

ある整函数の可換性について

東工大 理 小林 忠

$f(z), g(z)$ は整函数で $f(g(z)) = g(f(z))$ となっているならば $f(z)$ と $g(z)$ とは可換であるという。

与えられた整函数に対してこの可換な整函数をすべて決定することの問題としており現在までに種々の結果が得られている。

$f(z), g(z)$ は互いに可換な整函数とする。当然

$$f'(g(z))g'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

である。よって $g'(z) = 0$ ならば $f'(z) = 0$ 又は $g'(f(z)) = 0$, $f'(z) = 0$ ならば $g'(z) = 0$ 又は $f'(g(z)) = 0$ であるが仮りに $f'(z)$ の零位と $g'(z)$ のそのほか位数を合めて完全に一致していることから命題は、函数 $f(z)$ と $g(z)$ との関係をある程度導くことが出来る。即ち $f'(z), g'(z)$ の零位の分布状況を調べることから可換な函数を決める一つの方法であろう。

この方向に沿って以下 $f(z) = z + e^z$ と可換となる位函数

有限回整函数 $g(z)$ を決定してみよう。

まず $g'(z) \neq 0$ と仮定する。この時 $f(z)$ の相異なる零
点 a, b に対して

$$\bar{N}(r, a, g) + \bar{N}(r, b, g) \leq N(r, 0, f')$$

と付く。よって $g(z)$ の位数は高々 1 である。

$$g'(z) = \exp(Az + B)$$

である。 $A \neq 0$ ならばある定数 ρ と $\rho < g(z) \neq 0$ と付く。

これは矛盾である。結局函数 $g(z)$ は一次多項式で

$$g(z) = z + c, \quad e^c = 1$$

と付く。

次に $g'(z)$ の零点を z について考える。 $g'(z)$ の零
点の全体集合を O とおく。 $z \in O$ の場合は $f(z) = 0$ に
於いて $f'(g(z))g'(z) = 0$ である。集合 O を次の三つの集合
に分割する。

$$A = \{z \in O : f(z) = 0 \text{ の根はすべて } g'(z) = 0 \},$$

$$B = \{z \in O : f(z) = 0 \text{ の根はすべて } g'(z) \neq 0 \},$$

$$C = O - (A + B).$$

z は集合 A の点とする。 z において $f(f(z)) = 0$ ならば

$g'(f(z)) = 0$ 。よって $g'(z) = 0$ 又は $f'(g(z)) = 0$ である。

$f'(g(z)) = 0$ ならば $f'(z) - 1 = f(z) - z = e^z$ から

$$-1 = f(g(z)) - g(z) = \exp(g(z)).$$

故に $f'(g(z)) = 0$ となる。

$$\begin{aligned} g(s) &= f(g(f(z))) \\ &= g(f(z)) + \exp(g(f(z))) \\ &= g(z) - 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

以上より $f(f(z)) = s$ となる数 z に対しては $g'(z) = 0$ 又は

$$g(z) = 1 + e^{-1} + g(s) \text{ となる. } \text{すなわち } F(z) = f(f(z)),$$

$$c = 1 + e^{-1} + g(s) \text{ かつ}$$

$$\overline{N}(x, s, F) \leq N(x, 0, g') + N(x, c, g)$$

を意味している。函数 $g(z)$ の位数は有限であるから当然

$\overline{N}(x, s, F)$ の位数も有限となる。すなわち矛盾である。結局
集合 A は 空集合となっている。

実は集合 C の数と決定する。この時 $f(u) = s$,

$f(v) = s$, $g'(u) = 0$, $g'(v) \neq 0$ となる数 u, v がある。

$f'(g(v)), g'(v) = g'(f(v)), f'(v) = 0$ から $f'(g(v)) = 0$ 。よって

$g(s) - g(v) = \exp(g(v)) = -1$ となっている。この

とき w は $f(z) = u$ の根であるから $g'(w) \neq 0$ となる。 $g'(u) = 0$,

$f(w) = u$, $g'(w) \neq 0$ から $f'(g(w)) = 0$ 。よって

$$g(u) - g(w) = \exp(g(w)) = -1.$$

故に $g(s) = f(g(u)) = g(w) - 1 - e^{-1}$ となる。以上より
は $g(v)$ と $g(w)$ とは

$$g(w) - g(v) = e^{-1},$$

$$\exp(g(w) - g(v)) = 1$$

と付リ矛盾である。結局 $f(z) = u$ の根は可へて $g(z)$ の零位と付る。 $u \neq 0$ であるから u は集合 A の元と付る。こゝは $A = \emptyset$ に矛盾する。故に集合 C 是 $C = \emptyset$ と付てゐる。以上から $O = B$ である。

元 $s \in g(z)$ の零位とおく。当然 $g'(f(s)), f'(s) = f'(g(s)), g'(s) = 0$ 。 $g'(f(s)) = 0$ ならば $f(s) \neq 0 = B$ 。よつて $g'(s) \neq 0$ と付リ矛盾。結局 $g(z)$ の零位に於ては $f(z) = 0$ かつ $g'(f(z)) \neq 0$ と付る。

以下元 s は $g(z)$ のある零位とある。 $s \in B$ から $f(z) = s$ の根は $g(z) \neq 0$ 。よつて $f(z) = s$ 是 $f'(g(z)) = 0$ と付てゐる。恒等式

$$\begin{aligned} f''(g(z)), (g'(z))^2 + f'(g(z)), g''(z) \\ = g''(f(z)), (f'(z))^2 + g'(f(z)), f''(z), \\ f'(z) = 1 + f''(z) \end{aligned}$$

に留意すると $f(z) = s$ の根は

$$\begin{aligned} g''(s), (f'(z))^2 &= f''(g(z)), (g'(z))^2 \\ &= (f'(g(z)) - 1), (g'(z))^2 \\ &= -(g'(z))^2 \end{aligned}$$

と付てゐる。特 $g''(s) \neq 0$ である。

元 s は函数 $F(z) = f(g(z))$ のある s -元とおく。当然

$$q'(f(z)) f'(z) = f'(q(z)) q'(z)$$

よって、又 $f(f(z)) = \alpha$ から

$$q'(\alpha) (f'(f(z)))^2 = - (q'(f(z)))^2.$$

恒等式 $f'(z) = 1 - z + f(z)$ に留意すると

$$f'(f(z)) = 1 - f(z) + f(f(z))$$

$$= 1 - f(z) + \alpha,$$

$$f'(q(z)) = 1 - q(z) + q(f(z)),$$

$$f'(q(f(z))) = 1 - q(f(z)) + f(q(f(z)))$$

$$= 1 - q(f(z)) + q(\alpha)$$

とわかる。 $f(f(z)) = \alpha$ から $f'(q(f(z))) = 0$ 。よって

$q(f(z)) = 1 + q(\alpha)$ 。故に

$$f'(q(z)) = 2 - q(z) + q(\alpha)$$

とわかる。以上より $F(z) = \alpha$ の根 z は

$$\begin{aligned} & (q'(z))^2 (2 + q(\alpha) - q(z))^2 \\ &= - q'(\alpha) (f'(z))^2 (1 + \alpha - f(z))^2 \end{aligned}$$

を満たす。ここを整系数

$$\begin{aligned} G(z) &= (q'(z))^2 (2 + q(\alpha) - q(z))^2 \\ &\quad + q'(\alpha) (f'(z))^2 (1 + \alpha - f(z))^2 \end{aligned}$$

を定義する。 $q(z)$ と $f(z)$ の位数は有限であるから $G(z)$ は位数有限となっている。一方 $F(z) = \alpha$ の根はすべて $G(z)$ の零点である。よって

よ

$$\overline{N}(x, \rho, F) \leq N(x, 0, G)$$

と付く. この不等式から $G(z) \equiv 0$ が結論される. 故に
ある適当な定数 $A \neq 0$ がある

$$\begin{aligned} (2 + g(\rho) - g(z)) g'(z) \\ = A (1 + \rho - f(z)) f'(z) \end{aligned}$$

である. 結局函数 $g(z)$ は

$$\begin{aligned} 2g(z) + g(\rho)g(z) - \frac{1}{2}(g(z))^2 \\ = A \left\{ f(z) + \rho f(z) - \frac{1}{2}(f(z))^2 \right\} + B \end{aligned}$$

と付く. 定数 B を以下求めてみよう. 其 x は $f(x) \neq 0$ かつ $f(x) = 1 + \rho$ と付く x がある. この x に対して

$$\begin{aligned} 4g(x) + 2g(\rho)g(x) - (g(x))^2 \\ = A \{ 2 + 4\rho + 2\rho^2 - (1 + \rho)^2 \} + 2B. \end{aligned}$$

故に $g'(x) \neq 0$ かつ $g(x) = 2 + g(\rho)$ に留意すると

$$(2 + g(\rho))^2 = A(1 + \rho)^2 + 2B.$$

以上より

$$(g(z) - 2 - g(\rho))^2 = A(f(z) - 1 - \rho)^2.$$

よってある定数 $d \neq 0$, β がある

$$g(z) = d f(z) + \beta$$

と付く. $f(g(z)) = g(f(z))$ から d, β を求めると

$$\alpha = 1, \quad e^\beta = 1$$

である。

定理. $f(z) = z + ce^{az}$, $ac \neq 0$ とおく. $f(z)$ と可換
付位数有限付整函数は $\exp(ab) = 1$ とする定数 $b \in \mathbb{C}$ かつ
 $f(z) + b$ 又は $z + b$ に限る。

この方法は $z + \sin(z+c)$ の場合にも適用される。

定理. $f(z) = z + \sin(z+c)$ とおく. $g(z)$ は多項式で
付位数有限付整函数で $f(z)$ と可換ならば. この時 $g(z)$
 $= f(z) + a$, $\cos a = 1$ 又は $g(z) = b - f(z)$,
 $\cos(b+zc) = 1$ である。

次に導函数の零分布を調べることにより整函数

$$ze^z + \exp(ze^z)$$

の一意分解性を証明しよう。

$f(z) = z + e^z$, $g(z) = ze^z$, $H(z) = f(g(z))$ と
おく。

$$\begin{aligned} H'(z) &= f'(g(z)) g'(z) \\ &= (1 + \exp(g(z))) (1+z) e^z \end{aligned}$$

$$= (1 - q(z) + H(z)) (1+z) e^z$$

である。よって $H(0)=1$, $H'(0)=2$. 又 $H'(z)$ の零
共はすべて単根であることに留意する。

$F(z)$, $G(z)$ は共に整函数で

$$H(z) = f(q(z)) = F(G(z))$$

と仮定するもの。この時 $F(0)=1$, $F'(0)=2$, $G(0)=0$,

$G'(0)=1$ と仮定出来る。この仮定の下に (1) $F(z)=f(z)$,

$$G(z)=q(z) \quad (2) \quad F(z)=2z+1, \quad 2G(z)=H(z)-1$$

又は (3) $F(z)=H(z)$, $G(z)=z$ であることを示す
は函数 $H(z)$ の一意分解性 (整函数族に於いて) の証明さ
る。

$F(z)$ の零共が有限個の場合には $F(z)$ が一次多項式に退
化し $F(z)=2z+1$ となることを示す。よって以下 $F(z)$ の
零共は無数にあるものとする。共 w が $F(z)=0$ ならば $G(z)$

$$= w \text{ の根は } H'(z) = F'(G(z)) G'(z) = (1 - q(z) + H(z))$$

$$(1+z) e^z \text{ から } q(z) = 1 + F(w) \text{ 又は } z = -1 \text{ となる。}$$

よって $T(x, G) = O(x)$ である。

$G'(z) \neq 0$ と仮定する。 $G(z) = G(z-1)$, $z \neq -1$ とする共 z
が存在すると $H(z) = F(G(z-1))$ から $H(z)$ は実数となる。

又 $G'(z) \neq 0$ から $F'(G(z-1)) = 0$. 故に $F'(G(z)) = 0$.

よって $H(z) = q(z) - 1$, $\exp(q(z)) = -1$. よって $H(z)$

は実数ではない。矛盾である。結局 $G'(-1) \neq 0$ ならば $G(z) = G(-1)$ の根は $z = -1$ のみとする。

各整数 n について $C_n = (2n+1)\pi i$ の下に集合

$$E_n = \{s : F(s) = 0, F(s) = C_n - 1\}$$

を定義する。

ある整数 n について集合 E_n の無限個の点から成っているとす。 $s_1, \dots, s_m \in E_n$ の m 個の点とすると $G(z) = s_j$ の根は $H(z)$ の零点であるから $g(z) = C_n$ 又は $z = -1$ とする。よって

$$\begin{aligned} (m-1+o(1)) T(x, G) &\leq \sum_{j=1}^m N(x, s_j, G) \\ &\leq N(x, C_n, g) + \log^+ x \end{aligned}$$

である。 m の任意性から結局 $T(x, G) = o(x)$ 。一方無限集合 E_n は非有である。 E_n の各点 s について $G(z) = s$ の根は $z = -1$ 又は $g(z) = C_n$ であるから $G(z) = s$ の根はすべて領域 $\operatorname{Re} z \leq |C_n|$ に分布している。以上から函数 $G(z)$ は高々 2 次の多項式となる。 $G'(-1) = 0$ ならば $G(0) = G(-2)$ 。故に $H(0) = H(-2)$ とは矛盾。結局 $G'(-1) \neq 0$ から $G(z) = z$ が結論される。

以下集合 E_n はすべて有限集合とおく。再び $G'(-1) \neq 0$ と仮定する。 $G(z) = G(-1)$ の根は $z = -1$ のみということから

特に $G(z) = 0$ となる z を α とし、定数 a, b をとって

$$G(z) = G(z-1) + (z+1) \exp(az+b)$$

と表示される。当然

$$G'(z) = (az+a+1) \exp(az+b)$$

である。 $a \neq 0$ と仮定しよう。この時 $u = -1-a^{-1}$ 以下に

$H(u) \neq C_m - 1$ となる整数 m がとれる。また $q(z) = C_m$ の根は $H(z) = C_m - 1$, $H'(z) = 0$ 。又 $z \neq u$ にとれると $G(z) \neq 0$ 。よって $F'(G(z)) = 0$ 。結局 $G(z)$ は集合 E_m の根となる。逆に E_m の根 α に対して $G(\alpha) = 0$ の根 β は $q(\beta) = C_m$ となることとなる。以上より $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in E_m$ があるものとすると

$$Q(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_p)$$

以下に $Q(G(z))$ と $q(z) - C_m$ との差は完全に一致する。よってある定数 a', b' をとって

$$q(z) = C_m + Q(G(z)) \exp(a'z + b')$$

となる。また $\alpha \in F(z)$ の根 $\alpha_1, \dots, \alpha_p, G(z-1)$ とは異なるものとなる。 $G(z) = 0$ の根は $q(z) = 1 + F(\alpha)$ となるから方程式

$$q(z) = C_m + Q(G(z)) \exp(a'z + b'),$$

$$q(z) = 1 + F(\alpha)$$

は無数に多くの共通根をもっている。これから $a' = 0$ を示

さしる。結局

$$g'(z) = Q'(z), G'(z), e^{\theta'}$$

から $g'(u) = 0$. 故に $u = -1$ と有り矛盾である. 以上から $G'(-1) \neq 0$ ならば $G(z) = z$ である.

$G'(-1) = 0$ と仮定する. 実変数 x をもつて曲線

$$I = \{G(x); x \geq -1\}, \quad J = \{G(x); x \leq -1\}$$

を考える. $x = -1$ を除くと $G'(x) \neq 0$ であるから曲線 I, J は共に始点 $G(-1)$ 以外では滑らかと可つてゐる. $H(z) = f(g(z)) = F(G(z))$ から函数 $F(z)$ によつて I は実軸上の半直線 $\{z; z \geq H(-1)\}$ へ, J は実軸上の線分 $\{z; H(-1) \leq z < 1\}$ へ写像されてゐる. 又 I, J は共に単純曲線であつて I, J の各点で $F'(z) \neq 0$ と可つてゐることから. 以上からこの曲線 J は I の一部と完全に一致しかつ J は点 $G(-1) = 0$ に終ることから結論される. 以上は z は実軸の負の部分に沿つて $z \rightarrow \infty$ とし $G(z)$ は 0 に収束することとを意味してゐる. ここで函数 $g(z)$ の値分印に注意すると任意の δ ($0 < \delta < \pi/2$) に對して $|\theta - \pi| \leq \delta$ に於いて一様に

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)e^{i\theta} = 0$$

と可つてゐることから. 恒等式

$$F'(G(z)) G'(z) = \{1 + \exp(g(z))\} g'(z)$$

を用ゐると $|\theta - \pi| \leq \delta$ と一様に

よって

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G'(x)e^{i\theta}}{g'(x)e^{i\theta}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(xe^{i\theta})}{g(xe^{i\theta})} = 1$$

と行っている。以下から $1/G(z)$, $1/G'(z)$ の近接函数を評価しよう

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x, 0, G)}{x} \geq \frac{1}{\pi}, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x, 0, G')}{x} \geq \frac{1}{\pi}$$

である。集合 E_μ の2点 α_1, α_2 を含むと仮定する。 $F'(0) = 2$ から $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ 。一方 $G(z) = \alpha_j$ ($j=1, 2$) の根は $g(z) = C_\mu$ の根と行っているから

$$\begin{aligned} (1+o(1)) T(x, G) + N(x, 0, G') \\ \leq N(x, \alpha_1, G) + N(x, \alpha_2, G) \\ \leq N(x, C_\mu, g). \end{aligned}$$

結局 $N(x, C_\mu, g) \sim x/\pi$ に留意すると $N(x, 0, G') = o(x)$ 。故に $T(x, G) \sim x/\pi$ かつ α を除いた可べりの有限複素数 α に対して $N(x, \alpha, G) \sim x/\pi$ と行っている。これは

$$N(x, \alpha_1, G) + N(x, \alpha_2, G) \leq N(x, C_\mu, g)$$

に矛盾する。よって集合 E_μ は高々1点から行っている。次にある整数 ν に対して $E_\mu = \emptyset$ と仮定する。この時 $g(z) = C_\mu$ の根は $G(z)$ の零点である。故に

$$N(x, \sigma, q) \leq N(x, 0, q'),$$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{T(x, q)}{x} \geq \frac{2}{\pi}.$$

一方 $F(z)$ は相異なる 2 つの零共 a, b を持つ

$$(1 + o(1)) T(x, q) + N(x, 0, q')$$

$$\leq N(x, a, q) + N(x, b, q)$$

$$\leq N(x, 1 + F(a), q) + N(x, 1 + F(b), q) + \log^+ x.$$

よって

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{T(x, q)}{x} + \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x, 0, q')}{x} \leq \frac{2}{\pi}$$

となつてゐる。これは矛盾。以上から各集合 E_ν は 1 共のみからなつてゐる。

$E_0 = \{1\}$ とおく。当然 $F(1) = 0$, $F(1) = i\pi - 1$. 又 $G(z) = 1$ の根は $q(z) = i\pi$ の根である。逆に $q(z) = i\pi$ の根は $E_0 = \{1\}$ から $G(z) = 1$ の根の又は $G(z)$ の零共でなければならぬ。 $q(z) = i\pi$ の根 $\{a_\nu\}$ $\nu \geq 1$ を示す。これらの共は $\mathcal{L} = \{z : |q(z)| = \pi\}$ 上に分布してゐる。簡単な計算から集合 $\mathcal{L}$ は一つの解析曲線でありかつ領域

$$\{z : \operatorname{Re} z \leq \pi, |\arg z| \leq \arccos \frac{-1}{e\pi}\}$$

を含むことゝなる。 $\operatorname{Re} a_1 > 0$, $a_2 = -i\pi$, $\nu \geq 3$

に対しては $\operatorname{Re} a_\nu < 0$ と仮定出来る。 $z \neq -1$ ならば $q'(z)$

$\neq 0$ であるから $g(z)$ は $z \neq -1$ では局所的に単葉である。

よって各自然数 μ に対して

$$z_{\mu}(0) = a_{\mu}, \quad g(z_{\mu}, t) = i\pi(1-t), \quad 0 \leq t < 1$$

と作る単純曲線 $\ell_{\mu} = \{z_{\mu}, t : 0 \leq t < 1\}$ を定義する。

この曲線 ℓ_{μ} は始点 a_{μ} を除くと単連結領域 $\{z : |g(z)|$

$< \pi\}$ に含まれてゐる。 ℓ_1 は a_1 から $z=0$ に終る曲

線である。 $\mu \geq 2$ に対しては

$$\lim_{t \rightarrow 1} \operatorname{Re} z_{\mu}(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1} \arg z_{\mu}(t) = \pi$$

と知られてゐる。よって各自然数 μ に対して $t \rightarrow 1$ の下で

$G(z_{\mu}, t) \rightarrow 0$ 。故に函数 $G(z)$ は曲線 ℓ_{μ} を除き a_{μ} から $z=0$ に至る曲線

$$G(\ell_{\mu}) = \{G(z_{\mu}, t) : 0 \leq t < 1\}$$

に写像してゐる。一方 $0 \leq t < 1$ に対して

$$F(G(z_{\mu}, t)) = f(i\pi - i\pi t)$$

$$= i\pi - i\pi t - \exp(-i\pi t)$$

である。 $f(i\pi - i\pi t)$ は $0 \leq t \leq 1$ で単葉かつ $0 \leq t < 1$ で

$$F'(G(z_{\mu}, t)) G'(z_{\mu}, t) z'_{\mu}(t)$$

$$= i\pi \exp(-i\pi t) - i\pi$$

であるから各曲線 $G(\ell_{\mu})$ は単純で滑らかと知られてゐる。又

$G(a_{\mu})$ を除くと $G(\ell_{\mu})$ の各点で $F'(z) \neq 0$ である。よって

$F'(0) = z \neq 0$ に留意する。結局この考察から各曲線

ζ, ζ' は互いに完全一致していることが結論される。よって各自然数 n について $\zeta(a_n) = \zeta(a_{n+1})$ となっている。

$\zeta(a_n) \neq 0$ と仮定すると $E_0 = \{0\}$ から $g(z) = i\pi$ の根は $\zeta(z)$ の根と一致する。故に

$$N(x, 0, \zeta) \geq N(x, i\pi, g)$$

から矛盾を導ける。よって $\zeta(a_n) = 0$ であり $g(z) = i\pi$ の根と $\zeta(z) = 0$ の根とは完全に一致する。以上からある定数 A, B をもって

$$g(z) - i\pi = (\zeta(z) - 0) \exp(Az + B)$$

とする。函数 $g(z), \zeta(z)$ の漸近挙動から $\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ に対して $z \rightarrow \infty$ 以下に

$$\exp(Az + B) \rightarrow \frac{i\pi}{0}$$

であるから $A = 0$ 。結局

$$\zeta(z) = d g(z) + \beta$$

となり $\zeta(0) = 0, \zeta'(0) = 1$ から $\zeta(z) = g(z)$ となる。

以上で $f(g(z))$ の整函数族の一意的分解性の証明は完了。

合成という演算は非常に複雑であり、ここに与った初等的な函数 $z + e^z$ と可換となる函数を見い出すことこそ煩雑な考察をしなければならぬようである。

可換、一意的分解性等の合成に関する問題を解く手法は現在

かとう大別して二種類ある。

一つは問題とある函数を表示する型を重視するものである。
 以下に図しては (2), (7), (8) を参照。

もう一つは値分布理論を用いて問題とある函数の値分布の
 特性を用いるものである。以下に示しては (4), (5), (6) を参
 照のこと。

文 献

1. Baker, I. N., Zusammensetzungen ganzer Funktionen,
 Math. Zeitschr., 69 (1958), 121-163.
2. Baker, I. N. and F. Gross, Further results on factori-
 zation of entire functions, Proc. Symp. in Pure Math.,
 11 (1968), 30-35.
3. Gross, F., Factorization of meromorphic functions,
 Math. Research Center, Washington D.C., 1972.
4. Ozawa, M., On uniquely factorizable entire functions,
 Kodai Math. Sem. Rep., 28 (1977), 342-360.
5. Ozawa, M., On uniquely factorizable meromorphic func-
 tions, Kodai Math. J., 1 (1978), 339-353.
6. Ozawa, M., Unique factorizability and permutability of
 meromorphic functions, Kodai Math. J.,
7. Urabe, H., Uniqueness of the factorization under compo-
 sition of certain entire functions, J. Math. Kyoto

Univ., 18 (1978), 95-120.

8. Yang, C. C. and H. Urabe, On permutability of certain entire functions, J. London Math. Soc. (2), 14 (1976), 153-159.