Tokuyama function G_Ω を用いて

$$\sum_{B(\infty)} G_\Omega(v) q^{\langle \text{wt}(v), \rho \rangle} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}$$

で表すことができる。すなわち，次の定理が成り立つ。

Theorem 3.4

$$\int_{N_-(F)} \tilde{f}^\circ(nw_0)dn = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{\alpha}} = \sum_{B(\infty)} G_\Omega(v) q^{\langle \text{wt}(v), \rho \rangle} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}. \quad (3.1)$$

ここで Kashiwara ([6]) によって導入された $\text{wt}(m \cdot v) = m\text{wt}(v)$ および $f_i^m(m \cdot v) = m \cdot (f_i v)$ を満たす写像

$$m \cdot : B_\lambda \longrightarrow B_{m\lambda}$$

を考える. なお, λ は dominant weight とする. $B(\infty)$ に対応する $m \cdot : B(\infty) \longrightarrow B(\infty)$ を考慮すると, (3.1) の右辺は, Kashiwara の $m \cdot$ 写像の image である $B(\infty)$ の元に渡る和とみなし, Theorem 3.4 が, Theorem 2.7 の $m \cdot$ 写像による拡張と捉えることができる.

4 Gindikin-Karpelevich formula の一般化

K を G の極大コンパクト部分群, J を K の Iwahori 部分群とすると, χ が general position のとき, $V(\chi)$ は既約であり, χ が unramified のとき, $V(\chi)^J$ (J -fixed vectors) の次元はワイル群 W の order に等しい. このことから, $V(\chi)^J$ の基底が W で parametrize されることは自然なことであり, その自然な基底の 1 つ $\{\phi_w | w \in W\}$ を次を満たすものとして定義する. $b \in B(F)$, $u \in W$, $k \in J$ に対し,

$$\phi_w(buk) = \begin{cases} \delta^{1/2} \chi(b) & u = w \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

ここで, $u, v \in W$ に対し, $\psi_u = \sum_{v \geq u} \phi_v$ を定義する. 本節では, (1.1) において, 任意の $w, u \in W$ に対して, $f = \psi_u$ としたときを扱う. 本研究に関しては, いくつかの計算結果から以下の予想が得られたところであり, 解決はしていない. (一部のみ解決している ([3] 参照)).

Conjecture 4.1 [3] Φ を simply-laced とする. $u \leq v$ (Bruhat order) に対し, $S(u, v) = \{\alpha \in \Phi^+ | u \leq v.r_\alpha \leq v\}$ とすると, $|S(u, v)| = l(v) - l(u)$ を満たす (u, v) に対し,

$$(M_v \psi_u)(1) = \int_{N_-(F)} \psi_u(nw) dn = \prod_{\alpha \in S(u, v)} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^\alpha}{1 - \mathbf{z}^\alpha}$$

が成立する. ここで r_α は $\alpha \in \Phi^+$ に対する reflection とする.

本予想は, Casselman によって定義された $V(\chi)^J$ の基底 (ϕ_w とは異なる基底) に関する問題 (Casselman 問題) と深く関わっているが, 本稿では Gindikin-Karpelevich formula の拡張としてみなされる所以と相違点について述べるにとどめる. Casselman の基底との関係や, 予想について得られた (部分的ではあるが) 詳しい結果に関しては [3] を参考にさせていただきたい.

Remark 1 spherical vector $f^\circ = \psi_1 = \sum_{w \geq 1} \phi_w$ であることから, $w = w_0$, $u = 1$ のとき, Theorem 1.1 (Gindikin-Karpelevich 公式) が得られる.

Remark 2 Conjecture 4.1 は $\Phi = A_2, A_3, A_4, D_4$ において成立する.

Remark1 より, Conjecture 4.1 が Gindikin-Karpelevich 公式の拡張であるとみなすことができるが, 相違点も存在する.

Definition 4.2 次の条件を満たす $S \subset \Phi$ を *convex* と呼ぶ.

- i) $\alpha \in S$ であるとき, $-\alpha \notin S$,
- ii) $\alpha, \beta \in S$ かつ $\alpha + \beta \in \Phi$ のとき, $\alpha + \beta \in S$.

Proposition 4.3 $u = 1$ のとき, すなわち Gindikin-Karpelevich formula において, $S(1, v) = \{\alpha \in \Phi^+ | v(\alpha) \in \Phi^-\}$ は *convex* である. また Φ^+ におけるその補空間 $\{\alpha \in \Phi^+ | v(\alpha) \in \Phi^+\}$ もまた *convex* である.

ただし, これは一般の $S(u, v)$ については成立しない. 実際, A_2 型では, Table 1. より次が

TABLE 1. A_2 型における $S(u, v)$ 一覧.

u	v	$S(u, v)$
1	1	$\{\}$
1	s_2	$\{\alpha_2\}$
1	s_1	$\{\alpha_1\}$
1	$s_1 s_2$	$\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}$
1	$s_2 s_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\}$
1	$s_1 s_2 s_1$	$\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2\}$
s_2	s_2	$\{\}$
s_2	$s_1 s_2$	$\{\alpha_1 + \alpha_2\}$
s_2	$s_2 s_1$	$\{\alpha_1\}$
s_2	$s_1 s_2 s_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$
s_1	s_1	$\{\}$
s_1	$s_1 s_2$	$\{\alpha_2\}$
s_1	$s_2 s_1$	$\{\alpha_1 + \alpha_2\}$
s_1	$s_1 s_2 s_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$
$s_1 s_2$	$s_1 s_2$	$\{\}$
$s_1 s_2$	$s_1 s_2 s_1$	$\{\alpha_1\}$
$s_2 s_1$	$s_2 s_1$	$\{\}$
$s_2 s_1$	$s_1 s_2 s_1$	$\{\alpha_2\}$
$s_1 s_2 s_1$	$s_1 s_2 s_1$	$\{\}$

確かめられる.

Example 4.4 $u = s_1, v = s_1 s_2 s_1$ のとき, $S(u, v) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ は *convex* ではない.

Example 4.5 $u = s_2, v = s_1 s_2$ のとき, $S(u, v) = \{\alpha_1 + \alpha_2\}$ *simple root* を含まないので *convex* ではない.

最後に Conjecture 4.1 における Φ が simply-laced (すなわち A, D, E 型) である条件の必要性について述べる. これは次の事実から得られた.

Proposition 4.6 $\Phi = B_2$ において, α_1, α_2 をそれぞれ *long* および *short simple roots* とする. このとき, $(u, v) = (s_1, s_1 s_2 s_1)$ および $(s_1, s_1 s_2 s_1 s_2)$ において Conjecture 4.1 は成立しない.

Remark 3 $\Phi = B_2$ には 33 個の (u, v) ($u \leq v$) が存在するが, Conjecture 4.1 が成立しないのは, Proposition 4.6 の場合のみであり, それ以外の 31 個の (u, v) については成立する.

References

- [1] B. Brubaker, D. Bump, and S. Friedberg, Weyl group multiple Dirichlet series: Type A combinatorial theory. Preprint (2009).
- [2] D. Bump and M. Nakasuji, Integration on p -adic groups and crystal bases, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138 (2010) 1595-1605.
- [3] D. Bump and M. Nakasuji, Casselman's basis of Iwahori vector and the Bruhat order, to appear in *Canadian Journal of Mathematics*.
- [4] W. Casselman, The unramified principal series of p -adic groups. I. The spherical function, *Compositio Math.*, 40(3) (1980) 387-406.
- [5] S. Gindikin and F. Karpelevich, Plancherel measure for symmetric Riemannian spaces of non-positive curvature, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 145 (1962) 252-255.
- [6] M. Kashiwara, On crystal bases. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of CMS Conf. Proc., pages 155-197. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [7] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, In *Lie algebras and their representations (Seoul, 1995)*, *Contemp. Math.* 194 (1996) 177-186.
- [8] D. Kazhdan and S. Patterson, Metaplectic forms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 59 (1984) 35-142.

- [9] R.P. Langlands, Euler products, Yale University Press, New Haven, Conn., 1971. A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1967, Yale Mathematical Monographs, 1.
- [10] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups*, 3 (2) (1998) 145-179.
- [11] T. Tokuyama, A generating function of strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups, *J. Math. Soc. Japan*, 40 (4) (1988) 671-685.

E-mail address: nakasuji@tsuda.ac.jp