

可逆エレメンタリーセルオートマトンの可積分性について

大阪大学大学院基礎工学研究科 野邊厚

由良文孝氏（公立はこだて未来大学複雑系科学科）との共同研究

概要

周期境界をもつ可逆なエレメンタリーセルオートマトン（ECA）の中には、その初期値問題が可換環 $\mathbb{Z}_2$ 上の線形系の初期値境界値問題に帰着されるルールが存在する。このような線形化可能 ECA の時間発展は $\mathbb{Z}_2$ 上の置換に基づいており、任意の初期配置に対して基本周期を求めることが可能である。さらに、可換環 $\mathbb{Z}_k$ 上の巡回置換を考えることにより、線形化可能な k 値 r 近傍セルオートマトンの族が構成できる。

1 はじめに

1 次元セルオートマトン（CA）とは、一列に並んだセルの離散力学系である。各セルは有限個の状態をとり、局所写像により離散的に時間発展する。時間発展則は単純であるが、一般に CA は複雑な挙動を示す。1980 年代、Wolfram は CA と微分方程式のある種の対応関係を指摘し、CA を現象論的に四つのクラスに分類した [1, 2, 3]。さらに、Wolfram らは、加法的（additive）CA [4] および totalistic CA [1, 2] についてその構造を詳しく調べた。なぜなら、これらの CA は局所写像が線形もしくは 1 変数のみに依存するため、解析が比較的容易であるからである。一般に、セルオートマトンは非常に多くのルールをつが、局所写像がどのように大域的振る舞いを統制するか容易には分からないため、それら膨大なルールの中から大域的に興味深い性質をもつ CA を発見することは困難である。ところが、1990 年、高橋と薩摩は独自ののアプローチにより究極の離散ソリトン系であるソリトンセルオートマトン（箱玉系）を発見した [5]。彼らはソリトンの振る舞いを単純化し、一列に並んだ箱とそれらの間を動く玉のおもちゃによりソリトンを表現したのである。そして 1996 年、時弘、高橋、松木平、薩摩は超離散化と呼ばれる手法を用いてソリトンセルオートマトンと KdV 方程式の直接的対応関係を示した [6]。それ以降、超離散化手法を用いて、 N -ソリトン解、双線形構造、保存量など箱玉系の多くの性質が詳しく調べられ [7, 8, 9, 10, 11, 12]、今では箱玉系は可積分 CA であるとみなされている。

このようにして箱玉系という興味深い性質をもつ CA の存在が分かった。このとき、次のような疑問が出るのは自然であろう。

箱玉系以外の可積分 CA は存在するのであろうか？

この問に対して、著者らはまず時間発展について可逆な CA について考察した。なぜなら、可逆性は可積分性の必要条件なので、可逆 CA の中から可積分 CA を見つけ出そうと考えたからである。論文 [13] において、著者らはグラフ理論を用いた CA の可逆性に対する判定法を導入し、周期境界をもつ可逆なエレメンタリーセルオートマトン（ECA）[1] を全て求めた。可逆 ECA のいくつかは自明もしくは加法的であるが、非線形な可逆 ECA も存在する。このような非線形可逆 ECA については、これまで詳しく調べられたことはなかった。

この報告においては、このような非線形可逆 ECA のいくつかは、その初期配置を適切に分割することにより、その初期値問題が可換環 $\mathbb{Z}_2$ 上の線形系の初期値境界値問題に帰着されることを示

す。したがって、初期値問題を解くことが可能であり、このような非線形可逆ECAは可積分と考えられる。さらに、これらを一般化し、任意の $k \in \mathbb{N}$ および任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して、 k 値 r 近傍の線形化可能CAの族を構成することが可能である。このようにして得られた線形化可能CAの族は巡回置換に基づく単純な構造をもち、任意の初期配置に対して、その基本周期を具体的に求めることが可能である。

2 セルオートマトンの可逆性

四つ組 $\mathcal{A}_r^{(k)} = \langle N, \mathbb{Z}_k, E, \delta \rangle$ を一次元セルオートマトン (CA) と呼ぶ。ここで、 $N \in \mathbb{N}$ はセルの数、 $\mathbb{Z}_k$ は可換環、 $E := \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ ($e_1, e_2, \dots, e_r$ は連続する整数) は近傍、 $\delta: \mathbb{Z}_k^r := \underbrace{\mathbb{Z}_k \times \dots \times \mathbb{Z}_k}_r \rightarrow \mathbb{Z}_k$ は局所写像である。また、境界は周期的であると仮定する。CA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ はルールと呼ばれる k^{k^r} 個の局所写像をもち、各局所写像は次の番号 R で区別される。

$$R := \sum_{s_1, s_2, \dots, s_r \in \mathbb{Z}_k} \delta(s_1, s_2, \dots, s_r) k^{k^{r-1}s_1 + k^{r-2}s_2 + \dots + k^0 s_r}$$

ここで、 $s_1, s_2, \dots, s_r \in \mathbb{Z}_k$ の可能な組み合わせ全てについて和をとる。写像 $c: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_k$ はCA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ の配置と呼ばれ、次の大域写像 F により時間発展する。

$$F(c) = c'$$

ここで、

$$c'(i) = \delta(c(i+e_1), c(i+e_2), \dots, c(i+e_r)) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

であり、 $c(i) \in \mathbb{Z}_k$ は i 番目のセルの値を表す。大域写像 F が全単射のときCA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ は可逆であるという。

CA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ の各配置は de Bruijn グラフ $G_{r-1}^{(k)}$ の閉路と一対一に対応するので [14]、CA の可逆性はグラフを用いて判定可能である [13]。 $\mathcal{E}$ を de Bruijn グラフ $G_{r-1}^{(k)}$ の辺集合とし、 $\mathcal{E}$ から $\mathbb{Z}_k$ への写像 ϕ を考えると、 $\mathcal{E}$ は集合としては $\mathbb{Z}_k^r$ と等しいので、各写像 ϕ を与えることはCA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ の局所写像 δ を与えることと等価である。よって、 ϕ を $\mathcal{A}_r^{(k)}$ のルールと同一視することが可能である。番号 R のルールと同一視される写像 ϕ を ϕ_R と表す。写像 $\phi_R: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}_k$ により、 $G_{r-1}^{(k)}$ の各閉路は $\mathcal{A}_r^{(k)}$ の配置に対応する [15, 16]。 $\mathcal{A}_r^{(k)}$ の配置は k^N 通りあり、 $G_{r-1}^{(k)}$ は任意の $N > l$ に対して長さ N の閉路を k^N 本もつので、この対応が一対一ならばルールは可逆である。

de Bruijn グラフ $G_{r-1}^{(k)}$ の重み付き隣接行列 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ を考える [17]。行列 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ は、成分 m_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, k^{r-1}$) が次のように与えられる $k^{r-1} \times k^{r-1}$ 行列である。

$$m_{ij} = \begin{cases} a_l & \text{if } v_i v_j \text{ is an edge and } \phi_R(v_i v_j) = l \ (l = 0, 1, \dots, k-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、 v_i および v_j は $G_{r-1}^{(k)}$ の頂点であり、 $v_i v_j$ は v_i から v_j への有向辺を表す。この重み付き隣接行列 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ をテンソル代数 $T(W)$ 上の行列とみなす。ここで、 $T(W) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} W^{\otimes i}$ であり、 W は重み $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ の生成する $\mathbb{Z}$ -加群である。このとき、 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ の L 乗の (i, j) 成分は次の形で表される。

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_{L-1} \in \{1, 2, \dots, k^{r-1}\}} m_{il_1} \otimes m_{l_1 l_2} \otimes \dots \otimes m_{l_{L-1} j}$$

次の定理を得る [13]。

Theorem 1 周期境界をもつ CA $A_r^{(k)}$ のルール R が可逆であるための必要十分条件は

$$\text{tr} \left[\left(M_R G_{r-1}^{(k)} \right)^N \right]$$

の k^N 個の項が全て異なることである.

$k = 2$ および $r = 3$ とすると ECA $A_3^{(2)}$ を得る [1]. ECA に対しては, 重み付き隣接行列 $M_R G_2^{(2)}$ の N 乗を帰納的に計算することができ, 可逆性に関する次の定理を得る [13].

Theorem 2 周期境界をもつ可逆な ECA ルールは 16 個存在する (表 1).

表 1: 周期境界をもつ全ての可逆な ECA ルールおよびその配置のサイズ.

Rule	Size
150 105	$N = 1, 2 \pmod{3}$
154 166 180 210 45 75 89 101	$N = 1 \pmod{2}$
170 240 15 85	All $N \in \mathbb{N}$
204 51	All $N \in \mathbb{N}$

表 1 の第 3, 4 行のルールは恒等写像や左右シフトなどの自明なものであり, 第 1 行のルールは加法的, すなわち近傍のセル値の $\text{mod } 2$ での和で時間発展が与えられる. よって, 第 2 行のルールのみ非線形と考えられる. 次節では, ルール 154, 166, 180, 210 の周期境界のもとでの初期値問題は $\mathbb{Z}_2$ 上の線形系の初期値境界値問題に帰着されることを示す.

3 線形系へのリダクション

ルール 154, 166, 180, 210 は reflection および conjugation でそれぞれ移り合うので [1], ここではルール 154 のみを考える. ルール 154 が可逆になるように配置のサイズ N は奇数と仮定する. δ をルール 154 の局所写像とする. また, $f: \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k$ を右シフトとする.

$$f(c(i)) = c(i-1) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ここで, c は奇数サイズ N の配置である. これらの合成写像 $f \circ \delta$ を考えると, 可逆な大域写像 G が得られる.

$$G(c) = c' \tag{1}$$

ただし,

$$c'(i) = \delta(c(i-2), c(i-1), c(i)) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

である. この局所写像は具体的に次のように表される.

$$c'(i) = \begin{cases} c(i-2) + c(i) & \text{if } c(i-1) = 0 \\ c(i) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

ここでの和は mod 2 で考える. 8通りの局所写像全てを $\frac{c(i-2)c(i-1)}{c'(i)}$ のように表示すると次のようになる.

$\frac{11}{1}$	$\frac{11}{0}$	$\frac{10}{0}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{01}{1}$	$\frac{01}{0}$	$\frac{00}{1}$	$\frac{00}{0}$
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

これから分かるように, $c(i)$ は 10 が左から当たるときのみ $c'(i) = 1 + c(i) \pmod{2}$ へと時間発展し, それ以外は変化しない ($c'(i) = c(i)$). 故に, 配置はいくつかの領域に分割され, その領域内部でのみ時間発展する.

3.1 ブロックの構成

与えられた配置の時間発展する領域は次のように特定することができる.

1. 配置の中に含まれる全ての 10 に下線を引く.
2. 右隣が下線の引かれていないセルであるような, 下線の引かれた隣り合う 2 セルの組の中から任意の一组を選ぶ.
3. その下線の引かれた隣り合う 2 セルの組の右隣の 2 セルが
 - (a) 00 ならば, その 00 に下線を引き手順 3 へ行く.
 - (b) そうでなければ, 右隣の 2 セルの左側のセルのみ下線を引き手順 2 へ行く.
4. 手順 2 を可能な限り繰り返す.

この手順によって, いくつかの下線を引かれた隣り合う 2 セルの組といくつかの下線の引かれた 1 セルが配置の中に得られる. ここで, 下線の引かれた隣り合う 2 セルの右隣は, 下線の引かれた隣り合う 2 セルであるか下線の引かれた 1 セルであるかのいずれかである. したがって, 与えられた配置の中に, いくつかの下線の引かれた隣り合う 2 セルとただ一つの下線の引かれた 1 セルからなるブロックが存在し, ただ一つの下線の引かれた 1 セルはそのブロックの右端に位置することが分かる. このような下線の引かれたセルのブロックを単純に「ブロック」と呼ぶ. 構成方法から, 残りの (下線の引かれていない) セルの値は 1 であり, それらは大域写像 G により時間発展しない. 同様に, 各ブロックにおいて, 左から偶数番目のセルも G により時間発展しない. さらに, ブロックは左から偶数番目のセルの値が 1 をとるときにのみ途切れるので, ブロックサイズは時間変化しない.

Example 1 次の配置を考える.

1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1

初めに, 全ての 10 に下線を引く (手順 1).

1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1

次に, 例えば左端の下線の引かれた隣り合う 2 セルをとり (手順 2), その右隣の 0 に下線を引く (手順 3).

1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1

これらの手順を繰り返すと、最終的にそれぞれサイズ 3, 9, 3, 5 の四つのブロックを得る.

$$\underbrace{100}_{\text{size 3}} \underbrace{11}_{\text{size 2}} \underbrace{101010000}_{\text{size 9}} \underbrace{100}_{\text{size 3}} \underbrace{1}_{\text{size 1}} \underbrace{10101}_{\text{size 5}} \underbrace{11}_{\text{size 2}}$$

これらのブロックを隔てる境界壁のサイズは左から順に 2, 0, 1, 2 である.

3.2 時間発展

ブロックの時間発展を考えよう. 時刻 t におけるサイズ $2L+1$ ($L \in \mathbb{N}$) のブロックのセル値を $b_0^t, b_1^t, \dots, b_{2L}^t$ とおく. ブロックの作り方から, $b_0^t, b_1^t, \dots, b_{2L}^t$ は自然に次を満たす.

$$b_0^t = 1 \quad \text{and} \quad b_{2i+1}^t = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, L-1 \quad \text{and any } t \geq 0 \quad (3)$$

よって, このブロックに対する初期条件は

$$b_0^0 = 1 \quad \text{and} \quad b_{2i+1}^0 = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (4)$$

となる. 条件 (3) および局所写像 (2) により, このブロックは次の境界条件を満たさなければならない.

$$b_0^t = 1 \quad \text{and} \quad b_1^t = 0 \quad \text{for any } t \geq 0 \quad (5)$$

一般に, あるセルの近傍の可能な配置は 8 通りであるが, 条件 (3) により, ブロックの中に現れる配置は 101, 100, 010, 001, 000 の 5 通りのみである. よって, ルール 154 の局所写像のうちブロックの時間発展に必要なものは次の 5 通りのみである.

$$\delta(1, 0, 0) = \delta(0, 0, 1) = 1 \quad \delta(1, 0, 1) = \delta(0, 1, 0) = \delta(0, 0, 0) = 0$$

したがって, ブロックの時間発展は

$$b_i^{t+1} = b_{i-2}^t + b_i^t \pmod{2} \quad (i = 2, 3, \dots, 2L) \quad (6)$$

と表されるが, これは可換環 $\mathbb{Z}_2$ 上の線形差分方程式に他ならない. このようにして, 周期境界をもつルール 154 の初期値問題は, $\mathbb{Z}_2$ 上の線形差分方程式 (6) の初期値境界値問題 (4,5) に帰着された.

一般に, セルオートマトンの配置は母関数を用いて表すことができる [4]. 条件 (3) に注意すると, ブロックの配置の母関数は次のように表される.

$$B(x)^t = 1 + \sum_{i=1}^L b_{2i}^t x^{2i}$$

ここで, x^i の係数が i 番目のセル値であり, 全ての係数は $\mathbb{Z}_2$ の要素と見なす. (6) より, ブロックの時間発展は, その配置の母関数に次の $\mathbb{Z}_2$ 上の多項式をかけることにより表される.

$$T(x) = 1 + x^2$$

すなわち

$$B(x)^{t+1} = T(x)B(x)^t$$

である. ただし, $i > 2L$ に対する x^i の係数は 0 と仮定する.

ブロックの逆方向の時間発展も、同様に次の多項式で表される。

$$T^{-1}(x) = \sum_{i=0}^L x^{2i}$$

よって、

$$\begin{aligned} B(x)^{t-1} &= T(x)^{-1} B(x)^t \\ &= 1 + \sum_{i=1}^L \left(1 + \sum_{j=1}^i b_{2j}^t \right) x^{2i} \end{aligned}$$

である。したがって、あるブロックに含まれるセルの 1 ステップ前の値は、現在の時刻におけるそのセル自身および左側にある全てのセルの値の mod 2 での和である。

3.3 周期

与えられた L に対して、 s を次のようにおく。

$$s = \lfloor \log_2 L \rfloor \quad (7)$$

ここで、 $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ は floor 関数である。このとき、任意の $B(x)^t$ に対して、 2^{s+1} は次を満たす最小の自然数である。

$$B(x)^{t+2^{s+1}} = T(x)^{2^{s+1}} B(x)^t = B(x)^t$$

理由は次の通りである。次が成り立つこと

$$T(x)^{2^n} = 1 + x^{2^{n+1}} \quad \text{for } n \geq 0$$

および (7) より次が導かれることに注意しよう。

$$2^{s+1} \leq 2L < 2^{s+2}$$

$T(x)^{2^{s+1}} B(x)^t$ において、 $x^{2^{s+2}} B(x)^t$ の全ての項の次数は $2L$ より大きいので、 $x^{2^{s+2}} B(x)^t$ は 0 である。したがって、 $T(x)^{2^{s+1}} B(x)^t = B(x)^t$ が成り立つ。もし $T(x)^n B(x)^t = B(x)^t$ を満たす $n < 2^{s+1}$ が存在するならば、 n は 2^{s+1} の約数でなければならないので、ある $s' < s$ に対して $n = 2^{s'+1}$ と表される。しかし、

$$2^{s'+2} < 2L$$

なので、そのような s' に対して $x^{2^{s'+2}} B(x)^t$ は決して 0 にならない。故に、 $T(x)^n B(x)^t = B(x)^t$ を満たす $n < 2^{s+1}$ は存在しない。

$B(x)^{t+n} = B(x)^t$ を満たす最小の自然数は、時間発展 $T(x)$ における配置 $B(x)^t$ の基本周期と呼ばれる。したがって、サイズ $2L+1$ のブロックの基本周期は 2^{s+1} である。ブロックの基本周期はその配置ではなくそのサイズだけに依存することに注意。

サイズ N の配置 c がサイズ $2L_1+1, 2L_2+1, \dots, 2L_l+1$ ($L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_l \in \mathbb{N}$) の l 個のブロックを含むと仮定する。このとき、 $L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_l \in \mathbb{N}$ に対してそれぞれ

$$s_i = \lfloor \log_2 L_i \rfloor \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

とおく. このとき, 大域写像 G による時間発展における, この配置 c の基本周期は $2^{s_1+1}, 2^{s_2+1}, \dots, 2^{s_l+1}$ の最小公倍数, すなわち $2^{\max_{i=1}^l [s_i+1]} = 2^{s_l+1}$ に依存する. 大域写像 G はルール 154 の局所写像 δ と右シフト f の合成 $f \circ \delta$ により与えられるので, ルール 154 の大域写像 F により 2^{s_l+1} ステップ時間発展した後の配置は初期配置の左への 2^{s_l+1} シフトである. 配置 c のサイズ N は奇数なので, 2^{s_l+1} と互いに素である. 故に, 次の命題を得る

Proposition 1 上の条件を満たす配置 c のルール 154 の時間発展における基本周期は

$$2^{s_l+1}N$$

の約数である. さらに, この配置 c が並進対称性を持たなければ基本周期はちょうど $2^{s_l+1}N$ である.

ブロックの基本周期はそのサイズのみに依存するので, 固定された N に対して, サイズ N の配置の最大基本周期はただ一つのブロックのみからなる配置により達成される.

Corollary 1 サイズ N の配置の最大基本周期 $P_{\max}$ は次を満たす.

$$\frac{1}{2}N(N+1) \leq P_{\max} \leq N(N-1)$$

4 一般化

前節では, 周期境界をもつ可逆なルール 154 の初期値問題は可換環 $\mathbb{Z}_2$ 上の線形差分方程式 (6) の初期値境界値問題 (4,5) に帰着されることを示した. その中で, 可逆 ECA の次の性質がその時間発展における振る舞いを特徴づけることが分かった.

1. 全ての配置において, 境界壁により分けられるブロック内部で時間発展は完結する.
2. 各ブロックにおいて, 時間発展は可換環上の線形方程式である.

この性質を保つような任意の $k \in \mathbb{N}$ および $r \in \mathbb{N}$ に対する CA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ を求める.

4.1 ルール

ルール 154 の大域写像 G (1) において, セル値 1 (resp. 0) は 10 が左から当たるときのみ 0 (resp. 1) へ変化するのであった. よって, 10 は次の置換として $\mathbb{Z}_2$ に作用する.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このことに注意して, 右シフト $f: \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k$

$$f(c(i)) = c(i - e_r) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

と局所写像 δ の合成 $f \circ \delta$ が次のように与えられる CA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ のルールを考える; サイズ $r-1$ の列 $i0 \dots 0$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) が巡回置換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 \\ \alpha i & \alpha i + 1 & \dots & \alpha i + k - 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

として可換環 $\mathbb{Z}_k$ に作用する. ただし, $0 \leq \alpha \leq k-1$ とする. すなわち, 配置 c の j 番目のセル値 $c(j)$ は $i0 \dots 0$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) が左から当たるときのみ $\alpha i + c(j)$ へ変化する. したがって, $f \circ \delta$ は次のように表される.

$$c'(j) = \begin{cases} \alpha c(j-r+1) + c(j) & \text{if } c(j-r+2) = \dots = c(j-1) = 0 \\ c(j) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

ここで, 和は $\text{mod } k$ で考える. $\alpha = 0$ ならば, このルール (9) は恒等写像 $c'(j) = c(j)$ に他ならない.

このような $f \circ \delta$ により与えられる大域写像 G

$$G(c) = c'$$

による時間発展を考えると, 実際に性質 1, 2 をもつ; すなわち, 次のように与えられた配置からブロックを取り出すことが可能である.

1. 全てのサイズ $r-1$ の列 $i0 \dots 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) に下線を引く.
2. 右隣が下線の引かれていないセルであるような, 下線の引かれた $r-1$ 個の隣り合うセルの組から任意の一组をとる.
3. その下線の引かれた $r-1$ 個の隣り合うセルの右隣の $r-1$ 個のセルが,
 - (a) $0 \dots 0$ ならばその $0 \dots 0$ に下線を引き手順 3 へ行く.
 - (b) そうでなければ, 右隣の $r-1$ 個のセルの左端だけに下線を引き手順 2 へ行く.
4. 手順 2 を可能な限り繰り返す.

配置のサイズが $r-1$ の倍数でなければ, この手続きは有限回で終了し, サイズ $1 \pmod{r-1}$ のブロックがいくつか得られる. 各ブロックにおいては, 位置 $i = 1 \pmod{r-1}$ のセルのみ時間発展する. 列 $0 \dots 0$ は恒等的に作用するので, 各セルの左端は時間的に変化しない. 故に, ブロックのサイズは保存量である. 配置のサイズが $r-1$ の倍数でないときこのルールは可逆である. また, 次のルール番号をもつ.

$$R = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_r \in \mathbb{Z}_k} \psi(s_1, s_2, \dots, s_r) k^{k^{r-1}s_1 + k^{r-2}s_2 + \dots + k^0 s_r} \quad (10)$$

ここで,

$$\psi(s_1, s_2, \dots, s_r) = \begin{cases} \alpha s_1 + s_r \pmod{k} & \text{if } s_2 = \dots = s_{r-1} = 0 \\ s_r & \text{otherwise} \end{cases}$$

である.

Remark 1 $\text{CA } \mathcal{A}_r^{(k)}$ に対応する de Bruijn グラフ $G_{r-1}^{(k)}$ の頂点 v_i を $v_i = (i-1)_k$ とおく. ここで, $(i-1)_k$ は $i-1$ の k 進数表示を意味し, その k 進数表示の長さが $r-1$ 未満の場合は長さが $r-1$ となるように左側に 0 を並べるものとする. グラフ $G_{r-1}^{(k)}$ の重み付き隣接行列 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ を考える. ただし, $M_R G_{r-1}^{(k)}$ の成分はルール (9) に従って重みづけられていると仮定する. 行列 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ の

第 i 行成分 k^{r-1} 個全ての和を S_i とおく. このとき, 重み付き隣接行列 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ は次の性質をもつ; 全ての行和 S_i はトレースおよび重みの総和 $\sum_{l=0}^{k-1} a_l$ 両方と一致する:

$$S_i = \text{tr} [M_R G_{r-1}^{(k)}] = \sum_{l=0}^{k-1} a_l \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, k^{r-1} \quad (11)$$

なぜなら, 行列 $M_R G_{r-1}^{(k)}$ は, 左シフト $c'(i) = c(i + e_r)$ と等価なルールに従って重みづけられた隣接行列の行への巡回置換 (8) の作用により得られるが, 頂点 v_i の定め方から, 左シフトによる重み付き隣接行列が (11) を満たすことは明らかであり, 行成分の置換は行和 S_i とトレースを不変にするからである. 論文 [13] で指摘したように, $k = 2$ および $r = 3$ の場合の性質 (11) は ECA の可逆性の十分条件である.

4.2 時間発展

サイズ $(r-1)L + 1$ のブロックのセルの値をそれぞれ $b_0^t, b_1^t, \dots, b_{(r-1)L}^t$ ($L \in \mathbb{N}$) とおく. このとき, ルール (9) によるこのブロックの時間発展は, 次の可換環 $\mathbb{Z}_k$ 上の線形差分方程式で与えられる.

$$b_i^{t+1} = \alpha b_{i-r+1}^t + b_i^t \pmod{k} \quad (i = 2, 3, \dots, (r-1)L). \quad (12)$$

ブロックの構成方法から, 任意の $t \geq 0$ に対して b_0^t は $1, 2, \dots, k-1$ のいずれかの固定された値をとる. また, 任意の $t \geq 0$ および $j \neq (r-1)i$ ($i = 1, 2, \dots, L$) に対して

$$b_j^t = 0 \quad (13)$$

である. よって, このブロックに対する初期条件は

$$b_0^0 \neq 0 \quad \text{and} \quad b_j^0 = 0 \quad \text{for } j \neq (r-1)i \quad (i = 1, 2, \dots, L) \quad (14)$$

となる. 条件 (13) および局所写像 (12) により, このブロックは次の境界条件を満たさなければならない.

$$b_0^t = b_0^0 \quad \text{and} \quad b_1^t = b_2^t = \dots = b_{r-2}^t = 0 \quad \text{for any } t \geq 0 \quad (15)$$

サイズが $r-1$ の倍数でない任意の配置はいくつかのブロックを含み, ブロックに含まれないセルの値は時間変化しないので, 周期境界をもつルール (9) の初期値問題は線形差分方程式 (12) の初期値境界値問題 (14, 15) に帰着する.

条件 (13) より, このブロックの母関数表示は次のようになる.

$$B(x)^t = b_0^0 + \sum_{i=1}^L b_{(r-1)i}^t x^{(r-1)i}$$

ただし, 係数は可換環 $\mathbb{Z}_k$ の要素とみなす. 次の時刻の母関数表示 $B(x)^{t+1}$ は, $\mathbb{Z}_k$ 上の多項式

$$T(x) = 1 + \alpha x^{r-1}$$

をかけることにより与えられる. ただし, $i > (r-1)L$ に対する x^i の係数は 0 と仮定する.

4.3 周期

さて, $k = \prod_{i=1}^n p_i^{m_i}$ と仮定しよう. ただし, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ は素数であり, $m_1, m_2, \dots, m_n$ は自然数とする. ここで

$$s_i = \lfloor \log_{p_i} L \rfloor \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とおく. また, 簡単のため $M := \prod_{i=1}^n p_i^{s_i+m_i}$ とおく. このとき, 次の補題が成り立つ.

Lemma 1 サイズ $(r-1)L+1$ のブロックのルール (9) における基本周期は

$$M = \prod_{i=1}^n p_i^{s_i+m_i}$$

である.

(証明) $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ より, $\mathbb{Z}_k$ 上の多項式 $T(x)^M$ は次のように展開できる.

$$\begin{aligned} T(x)^M &= (1 + \alpha x^{r-1})^M \\ &= 1 + {}_M C_{p_1^{s_1+1}} \alpha^{p_1^{s_1+1}} x^{(r-1)p_1^{s_1+1}} + \dots + \alpha^M x^{(r-1)M} \end{aligned} \quad (16)$$

すなわち, 1 を除いた最低次は $(r-1)p_1^{s_1+1}$ 次である. なぜなら, 二項係数 ${}_M C_i$ において, どのような $i < p_1^{s_1+1}$ に対しても ${}_M C_i = 0 \pmod{k}$ である. 一方, $i = p_1^{s_1+1}$ のとき

$$\begin{aligned} {}_M C_{p_1^{s_1+1}} &= \frac{M(M-1)\dots(M-p_1^{s_1+1}+1)}{p_1^{s_1+1}!} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n p_i^{m_i} \prod_{i=2}^n p_i^{s_i}}{p_1} \underbrace{\frac{(\prod_{i=1}^n p_i^{s_i+m_i} - 1) \dots (\prod_{i=1}^n p_i^{s_i+m_i} - p_1^{s_1+1} + 1)}{(p_1^{s_1+1} - 1)(p_1^{s_1+1} - 2) \dots 1}}_{(*)} \end{aligned}$$

であるが, (*) の分母分子には同数の p_1 が現れ互いに打ち消し合うので, ${}_M C_i \neq 0 \pmod{k}$ となる.

ここで,

$$s_1 = \lfloor \log_{p_1} L \rfloor$$

より,

$$p_1^{s_1} \leq L < p_1^{s_1+1} \quad (17)$$

なので, $(r-1)p_1^{s_1+1} > (r-1)L$ が成り立つ. よって, (16) の 1 以外の項の次数は全て $(r-1)L$ より大きい. これらの係数は 0 とみなすので, 結局次を得る.

$$T(x)^M B(x)^t = B(x)^t$$

すなわち, M は周期である.

周期 M の最も大きな約数 M/p_1 を考えると, $T(x)^{M/p_1}$ の 1 以外で最も次数の低い項は

$${}_{M/p_1} C_{p_1^{s_1}} \alpha^{p_1^{s_1}} x^{(r-1)p_1^{s_1}}$$

である. (17) より, この項は $(r-1)L$ 次以下なので 0 とはならない. したがって, M/p_1 は周期でない. 周期 M のより小さな約数 d に対して, $T(x)^d$ はより次数の低い項を含むので, d は周期でない. 故に, M は $T(x)$ の基本周期である. ■

サイズ $(r-1)L_1+1, (r-1)L_2+1, \dots, (r-1)L_l+1$ ($L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_l \in \mathbb{N}$) の l 個のブロックを含むサイズ $N \neq 0 \pmod{(r-1)}$ の配置 c を考える. また, $L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_l \in \mathbb{N}$ に対して

$$s_j^i = \lfloor \log_{p_j} L_i \rfloor \quad (i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, n)$$

とおく. このとき, 補題 1 より, 各ブロックの基本周期の最小公倍数

$$\text{LCM} \left(\prod_{i=1}^n p_i^{s_i^1+m_i}, \prod_{i=1}^n p_i^{s_i^2+m_i}, \dots, \prod_{i=1}^n p_i^{s_i^l+m_i} \right) = \max_{j=1}^l \left(\prod_{i=1}^n p_i^{s_i^j+m_i} \right) = \prod_{i=1}^n p_i^{s_i^l+m_i}$$

が, ルール (9) における, この配置の基本周期となる.

今, 局所写像 δ のみから定まる大域写像 F

$$F(c) = c'$$

ただし

$$c'(j) = \begin{cases} \alpha c(j + e_r - r + 1) + c(j + e_r) & \text{if } c(j + e_r - r + 2) = \dots = c(j + e_r - 1) = 0 \\ c(j + e_r) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

を考える. 大域写像 F による時間発展 $\prod_{i=1}^n p_i^{s_i^l+m_i}$ ステップ後の配置は, 初期配置を $e_r \prod_{i=1}^n p_i^{s_i^l+m_i} \pmod{N}$ だけ左シフトしたものである. したがって, 次の命題を得る.

Proposition 2 ルール (18) において, 上の条件を満たす配置 c の基本周期は

$$\frac{N \prod_{i=1}^n p_i^{s_i^l+m_i}}{\text{GCD} \left(N, e_r \prod_{i=1}^n p_i^{s_i^l+m_i} \right)} \quad (19)$$

の約数である. ここで, $\text{GCD}(A, B)$ は A と B の最大公約数を表す. さらに, この配置 c が並進対称性をもたなければ, 基本周期はちょうど (19) である.

N が固定されたとき, サイズ N の配置の最大基本周期について次が成り立つ.

Corollary 2 $N = \mu \neq 0 \pmod{(r-1)}$ とする. このとき, ルール (18) において, 与えられたサイズ N の配置の最大基本周期 $P_{\max}$ は次を満たす.

$$\prod_{i=1}^n \left\{ p_i^{m_i-1} \left(\frac{N-\mu}{r-1} + 1 \right) \right\} \leq \frac{P_{\max}}{N} \times \text{GCD} \left(N, e_r \prod_{i=1}^n p_i^{s_i^l+m_i} \right) \leq \prod_{i=1}^n \left(p_i^{m_i} \frac{N-\mu}{r-1} \right)$$

Example 2 $k=3$ および $r=3$ とする. また, $\alpha=1$ とおく. このとき, ルール (9) は次のようになる.

$$c'(j) = \begin{cases} c(j-2) + c(j) \pmod{3} & \text{if } c(j-1) = 0 \\ c(j) & \text{otherwise} \end{cases}$$

ルール番号は

$$R = \sum_{s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}_3} \psi(s_1, s_2, s_3) 3^{3^2 s_1 + 3 s_2 + s_3} = 6155261949729$$

である. このルールは配置のサイズが奇数のとき可逆である. $e_r = 1$ とおいたときの時間発展の様子を図 1 に示す. 初期配置に含まれる最大のブロックサイズは 7 であるので, ルール (18) のもとでのこの初期配置の基本周期は

$$3^{\lfloor \log_3 7 \rfloor + 1} \times 101 = 909$$

である.

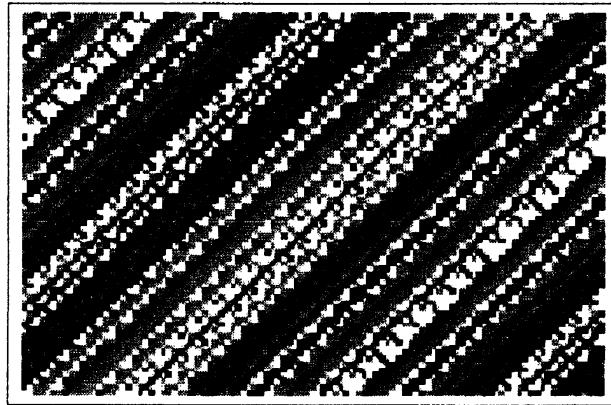


図 1: 初期配置におけるセル値を 0, 1, 2 からランダムにとった, ルール (9) の時間発展. セルの数は 101 である. 値 2 をとるセルは黒, 1 および 0 をとるセルはそれぞれグレー, 白で表される.

最後に, 保存量について述べる. 上と同様にサイズ $(r-1)L_1+1, (r-1)L_2+1, \dots, (r-1)L_l+1$ の l 個のブロックを含むサイズ N の配置を考える. サイズ $(r-1)L_i+1$ のブロックの右に続く境界壁のサイズを Q_i-1 とおく ($i=1, 2, \dots, l$). $(r-1)L_i+1$ および Q_i-1 は時間的に変化しないので, 次の $2 \times l$ 行列は保存量である.

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_l \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_l \end{pmatrix} \quad (20)$$

Δ を l_Δ 個の r 以上の数からなる N の分割とする; $\Delta = (q_1, \dots, q_{l_\Delta})$ ($q_1, \dots, q_{l_\Delta} \geq r$). 与えられた自然数 N に対して, 行列 (20) の総数は次で与えられる.

$$\sum_{\Delta} \prod_{i=1}^{l_\Delta} \left(\left\lceil \frac{q_i}{r-1} \right\rceil - 1 \right)$$

ここで, $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ は ceiling 関数であり, 和は r 以上の数からなる N の分割全てを動く.

5 まとめ

周期境界をもつ可逆な ECA であるルール 154 の初期値問題は可換環 $\mathbb{Z}_2$ 上の線形差分方程式の初期値境界値問題に帰着されることが示された. したがって, 周期境界をもつルール 154 の初期値問題を解くことが可能であり, ルール 154 は可積分であると考えられる. ルール 154 と reflection および conjugation に関して合同なルール 166, 180, 210 も同様に線形差分方程式に帰着される.

これらの結果をふまえると, 可逆な ECA は 4 通りに分類される; 自明, 加法的, 線形化可能, 不明の四つである (表 2). 表 2 で不明とされているルール 45, 75, 89, 101 の局所写像は, それぞれ線形化可能なルール 210, 180, 166, 154 の局所写像と 0, 1 の入れ替え写像との合成である. しかし, それらの時間発展における振る舞いは線形化可能なルールのものとは大きく異なる. 例えば, これらのルールにおける一般の配置の基本周期は線形化可能なルールのものよりかなり大きい. これらのルールについて詳しく調べることは今後の課題である.

ルール 154 を任意の $k \in \mathbb{N}$ および $r \in \mathbb{N}$ に対する CA $\mathcal{A}_r^{(k)}$ へ一般化することにより, 線形化可能 CA の族を構成した. この族の各ルールは, 置換 (8) に基づく可換環 $\mathbb{Z}_k$ 上の線形差分方程式に帰着され, 任意の配置に対して基本周期を求めることが可能である (命題 2). ルール 154 と同様に, それと合同なルールも線形化可能 CA へ一般化できる. 最後に, (8) 以外の置換は可逆なルー

表 2: 周期境界をもつ可逆な ECA ルールの分類.

Type	Rule
自明	15 51 85 170 204 240
加法的	105 150
線形化可能	154 166 180 210
不明	45 75 89 101

ルを導かないことに注意しよう. 例えば, $r = 3$ および $k = 3$ とする. 列 00, 10, 20 がセルに左から当たるときそれぞれ次の置換として作用するルールを考えよう.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, サイズ $N = 1 \pmod{2}$ の可逆でない配置が存在する. 実際, サイズ $N = 3$ の二つの配置 100 および 201 は, どちらも配置 201 へと時間発展するので, 配置 201 は可逆でない.

参考文献

- [1] Wolfram S 1983 *Rev. Mod. Phys.* **55** 601-644
- [2] Wolfram S 1984 *Physica D* **10** 1-35
- [3] Wolfram S 1985 *Phys. Scr.* **T 9** 170-183
- [4] Martin O, Odlyzko A and Wolfram S 1984 *Comm. Math. Phys.* **93** 219-259
- [5] Takahashi D and Satsuma J 1990 *J. Phys. Soc. Japan* **59** 3514-3519
- [6] Tokihiro T, Takahashi D, Matsukidaira J and Satsuma J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3247-3250
- [7] Torii M, Takahashi D and Satsuma J 1996 *Physica D* **92** 209-220
- [8] Matsukidaira J, Satsuma J, Takahashi D, Tokihiro T and Torii M 1997 *Phys. Lett. A* **225** 287-295
- [9] Takahashi D and Matsukidaira J 1997 *J. Phys. A* **30** L733-L739
- [10] Hatayama G, Hikami K, Inoue R, Kuniba A, Takagi T and Tokihiro T 2001 *J. Math. Phys.* **42** 274-308
- [11] Yura F and Tokihiro T 2002 *J. Phys. A* **35** 3787-3801
- [12] Yoshihara D, Yura F and Tokihiro T 2003 *J. Phys. A* **36** 99-121
- [13] Nobe A and Yura F 2004, *J. Phys. A* **37** 5789-5804
- [14] Mendelsohn N S 1970 *Combinatorial Theory and its Applications II Proc. Colloq. Balatonfűred, 1969* (North-Holland, Amsterdam) 783-799

- [15] Nasu M 1978 *Math. Systems Theory* **11** 327-351
- [16] Jen E 1987 *Complex Systems* **1** 1045-1062
- [17] Godsil C and Royle G 2001 *Algebraic Graph Theory: Graduate Texts in Mathematics* **207**
(New York:Springer-Verlag)