

gom の解読可能性

京大 理 佐藤興二

§ 1. 序

一般に, transducer M による記号系列の写像 f とするとき, ある形式言語 L に対して, $f(L)$ 上の写像 f の価数が有界であるとき, M は L に対して有限義解読可能であるという。又, その価数を有限義解読可能性の次数といい, 次数が n なら, n 義解読可能という。

M が, 補助記憶をもたない一方向オートマトン, すなわち一般化された順序機械(gom)であるとき, L が文脈自由言語ならば, 下に示す通り, M が L に対して有限義解読可能であるか, n 義解読可能であるかの判定は一般に可解でない。

ここでは, M が gom, L が正規集合であるとき, これらの決定問題は, 非決定性有限オートマトンによって定義された正規集合の, 系列の受理の仕方(初期状態から最終状態へ達する道筋)の多様度を評価する問題に帰着されることを示し, 実際のプログラムを用いて, これらが決定可能であることを示す。又, 関連するいくつかの結果についても示す。

§2. 諸定義及び問題の帰着.

1. 与えられた $\text{gom } M = \langle K_M, \Sigma, \Delta, \delta_M, \lambda_M, Q_0 \rangle$ と形式言語 $L \subseteq \Sigma^*$ (註1) に対し、 M の任意の出力系列 $y \in \Delta^*$ に対して、 y が出力とされるような入力系列のうち L に属するものの数が常に有限の確定した値 n を越えず、かつ n より小さな数では押さえられないならば、 M は言語 L に対して n 義解読可能である 又は 言語 L は M - n 義である という。又一般にこのような n が存在するとき、 M は L に対して有限義解読可能 (finitely decipherable) である 又は L は M -有界である、といい、 $n \in (\text{有限義解読可能性の次数})$ といふ。

2. M の任意の出力系列 $y \in M(L)$ と、 y が出し終ったあとの M の最終の状態から、対応する入力系列で言語 L に属するものが常に一意的に決まるならば、 M は L に対して情報無損失である 又は L は M -無損失である といふ。 $R(Q_j) = \{Q_j \in K_M\} \in M \in Q_0$ から Q_j へ到達させる入力系列の全集合とるとき、 L が M -無損失であるとは、全ての $Q_j \in K_M$ について、 $L \cap R(Q_j)$ が M -義なることと同義である。したがって M -無損失は M -有界の特殊な場合であり、その次数は M の状態数を越えない。

3. L が M -1 義であるということは、 M の出力列にあって、出力系列から対応する入力系列を解読しようとする "decoder" が、もし入力系列が常に L に属していることを知っていたら、一意的に decode できるということである。

このことは更に次のように一般化できる。すなわち、包含関係のある2つの形式言語 $L, M (L \subset M)$ と、 $\text{gom } M$ に対し、 $y \in M(L)$ なる任意の出力系列に対して、対応する入力系列が M に属することを知っているだけで、

decoderが一意的に解読できるとき、 L は M をヒントとして M -1義であるという。したがって、 L が M -1義であるとは、 L が L 自身をヒントとして M -1義であるということと同義である。 M - n 義、 M -有界、 M -無損失等についても同様のことが定義できる。

以上の定義は形式的には次のようになる。

$L \subset \Sigma^*$ に対して、 $D_n^M(L)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は次のような系列の集合を指示する。

$$D_n^M(L) = \left\{ x \in L \mid \exists x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in L, M(x) = M(x_i) \quad \forall i=1, \dots, n-1 \right. \\ \left. \text{但し, } x_i = x, x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j \right\}$$

L が M - n 義であるとは $D_{n+1}^M(L) = \emptyset$, かつ $D_n^M(L) \neq \emptyset$ なることである。

又、 $L \subset M$ なるとき、正整数 n が存在して

$$D_{n+1}^M(M) \cap L = \emptyset$$

$$\text{かつ } D_n^M(M) \cap L \neq \emptyset \quad \text{したがって } L \subset M - D_{n+1}^M(M)$$

ならば、 L は M をヒントとして M - n 義である。

4. L が M -1義であるとき、 $L' \supseteq L$ なるいかなる L' も M -1義でないならば、 L は極大 M -1義集合であるという。 M - n 義、 M -無損失についても同様。 L が極大 M -1義集合であるための必要充分条件は、 L が M -1義であって、かつ $M(L) = M(\Sigma^*)$ なることである。

系1. L が極大 M -無損失集合であるための必要充分条件は、全ての $Q_j \in K_M$ について、 $L \cap R(Q_j)$ が M -1義であり、かつ $M(L \cap R(Q_j)) = M(R(Q_j))$ なることである。

系2. $A \equiv \Sigma^* - D_{n+1}^M(\Sigma^*)$, $B \equiv L \cap D_{n+1}^M(\Sigma^*)$ とする。

L が極大 M - n 義集合であるための必要充分条件は ① $L \supset A$ ② $M(B) = M(D_{n+1}^M(\Sigma^*))$ ③ $D_n^M(B) = B$ ④ $D_{n+1}^M(B) = \emptyset$ 且全て満たすことである。

定理 1. 任意の順序機械 M と文脈自由言語 L の組 (M, L) について, M が L に対して

- ① 有限義解読可能であるか
- ② 一義解読可能であるか
- ③ 情報無損失であるか
- ④ L が極大 M -1義集合であるか, 極大 M -無損失集合であるか

を判定するアルゴリズムは存在しない。

証明. $\tau_\alpha, \tau_\beta \in$, $\tau_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle$, $\tau_\beta(x) = \langle x, \beta \rangle$, $\forall x \in \Sigma$, ~~ある~~
 なるような homomorphism $(\Sigma^* \rightarrow (\Sigma \times \{\alpha, \beta\})^*)$,
 $M \in$, $M(\langle x, \alpha \rangle) = x$, $M(\langle x, \beta \rangle) = x$ $\forall x \in \Sigma$ ~~なる~~
 なるような homomorphism $((\Sigma \times \{\alpha, \beta\})^* \rightarrow \Sigma^*)$ とする。

$L_1, L_2 \in$ 任意の2つの文脈自由言語とすると, $L = \tau_\alpha(L_1) \cup \tau_\beta(L_2)$ は文脈自由言語であり, M は, 明らかに, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ なる時 $\& \cup$ なる時にのみ L に単射する。任意の2つの文脈自由言語 L_1, L_2 に対して, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ か否かは決定不能であるから, M が L に単射するか否かは決定不能である。 M は L 態が1つの順序機械と見られ, したがって一義解読可能性と無損失性は一致するから, よって ② ③ が決定不能であることが証明された。

① が決定不能であることは, 文脈自由言語の Concatenation $\& \cup$ について閉じていることより証明できる。 $M \in$ 与えられた homomorphism $\Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ とすると,
 $M' \in$ 次のような homomorphism $(\Sigma \cup \{\alpha\})^* \rightarrow (\Delta \cup \{\alpha\})^*$, $(\alpha \notin \Sigma \cup \Delta)$ とする。

$$M'(x) = M(x) \quad \forall x \in \Sigma$$

$$M'(\alpha) = \alpha \quad (L \in \Sigma^*)$$

このとき, $L \in$ 任意の文脈自由言語とすると, 文脈自由言語 $(L\alpha)^*$ が M' -有限であるための必要充分条件は L が M -1義なることである。よって ② に帰着した。

次に $M \in$ identity machine (すなわち $M(x) = x$ $\forall x \in \Sigma$) とすると, 文脈自由言語 L が極大 M -1義集合 (極大 M -無損失集合) なることは, $L = \Sigma^*$ なることと同値である。よって ④ は決定不能。 Q.E.D.

以下, L が正規集合である場合を扱う。

与えられた正規集合 L を受理する (決定性) 有限オートマトン $A = \langle K_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F \rangle$ とする。

given M と有限オートマトン A から定義される 次のような積機械 $M \times A$ を考える。

$$M \times A = \langle K_{M \times A}, \Sigma, \delta_{M \times A}, \lambda_{M \times A}, \tilde{Q}_0 \rangle$$

$$1) K_{M \times A} = K_M \times K_A$$

$$2) \delta_{M \times A}((q_i, q_j), x) = (\delta_M(q_i, x), \delta_A(q_j, x))$$

$$\lambda_{M \times A}((q_i, q_j), x) = \lambda_M(q_i, x)$$

$$(q_i \in K_M, q_j \in K_A, x \in \Sigma)$$

$$3) \text{初期状態 } \tilde{Q}_0 = (Q_0, q_0)$$

積機械 $M \times A$ は、2つの機械 M と A を単に並列させたもの (図1) で、その入出力関係については M と等価 (homomorphic) な機械であり、 M の内部状態に A の状態の各々を組み合わせることにあつて、状態の redundancy が増したにすぎない。又同様に、 $M \times A$ の状態の "A-成分" へのみ注目すれば、これは A と等価なオートマトンであることも明らかである。そこで、A-成分がオートマトン A の最終状態であるような $M \times A$ の状態を、 $M \times A$ の "最終状態" と呼ぶことにし、 $M \times A$ の状態遷移図から入力文字を消し、出力文字へのみ注目すれば、これは出力アルファベット上の正規集合 $M(L) \subset \Delta^*$ を定義する非決定性有限オートマトンであると思わせる。今、 $y \in M(L)$ とするとき、この非決定性有限オートマトン $M \times A$ によつて y が受理される仕方、すなわち初期状態から状態遷移図の矢印をたどつて最終状態へ到達する道筋は、一般に2つ以上存在するが、 M は決定性 gsm であるから、これらの道筋の各々に対して異なる入力系

列が対応していることは明らかである。したがって、正規集合 L が M -有界であるか否かの判定は、 $y \in M(L)$ に対するこれらの受理の道筋の多様度が $M(L)$ 上で有界であるか否かの判定に帰着されることになる。

M - n 義, M -無損失の判定についても同様であって、前者は、道筋の多様度が常に n 以下であるか否かの判定、後者は、 $y \in M(L)$ と、 y を受理する $M \times A$ の最終状態の M -成分から一意的に道筋が決まるか否かの判定と等価である。

そこで、 $M \times A$ の遷移図に於て、1つの状態遷移(矢印)に長さ2以上の出力系列がともなう場合は、途中、出力の一文字ごとに temporary な状態をつけ加え、これらの temporary な状態間の遷移にともなう入力 $a \in \epsilon$ (無入力) とする。(図2) 更に、このようにしてできた遷移図の遷移(矢印)に各々異った label をつける。このような label の集合を $T = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ とする。 r は矢印の数に等しい) このようにすると、遷移図は、 T を入力アルファベットとする決定性有限オートマトンと考えられ、 $M \times A$ を初期状態から最終状態に到達させる遷移の系列は、ある正規集合 $E \subset T^*$ をなす。各遷移 $t_i \in T$ に、それにとりなす入力文字 (ϵ を含む) を対応させる写像 σ_i 、出力文字 (ϵ を含む) を対応させる写像 τ_i とするとき、 $\sigma, \tau \in \text{homomorphism}$ として T^* 上に拡張するならば、 E と L は $\text{homomorphism } \sigma$ により1対1の対応をなし、(したがって $\sigma(E) = L$)、又、 $\tau(E) = M(L)$ となる。

よって、正規集合 L が M -有界か否かの判定は、正規集合 E が T -有界か否かの判定に帰着されるが、ここで注意すべきことは、 τ が $|\tau(t_i)| \leq 1$ $\forall t_i \in T$ なる homomorphism であることである。このような homomorphism

を“矢短縮 homomorphism”と呼ぶことにする。

以下、矢短縮 homomorphism の、一般の正規集合 ECT^* に対する有限義
 解説可能性の判定法をのべる。

§3. 矢短縮 homomorphism の正規集合に対する解説可能性

与えられた矢短縮 homomorphism τ , 正規集合 $E \subset \Sigma^*$ を受理する有限
 オートマトン $B = \langle K_B, \Sigma, \delta_B, q_0, F_B \rangle$ とする。

E が τ -有界か否かを判定するアルゴリズムを、以下であって述べる。

まず、 τ が ϵ -free の場合 (すなわち $|\tau(x)| = 1 \quad \forall x \in \Sigma$, この場合 τ は系列
 を保存する) について説明し、 $\exists x \in \Sigma, \tau(x) = \epsilon$ なる場合は、後で補足的に
 説明する。

Notation: ある $q_i \in K_B$ について、 $q_i \in F_B$ であり、かつ $\forall x \in \Sigma^*, \delta_B(q_i, x) \in F_B$ な
 る場合、 q_i を ϕ -状態という。 B が reduced machine であるなら、 ϕ -状態
 は高々1つである。

1. まず B を受理するオートマトン B の reduced diagram に、 ϕ -状態が
 存在するなら、それを消し、 ϕ -状態への矢印(遷移)、 ϕ -状態からの矢印も共に消す。
 次に各矢印に付随している入力文字を消し、かわりにその入力文字の homomorphism
 τ による出力 $\in \Delta$ を書き込む。この出力図を G とする。図3.1は ϕ -状態以外
 の状態が強く連結であるような出力図の例である。最終状態は $\{q_1, q_2, q_3\}$ とする。

2. 出力図 G から、初期状態 q_0 から始まって、同じ出力をともなう可能
 な状態遷移の標子を示す tree 状の図をつくる。これを “test tree” と呼ぶ
 ことにする。これは非決定性オートマトンから決定性オートマトンをつくる時の手順

と同様のものである。図4.1は図3.の test tree である。いくつかの状態が $\square$ (box と呼ぶ) でかこんでいるのは出力が同じであることを意味しており、各 box の左下の文字はその共通の出力を示す。各 box からは、最大限出力文字数と同等の box が派生することになる。test tree をつくる手続きは無限に続ける必要はない。何故なら、ある box と同じ種類の(すなわち全く同じ状態を含む) box が、その box の“先祖”に存在したら、あとは同じことの繰り返しで、一種の loop に陥るからである。例えば第3列、第4列の $\textcircled{0} \textcircled{1}$ は第2列に、最終列の $\textcircled{0} \textcircled{1} \textcircled{3}$, $\textcircled{0} \textcircled{2} \textcircled{4}$ はそれぞれ第6列、第5列に同じものが存在する。

さて、この例の場合、test tree にあらわれるどの状態に対しても、図5のように2つ以上の矢印が同時に向かっているようなことはない。そのような、2つ以上の矢印が合流する状態が test tree に存在する場合は、その点を“結節点”と呼ぶことにする。結節点が存在するということとは、test tree に於て、初期状態 q_0 から、その結節点の状態 (q_i とする) へ到達する道筋が2つ以上あるということである。これらの道筋が共通の出力をともなっていることは test tree の構成から明らかであり、道筋が異なれば対応する入力も異なるのは当然であるから、これは $\mathcal{P}$ が $\mathcal{C}$ -1 義でないことを意味する。何故なら $y \in \Delta^*$ が共通の出力、 q_i から任意の最終状態へ到達する系列 (q_i は ϕ -状態でないから、そのような系列は存在する) を $x \in \Sigma^*$ とするとき、 $y \tau(x)$ は少なくとも2義に解釈されるからである。

この例では、test tree に結節点が存在せず、かつ各 box に含まれる最終状態の数は最大2 ($\textcircled{0} \textcircled{1} \textcircled{3}$ の①と③) であるから、どのような長い出力系列 $\tau(P)$

に対しても、それを出力とする入力系列で、 B を最終状態へ導くようなものは、高々2通りしかないことがわかる。よって D は $T-2$ 義である。

もし、全ての状態が最終状態なら D は $T-3$ 義となる。

命題1. 出力図 G の test tree に結節点が存在しなければ、 D は T -有界であり、その次数は、各 box に含まれる最終状態の数の最大のものに等しい。

特に、 G が強連結ならば

1) test tree に結節点が存在しないこと、 D が T -有界であるための必要充分条件である。

2) B の最終状態の数 m とするとき、 D が T -有界ならばその次数は高々 m である。

3) D が T -有界ならば、 B の初期状態を変えて得られる新しい正理集合も T -有界であり、その次数は変わらない。

1) の証。 充分なることは明らか。逆に、test tree に結節点が存在するとする。結節点の状態を $q_0 \in K_0$ とするとき、

$\exists x_1, x_2 \in T^*, x_1 \neq x_2$

$\tau(x_1) = \tau(x_2) (= y \text{ とする})$

q_0 から初期状態 q_0 への任意の入力系列を x'

q_0 から任意の最終状態への入力系列を x''

(G が強連結なことから、 x', x'' は必ず存在する)

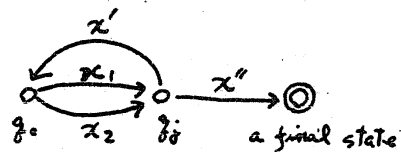
とすると、

$$(y\tau(x'))^n \tau(x'') \in \Delta^*$$

を出力とするような入力系列で、 D に属するものは少くとも 2^n 通り、異ななり、

$\{(\prod_{j=1}^n (x_j, x'_j))x'' \mid x_j = 1 \text{ or } 2\}$ 存在する。 $n \rightarrow \infty$ なら $2^n \rightarrow \infty$ 。

2) 3) は 1) より明らか。



したがって、前節で述べたことより、

命題2. 積機械 $M \times A$ が強連結ならば、 A の最終状態の数 n , M の状態数 m とするとき、 M の L に対する有限義解読可能性の次数は mn を越えない。

3. 次に、一般に、出力図 G が強連結ではなく、かつ test tree に結節点が存在する場合であるが、 L が ε -有界でないということは、“結節点の無限の連なり”が存在して、出力系列が長くなるにつれて、結節点を含む box を通る回数が多くなり、そのたびに対応する入力系列の道筋が増加していくことである。^(註3) したがって、結節点が存在する場合は、これらの結節点から test tree に於て、どのように互いに連結されているか（すなわち矢印で結ばれているか、間接的でもよい）を調べる必要がある。図6の G_2 は強連結でない出力図の例であるが、その test tree (図7) で $\textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4}$ の $\textcircled{4}$ と $\textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{4}$ の $\textcircled{3}$ は結節点である。前者を A 、後者を B とするとき、図7. から明らかに、 A は $\textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4}$ の $\textcircled{3}$ を通って B に、 B は直接 A に、それぞれ到達可能であるから、これらの間の連結は図8のようになる。（注意：結節点は、test tree に於て、 $\textcircled{a}$ 矢印が合流している状態、 $\textcircled{b}$ その状態を含む box の種類（どんな状態が含まれているか）、の2つの要素で特徴づけられるもので、そのどちらが違っても同じ結節点とは見なされない。）この図のように、loop が存在する場合は、“結節点の無限の連なり”が存在するわけであるから、明らかに ε -有界ではない。（ g_3, g_4 のどちらも

最終状態でない場合は $\mathcal{L}$ -有界となるが、この場合は q_3, q_4 は ϕ -状態となり、1. で述べたように、出力図 G には含まれない。

命題 3. test tree に結節点がある場合、 $\mathcal{L}$ が $\mathcal{L}$ -有界であるための必要充分条件は、結節点間の連結を示すグラフに loop が存在しないことである。

証明。 $\mathcal{L}$ -有界でないためには、結節点の無限の連なりが必要であることは test tree の構成から明らかであるが、結節点の種類は有限 (実際、 G の状態数 m とすると高々 $\sum_{i=1}^m \text{in}(c_i)$) だから、結節点間の連結を示すグラフに loop が必要である。

4. ($\mathcal{L}$ -free でない場合) 出力図 G に、無出力 $\in \mathcal{E}$ ともなる遷移がある場合は、そのような遷移 $\mathcal{E}$ 、test tree の各 box の中に書き加える。図 10. は 図 9. の G_3 の test tree である。 $\boxed{① \rightarrow ②}$ は ① から ② へ無出力の遷移があることを示す。 $\boxed{① \rightarrow ②}$ の ② は結節点である。これを A 、 $\boxed{③}$ を B とすれば、結節点間の連結は 図 11. のようになる。 $\mathcal{L}$ -有界性の判定規準は、命題 1, 3, と同様であり、図 11. は loop をなすから、 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ -有界ではない。

以上により次の定理が成り立つ。

定理 2. 任意の gsm M と正規集合の $\text{hwp}(M, L)$ について、 M が L に対して有限義解読可能か否かは決定可能である。

§4. 次数の決定.

次に、正規集合 L が M -有界である場合、解読可能性の次数がいくつであるかを決定することが可能であることを示す。

これは, test tree を変形することによってもおのゝことができるが, ここでは別の問題 (cellular automata) との関連で, L が正理集合であるとき, $D_2^m(L), D_3^m(L), \dots$ が全て正理集合となることを示すことにより, 次数の判定が可解であることを証明する。

補題 1. 任意の正理集合 P と, 短縮 homomorphism τ について, P の中での極大 τ -1 義正理集合 $\hat{P}$, とならう

① $\hat{P} \subset P$ ② $\hat{P}$ は τ -1 義 ③ $\tau(\hat{P}) = \tau(P)$ ④ $\hat{P}$: 正理集合

をすべて満足する $\hat{P}$ が少なくとも 1 つ存在し, かつ実際に構成可能である。

証明。 実際の構成法をのべる。

1. 正理集合 P を受理する有限オートマトン M と, 短縮 homomorphism τ とから, test tree をつくる。test tree にあらわれる box の種類を $b_0 (= \{q_0\}), b_1, b_2, \dots \in 2^{K_0}$ とする。各 box a のそれぞれの状態を (b_i, q_j) であらわす。 (b_i, q_j) は box b_i a 中の状態 q_j という意味である。 $(q_j \in b_i)$ $b_i \in (b_i, q_j)$ の b -成分, $q_j \in (b_i, q_j)$ の q -成分とよぶことにする。

test tree の各矢印に対応する入力文字を書き込み, 各 (b_i, q_j) を 1 つの独立した状態と見なせば, これは, もとの M と等価なオートマトンである。(但し, q -成分が M の最終状態であるような (b_i, q_j) を最終状態とする。) 実際, q -成分が等しい状態は全て等価である。このようなオートマトンを redundant automaton とよぶ。

図 13. は 図 12. で与えられた M と τ から作られた redundant automaton である。box は $b_0 = \{q_0\}, b_1 = \{q_1, q_3\}, b_2 = \{q_2, q_3, q_4\}, b_3 = \{q_0, q_3, q_4\}, b_4 = \{q_1, q_3, q_4\}, b_5 = \{q_3, q_4\}$ の 6 種類である。

2. 次に, redundant automaton における結節点への遷移のうち, 任意の 1 つの遷移 (矢印) だけを残して, 他は消す。同時に, test tree の各 box に 2 つ以上の最終状態が含まれている時は, 各 box について任意に 2 つ中の 1 つを指定して, これを新しいオートマトンの最終状態とする。このようにしてできたオートマトンは, その test tree に結節点をもたず, かつ 2 の各 box には高々 1 つの最終状態が含まれているにすぎない。

図13. では (b_2, q_4) 及び (b_4, q_3) が終節点であるから, $(b_1, q_1) \xrightarrow{x_2} (b_2, q_4)$, $(b_3, q_0) \xrightarrow{x_1} (b_4, q_3)$, $(b_4, q_1) \xrightarrow{x_3} (b_2, q_4)$ の各遷移を消し, 又同時に, 最終状態($\odot$ で示す)として, (b_1, q_1) , (b_2, q_2) , (b_3, q_3) , (b_4, q_3) , (b_5, q_3) を指定したのである。図14. である。図15. は 図14. に於ける同じ box の繰り返しをなくし, 同じ状態を1つにまとめたものである。したがって, 図13. のオートマトンの test tree が 図14. である。

よ、このようにしてできた新しいオートマトン $\hat{B}$ とする。オートマトン $\hat{B}$ は B の redundant automaton からいくつかの遷移を消してできたもので、(かきその最終状態の集合は、redundant automaton の最終状態の集合の部分集合である。したがって、 B で受理される正規集合 $\hat{P}$ とすれば、明らかに $\hat{P} \subset P$ となる。又、 B と $\hat{B}$ からつくられる test tree は、 $\hat{B}$ の構成から明らかのように、各 box に高々1つの最終状態しか含まない。したがって、 $\hat{P}$ は $\mathcal{L}$ -1義である。更に、 B の test tree で最終状態を含んでいるような box に対応する $\hat{B}$ の test tree の各 box は必ず最終状態を含んでいる。したがって、 $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{L}(\hat{P})$ は明らかである。又、 $\hat{P} \subset P$ より $\mathcal{L}(\hat{P}) \subset \mathcal{L}(P)$ 。故に $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(\hat{P})$

よって、①②③④を満たす $\hat{P}$ の存在が、構成的に証明された。Q.E.D.

$$\text{補題2. } D_{n+1}^{\mathcal{L}}(P) = D_n^{\mathcal{L}}(P) \cap \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} \cdot D_n^{\mathcal{L}}(D_n^{\mathcal{L}}(P) - \widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)}) \\ (\mathcal{L} \subset T^*, n=1, 2, 3, \dots)$$

但し、 $\widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)}$ は、 $D_n^{\mathcal{L}}(P)$ 中の任意の極大 $\mathcal{L}$ -1義集合

$$\text{又 } \mathcal{L}^{-1}(A) = \{x \in T^* \mid \mathcal{L}(x) \in A\}$$

証明。 $x \in D_{n+1}^{\mathcal{L}}(P)$ とする。

$D_{n+1}^{\mathcal{L}}(P) \subset D_n^{\mathcal{L}}(P)$ であるから、 $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{L} \cdot D_n^{\mathcal{L}}(D_n^{\mathcal{L}}(P) - \widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)})$ を証明すればよい。

仮定より、 $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in D_n^{\mathcal{L}}(P)$ ($x_i \neq x, x_i \neq x_j$ if $i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n$)

$$\mathcal{L}(x_i) = \mathcal{L}(x) \quad \forall i=1, \dots, n$$

である。

① $x \in D_n^{\mathcal{L}}(P)$ のとき。

$\widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)}$ の意味より、 $\forall x' \in \widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)}, \mathcal{L}(x') \neq \mathcal{L}(x)$

故に、 $x_i \in D_n^{\mathcal{L}}(P) - \widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)} \quad \forall i=1, \dots, n$

よって、 $x_i \in D_n^{\mathcal{L}}(D_n^{\mathcal{L}}(P) - \widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)}) \quad \forall i=1, \dots, n$

故に、 $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x_i) \in \mathcal{L} \cdot D_n^{\mathcal{L}}(D_n^{\mathcal{L}}(P) - \widehat{D_n^{\mathcal{L}}(P)})$

② $x \in D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)}$ のとき。

$\widehat{D_n^c(P)}$ には, $\tau(x') = \tau(x)$ なる x' は 1つしか含まれないから,

$x' = x_n$ とすると, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)}$

故に, $x \in D_n^c(D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)})$

よって, $\tau(x) \in \tau \cdot D_n^c(D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)})$

逆に, $x \in D_n^c(P) \cap \tau^{-1} \cdot \tau \cdot D_n^c(D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)})$

となれば, $x \in D_n^c(P)$ ①

かつ, $\tau(x) \in \tau \cdot D_n^c(D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)})$ ②

とされる。

②より, $\exists x_1 \in D_n^c(D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)})$ ③

$\tau(x) = \tau(x_1)$ ④

③より, $\exists x_2, x_3, \dots, x_n \in D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)}$ ($x_i \neq x_j$, $x_i \neq x_j$ if $i \neq j$ $\forall i, j = 2, 3, \dots, n$)

$\tau(x_1) = \tau(x_2) = \dots = \tau(x_n)$ ⑤

x が $x_1, x_2, \dots, x_n$ のどれとも等しくないときは, ① 及び $D_{n+1}^c(P)$ の定義により,
 $x \in D_{n+1}^c(P)$ 。

$\exists x_i$, $x = x_i$ のとき, ① 及び $\widehat{D_n^c(P)}$ の意味より

$\exists x_{n+1} \in \widehat{D_n^c(P)}$, $\tau(x) = \tau(x_{n+1})$ ⑥

$x_1, x_2, \dots, x_i (=x), \dots, x_n \in D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)}$

$x_{n+1} \in \widehat{D_n^c(P)}$

だから, ⑤ ⑥ より, $x \in D_{n+1}^c(P)$ Q.E.D.

(注意: 右辺第1項の $D_n^c(P)$ は P でもあきかえてもよい)

補題3. P が正規集合であるとき, $D_1^c(P) (=P)$, $D_2^c(P)$, $D_3^c(P)$
は全て正規集合であり, かつ構成可能である。

証明. 数学的帰納法による。

定義により, $D_1^c(P) = P$ だから, 任意の正規集合 P について $D_1^c(P)$ は正規集合である。今, 任意の正規集合 P について, $D_n^c(P)$ が正規集合であるとすると, 補題1. により, $D_n^c(P)$ の中で極大 τ -1 義正規集合 $\widehat{D_n^c(P)}$ が存在する。

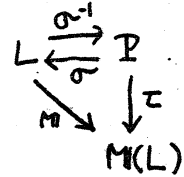
したがって, $D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)}$ は正規集合である。よって, 両ひもとの預定から $D_n^c(D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)})$ は正規集合となり, 正規集合のクラスは, homomorphism τ 及びその逆写像 τ^{-1} について閉じているから, $\tau^{-1} \cdot \tau \cdot D_n^c(D_n^c(P) - \widehat{D_n^c(P)})$ は正規集合となる。

よって、補題2.により、 $D_{n+1}^E(\mathcal{L}) = D_n^E(\mathcal{L}) \cap \tau^{-1} \tau \cdot D_n^E(D_n^E(\mathcal{L}) - \widehat{D_n^E(\mathcal{L})})$ は正規集合である。

又、 $D_n^E(\mathcal{L})$ が「任意の正規集合 $\mathcal{L}$ について構成可能ならば」、補題1.により $\widehat{D_n^E(\mathcal{L})}$ は $D_n^E(\mathcal{L})$ 及び τ より構成可能だから、 $D_{n+1}^E(\mathcal{L})$ は構成可能である。 Q.E.D.

定理3. 任意の gdm M と正規集合 $\mathcal{L}$ の組 $(M, \mathcal{L})$ について、 $D_1^M(\mathcal{L}) (= \mathcal{L})$, $D_2^M(\mathcal{L})$, $D_3^M(\mathcal{L})$ は全て正規集合であり、かつ M と $\mathcal{L}$ より構成可能である。

証明。 $\mathcal{L}$ と M とは homomorphism σ により1対1に対応している。 σ^{-1} は σ の逆写像 (一般に homomorphism) とすると、 $M(x) = \tau \sigma^{-1}(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$ である。よって、 $D_n^M(\mathcal{L}) = D_n^{\tau \sigma^{-1}}(\mathcal{L}) = \sigma \cdot D_n^E(\sigma^{-1} \mathcal{L}) = \sigma D_n^E(\mathcal{L})$ となる。次に、補題3.により $D_n^M(\mathcal{L})$ は正規集合で、かつ構成可能。



系1. 任意の正整数 n について、 M が正規集合 $\mathcal{L}$ に対して n 義解釈可能か否か決定可能である。

系2. M が正規集合 $\mathcal{L}$ に対して情報無損失か否か決定可能である。

系3. 任意の正整数 n について、正規集合 $\mathcal{L}$ が極大 M - n 義集合か、極大 M -無損失集合か、判定可能である。

系4. $\mathcal{L}$ は任意の文脈自由言語、 $M \in LCM$ なる任意の正規集合とすると、任意の正整数 n について、 $\mathcal{L}$ が M と τ により M - n 義であるか否かは決定可能である。

証明。系1. は定義により $D_n^M(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, $D_{n+1}^M(\mathcal{L}) = \emptyset$ か否か調べればよい。 $D_n^M(\mathcal{L})$, $D_{n+1}^M(\mathcal{L})$ は構成可能な正規集合だから、これは決定可能である。

系2. は定義により、すべての $Q_j \in K_M$ について、 $\mathcal{L} \cap R(Q_j)$ が M -1 義か否かを調べればよい。系3. についても同様。

系4. は定義により, $D_{n+1}^M(M) \cap L = \emptyset$, $D_n^M(M) \cap L \neq \emptyset$ かどうかを調べればよい。正規集合と文脈自由言語との共通部分は文脈自由言語であり, $\emptyset$ かどうかは決定可能である。 Q.E.D.

定理4. 任意の gsm M と正規集合 L の組 (M, L) について, M の L に対する有限義解読可能性の次数を求めるアルゴリズムが存在する。

証明。 定理2. 及び定理3. の系1. より明らか。

L は文脈自由言語, $M \in L \subset M$ なる正規集合とするとき, L が正規集合 $M \in$ として M -有界かどうか, すなわち $L \cap D_{n+1}^M(M) = \emptyset$ なる $n \geq 1$ が存在するか否か, が決定可能かどうかは定理3. からではわからない。しかし, test tree を応用することにより, これを判定するアルゴリズムが存在することを示すことができる。

以下, このアルゴリズムをのべる。

(以下省略)

文献

- [1] 佐藤 豊二: 順序回路の正規集合に関する情報伝達性
通信学会研究会資料 (1969. 4. A 69-8)
- [2] А. А. Марков; ИАН, СССР 1960~1962 に出たいくつかの論文
- [3] Ю. В. Глебский; ИАН. СССР 141, 5, 1961
- [4] В. И. Лёвенштейн; ИАН. СССР 142, 6, 1962 McGraw-Hill.
- [5] S. Ginsburg; The Mathematical Theory of context free languages

註1) K_M : 内部状態の集合, Σ : 入力アルファベット, Δ : 出力アルファベット
 δ_M : 状態遷移函数 $K_M \times \Sigma \rightarrow K$, λ_M : 出力函数 $K_M \times \Sigma \rightarrow \Delta^*$
 Q_0 : 初期状態 $\in K_M$, $\delta_M, \lambda_M \in K_M \times \Sigma^*$ 上に自然に拡張したものを, δ_M, λ_M で表わす。 $\lambda_M(Q_0, x) \in x$ の函数 ($x \in \Sigma^*$) と見たとき, $M(x)$ である。
 $M(L) = \{y \in \Delta^* \mid \exists x \in L, M(x) = y\}$ である。

註2) $K_A, \Sigma, \delta_A, q_0 \in K_A$ は M の場合と同様。 $F \subset K_A$ は最終状態の集合

註3) "結節点の無限の連なり" は大抵いふに言て, 2種類に分けられる。右はその模式図である。図a. の場合, 出力系列の長さが増すにつれて対応する入力系列の数は指数函数的に増すが, 図b. の場合は, linear に増していくに過ぎない。 G が強連結の場合は, 常に図a. のようになり, 図b. は強連結でない場合に限られる。Fはその例である。

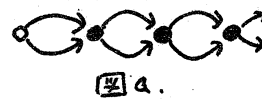
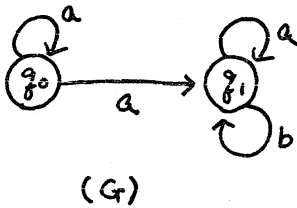


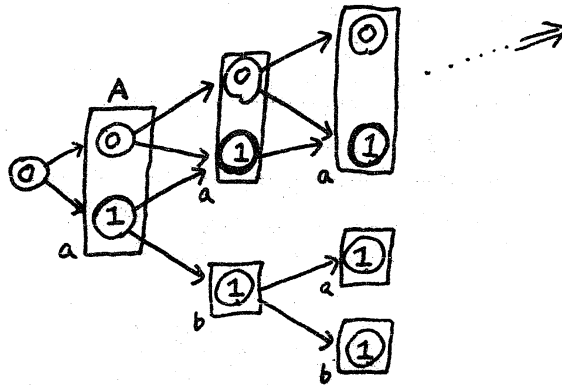
図 a.



図 b.



(G)



(test tree of G)



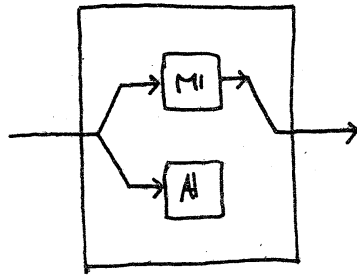
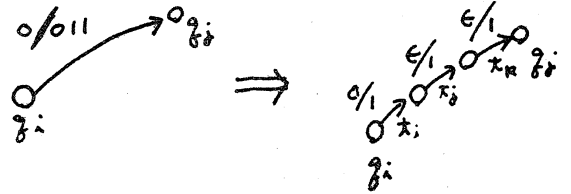
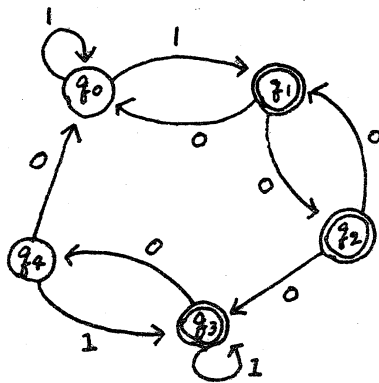
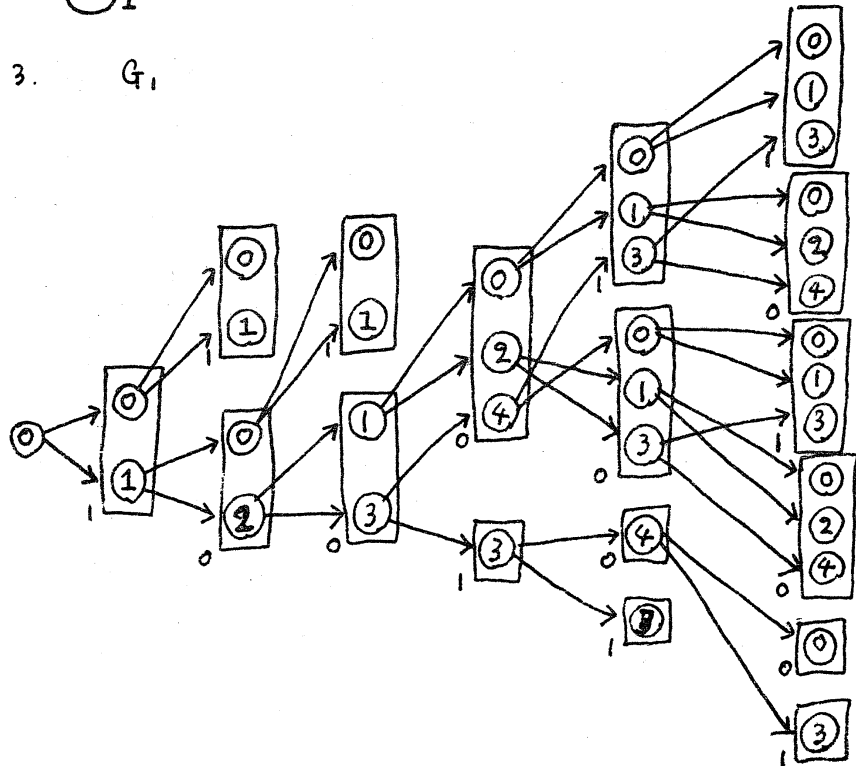
图 1. $M \times A$ 

图 2.

图 3. G_1 图 4. Test tree of G_1

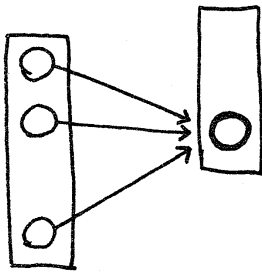


図 5. 結節点.

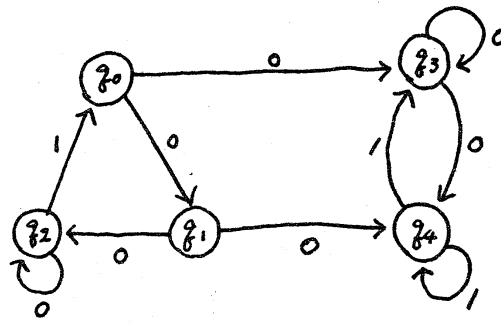


図 6. G_2

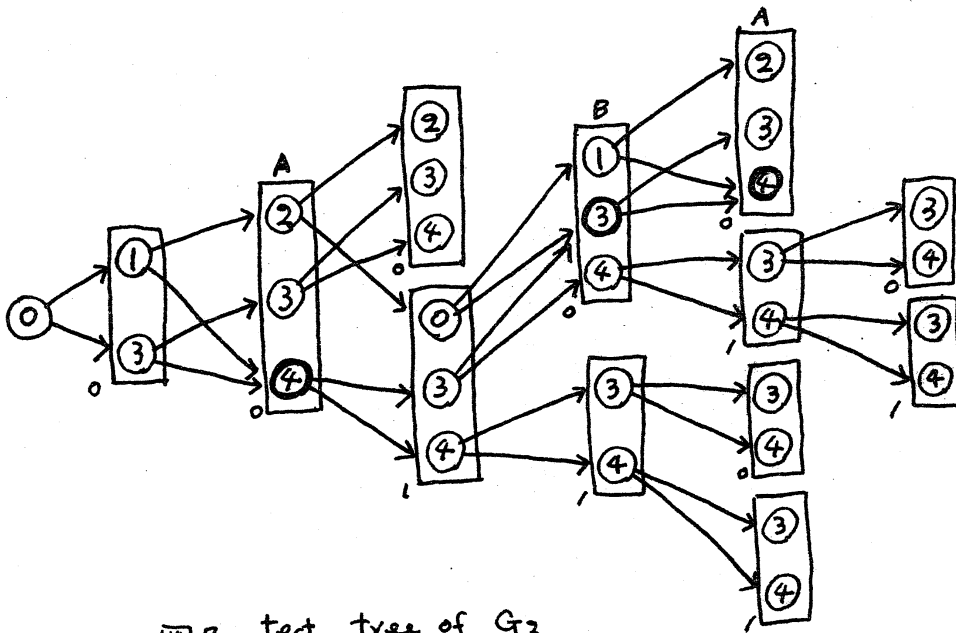


図 7. test tree of G_2



図 8. 結節点間の連結
を示すグラフ

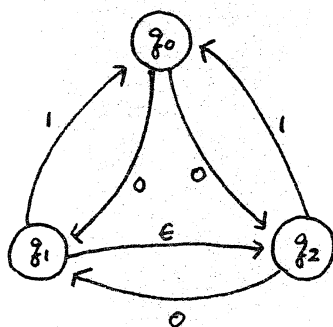
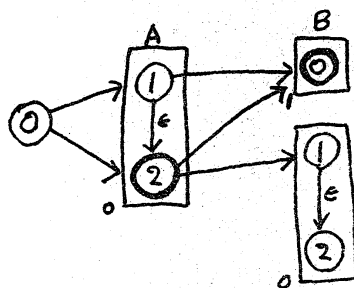
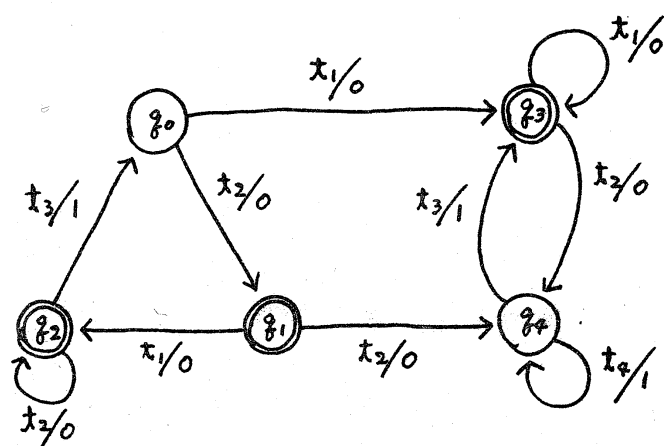
Fig 9. G_3 Fig 10. test tree of G_3 

Fig 11.



$$\Gamma = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

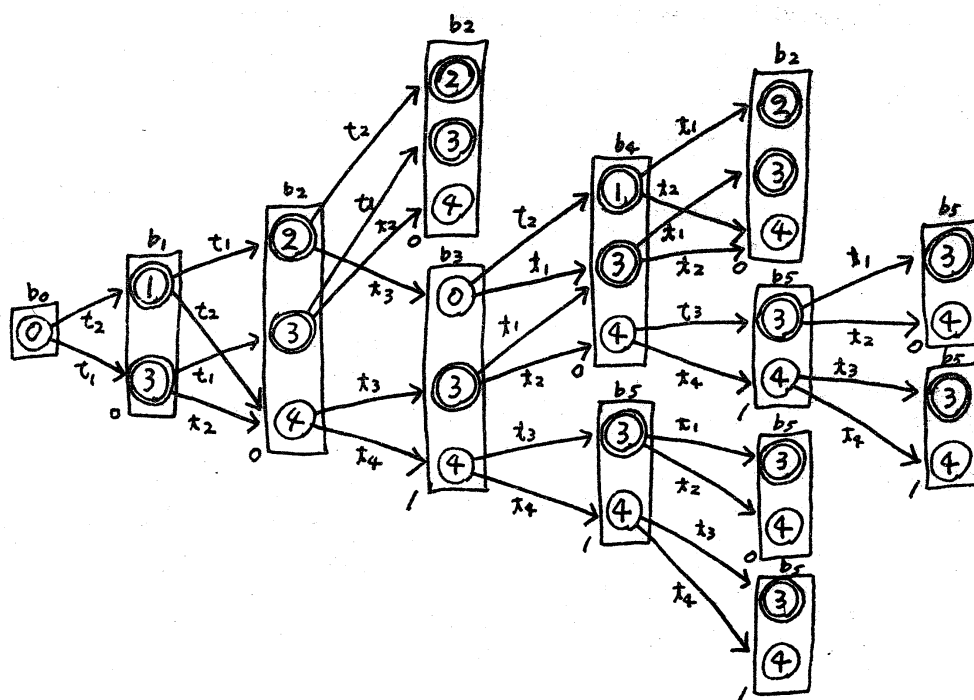
$$\Delta = \{0, 1\}$$

$$F_\theta = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$\tau(t_1) = \tau(t_2) = 0$$

$$\tau(t_3) = \tau(t_4) = 1$$

図12. PCT^* に定義するオートマトン B の Γ による出力
状態遷移を省略されている。



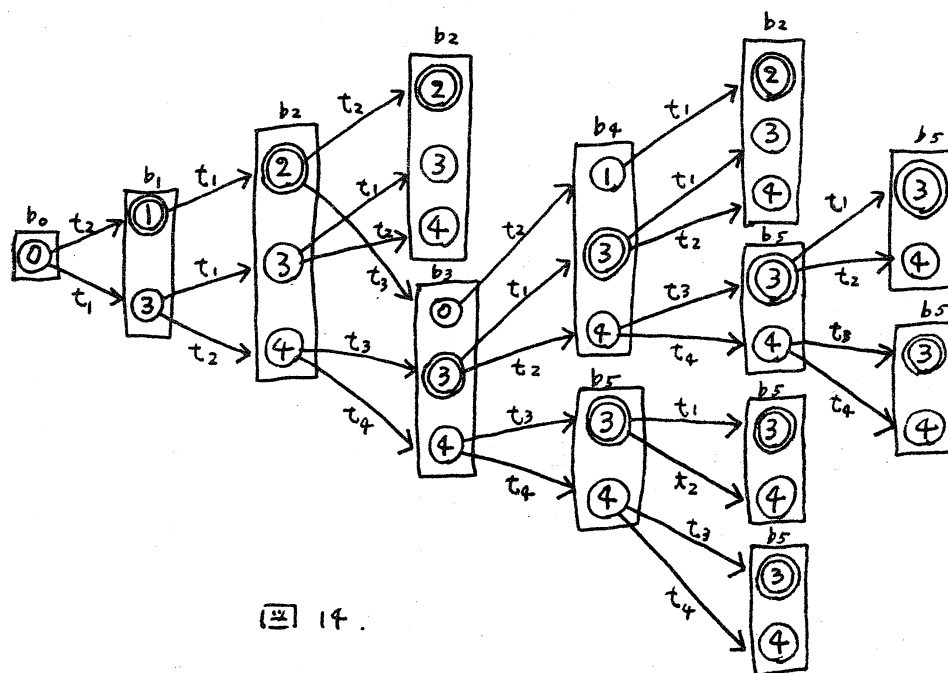


圖 14.

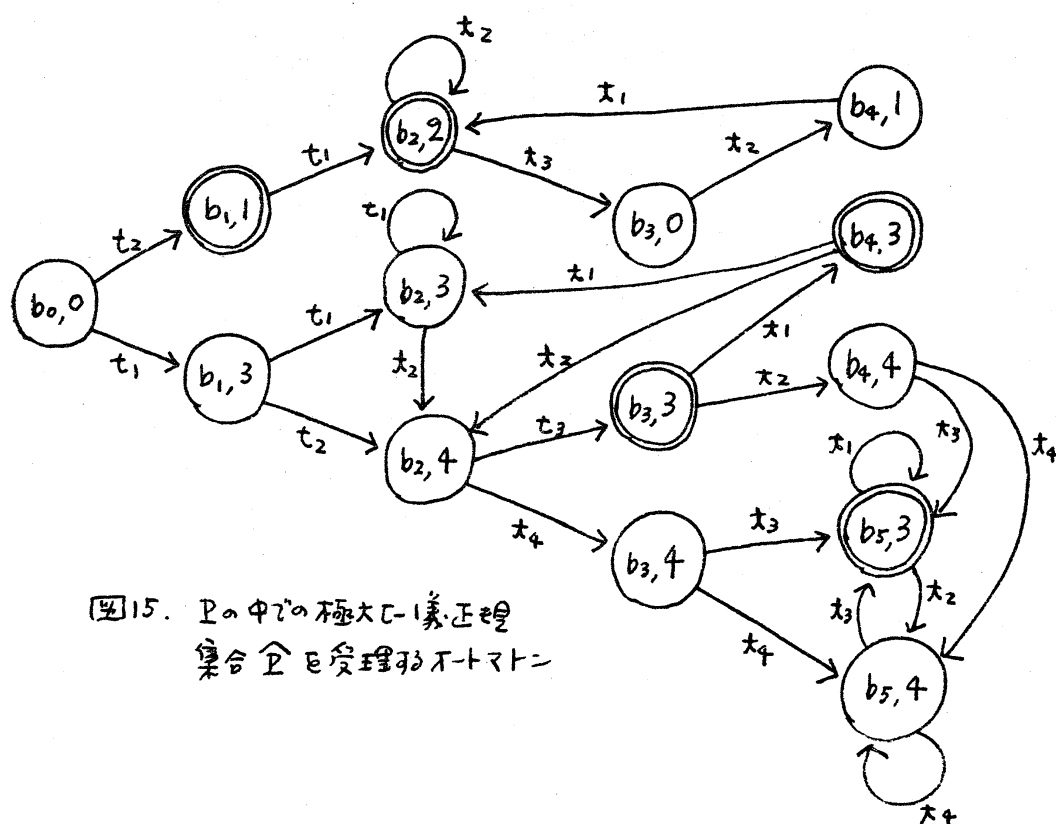


図15. P の中での極大 $\mathcal{C}$ -1義正理
集合 $\mathcal{C}$ に受理するオートマトン