

溶鋳炉内に現れる自由境界問題の有限要素解析とその可視化

東大工 森 正武 (Masatake Mori)
野村総研 高橋則夫 (Norio Takahashi)
計算流体力学研 藤野清次 (Seiji Fujino)

1. 溶鋳炉に現れる 2 相自由境界問題

溶鋳炉内では、図 1 に示すように、炉の上部から入れられた鋳石が炉内を降下するに従って加熱され、コークスを媒体として溶けてスラグとメタルに分離する。スラグとメタルは溶鋳炉の下部にあたる炉床にたまり、比重の差によって炉床の上部にスラグ相、下部にメタル相が形成される。両者が一定量たまったところで炉床の壁に出銑口を開けてスラグとメタルを排出させる。

スラグとメタルはコークスの中をゆっくりと流れ、流れとともにスラグ表面とスラグとメタルの界面の形状は変化するが、この現象を 2 相自由境界問題として定式化することができる。ここでは、このような溶鋳炉の中のスラグとメタルの流れを 3 次元 2 相自由境界問題としてモデル化し、それを有限要素法を使って数値的に解いた結果を報告する。研究集会ではこの結果のアニメーションをビデオで示したが、ここではそれは不可能であるので、時間経過ごとの 3 次元的鳥瞰図を示す。

この現象を 2 次元自由境界問題にモデル化した結果については、われわれは既に成果を得ている [1]。ここで採用する方法は [1] で採用した方法を 2 次元から 3 次元の円筒形モデルに拡張したもので、次元の違い以外に [1] のものと基本的な差はない。したがって、ここでは問題の定式化および解法についてはその概要を述べるにとどめる。詳細については [1] を参照されたい。

2. 2 相自由境界問題の定式化

問題をわかりやすく記述するために、2 次元で定式化したモデルについて述べる。炉床を図 2 のように幅 a の縦型の四角でモデル化し、スラグとメタルの存在する領域をそれぞれ時間 t の関数として $D_1(t)$, $D_2(t)$ と書く。

$$\text{スラグ} : D_1(t) = \{ (x, z) \mid 0 < x < a, g(x, t) < z < f(x, t) \}$$

$$\text{メタル} : D_2(t) = \{ (x, z) \mid 0 < x < a, 0 < z < g(x, t) \}$$

スラグとメタルの流れは次の速度ポテンシャルから決まる。

$$u_1 = \frac{p_1 - p_0}{\gamma_1} + z : \text{スラグにおいて}$$

$$u_2 = \frac{p_2 - p_0}{\gamma_2} + z : \text{メタルにおいて}$$

図 1: 溶鉱炉

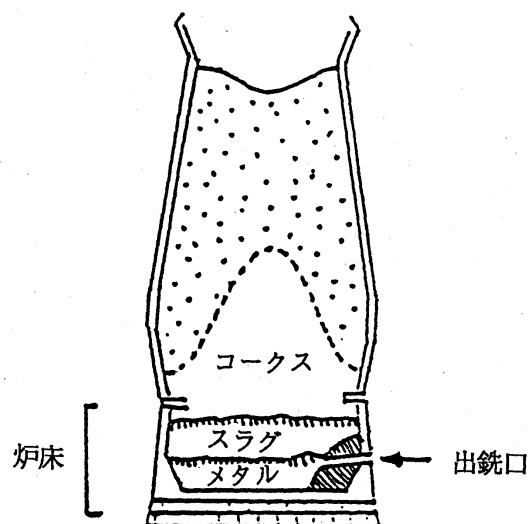
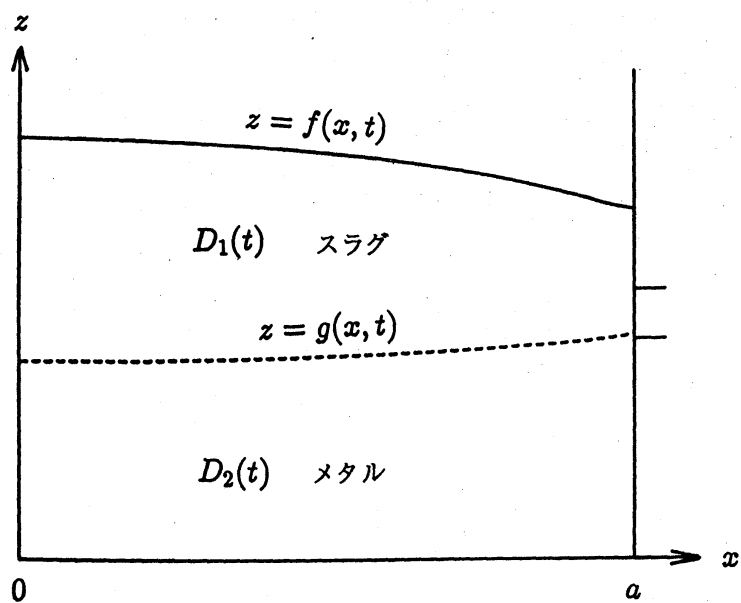


図 2: 炉床の2次元モデル



ただし,

$$\begin{aligned} z &= \text{炉の底面からの高さ} \\ p_1, p_2 &= \text{圧力} \\ p_0 &= \text{スラグ表面における圧力} \\ \gamma_1, \gamma_2 &= \text{比重} \end{aligned}$$

である. u_1 と u_2 は厳密な意味での速度ポテンシャルではなく, 本来は hydraulic potential 呼ばれるものであり, スラグとメタルの速度が

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= -K_1 \text{grad } u_1 : \text{スラグにおいて} \\ \mathbf{v}_2 &= -K_2 \text{grad } u_2 : \text{メタルにおいて} \\ K_1, K_2 &= \text{hydraulic conductivity} \end{aligned}$$

で与えられるポテンシャルである. しかし, ここでは簡単のためにこれらを速度ポテンシャルと呼ぶことにする. hydraulic conductivity は日本語では通液性とも呼ばれているが, ここでは透過係数と呼ぶことにする. スラグとメタルは非圧縮性流体であるので, 次の連続の方程式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v}_1 &= 0 : \text{スラグにおいて} \\ \text{div } \mathbf{v}_2 &= 0 : \text{メタルにおいて} \end{aligned}$$

上のポテンシャルの定義式をこの連続の方程式に代入すると, u_1 と u_2 が次のラプラス方程式をみたすことがわかる.

$$\Delta u_1 = 0 : \text{スラグにおいて} \quad (1)$$

$$\Delta u_2 = 0 : \text{メタルにおいて} \quad (2)$$

ここでは, このラプラス方程式を有限要素法で解く. その際に必要になる境界条件は次のとおりである. まず, 溶鉱炉の壁と出鉄口における条件として, 自然境界条件が与えられる.

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \begin{cases} 0 & : \text{壁面において} \\ -\frac{v_0}{K_1} & : \text{出鉄口において} \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = \begin{cases} 0 & : \text{壁面において} \\ -\frac{v_0}{K_2} & : \text{出鉄口において} \end{cases} \quad (4)$$

ただし,

$$v_0 = \text{排出速度}$$

である. つまり, ここではスラグおよびメタルを一定速度 v_0 で排出させていることになる. 自由境界の動く速度は, スラグ側とメタル側で当然等しいから

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = -K_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} : \text{スラグとメタルの界面 } z = g(x, t) \text{ において} \quad (5)$$

が成り立つ。これも境界条件として課す必要がある。さらに、二つの自由境界面ではそれぞれ次のような条件を課す必要がある。

$$u_{1f} = f(x, t) : \text{スラグ表面 } z = f(x, t) \text{ において} \quad (6)$$

$$u_{1g} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_{2g} = \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) g(x, t) : \text{スラグとメタルの界面 } z = g(x, t) \text{ において} \quad (7)$$

スラグとメタルの界面 $z = g(x, t)$ において $p_1 = p_2$ が成り立つが、これと速度ポテンシャルの定義式

$$u_1 = \frac{p_1 - p_0}{\gamma_1} + z, \quad u_2 = \frac{p_2 - p_0}{\gamma_2} + z$$

から上の関係 (7) を得る。なお、(6), (7) において、どちらの境界面における u の値であるかを明示するために下付き添字に f, g を付した。

以上で時間 t を固定したときのラプラス方程式 (1) および (2) を境界条件 (3), (4), (5), (6), (7) の下で解くことができるが、二つの自由境界の時間変化を記述する方程式を与えなければならない。これは、スラグとメタルの流れの運動に従う二つの境界面の動きを単純に幾何学的に表現することによって次の形に導かれる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -K_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} : \text{スラグ表面 } z = f(x, t) \text{ において} \quad (8)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -K_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} : \text{スラグとメタルの界面 } z = g(x, t) \text{ において} \quad (9)$$

3. 有限要素法による解法

数値解を求めるために、方程式および諸条件を離散化する必要がある。ここでは、ラプラス方程式 (1), (2) を有限要素法で解く。そのために、時間 t を固定したとして、図 3 のように領域を三角形に分割する。

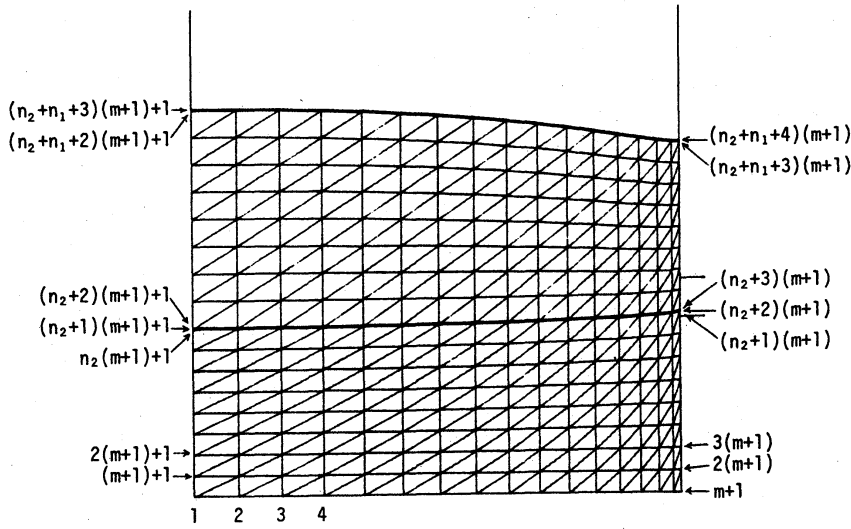
時刻 t を固定して、与えられた境界条件の下でラプラス方程式 (1), (2) を解けば、その時刻での解が得られる。そして、その解に基づいて (8), (9) によって次の時刻での自由境界の形状を決定すればよい。しかし、その計算には二つの問題点がある。

一つは、メタルの透過係数 K_2 がスラグの透過係数 K_1 に比較して 250 倍程度に大きい点である。したがって (8), (9) を連立常微分方程式とみなすときそれがいわゆる stiff な方程式になり、その解法としては陰解法を採用しなければならない。

もう一つは、(8), (9) の右辺に解 u_1 と u_2 の法線方向の微分が現れている点である。この法線方向の微分を、得られた解から差分によって計算したのではよい精度の解を得ることはできない。

後者の問題を解決するために、ここで境界要素法に類似の考え方を採用する。つまり、境界および自由境界面における法線方向微分を新たに次のように変数 q_0, q_1, q_2 として定義し、これを未知数として方程式に組み込んで、各時刻ごとに連立方程式の解として求めてしまう

図 3: 領域の三角形分割



のである。

$$q^{(0)} = \frac{\partial u_1}{\partial n_1} : \text{スラグ表面 } z = f(x, t) \text{ において} \quad (10)$$

$$q^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial n_1} : \text{スラグとメタルの界面 } z = g(x, t) \text{ において} \quad (11)$$

$$q^{(2)} = \frac{\partial u_2}{\partial n_2} : \text{スラグとメタルの界面 } z = g(x, t) \text{ において} \quad (12)$$

以上のような準備の下で, (8) と (9) を次のように近似する。まず, 時間を

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} \quad (13)$$

に従って離散化し, (8) および (9) の左辺の時間微分を時間刻み Δt の差分近似で置き換える。

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = -\Delta t K_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(t_{k-1})}{\partial x} \right)^2} q^{(0)} \quad (14)$$

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = -\Delta t K_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(t_{k-1})}{\partial x} \right)^2} q^{(2)} \quad (15)$$

ただし, (10) と (12) によって法線方向の微分はそれぞれ $q^{(0)}$, $q^{(2)}$ で置き換えてある。次に, (14) に (6) を代入すると

$$u_{1f} + \Delta t K_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(t_{k-1})}{\partial x} \right)^2} q^{(0)} = f(t_{k-1}) \quad (16)$$

となり, また(15)に $\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$ を乗じて(7)を使うと

$$u_{1g} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_{2g} + \Delta t K_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(t_{k-1})}{\partial x}\right)^2} q^{(2)} = \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) g(t_{k-1}) \quad (17)$$

が得られる. 方程式(16)および(17)は, $\partial f/\partial x$, $\partial g/\partial x$ に関しては陽に, また, $\partial u_1/\partial n_1 = q^{(0)}$, $\partial u_2/\partial n_2 = q^{(2)}$ に関しては陰にとっている. その意味でこの近似は準陰的差分近似とすることができる.

方程式(16), (17)には $\partial f/\partial x$ および $\partial g/\partial x$ が含まれているが, これらは空間刻み幅の2乗のオーダーの中心差分を用いて計算する.

以上の計算手順をまとめると, 次のような反復解法が得られる.

時間 t_0 における初期値から出発して, [1] ~ [6] を $k = 1, 2, 3, \dots$ について繰り返す. ただし, スラグ表面が出銑口に達した時点で反復を終了する.

[1] 時刻 t_{k-1} における境界面の形状

$$f(t_{k-1}) \quad \text{および} \quad g(t_{k-1})$$

が与えられたとする.

[2] スラグ領域において, ラプラス方程式

$$\Delta u_1 = 0$$

を境界条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= \begin{cases} 0 & : \text{壁面において} \\ -\frac{v_0}{K_1} & : \text{出銑口において} \end{cases} \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= q^{(0)}(x, t_k) : \text{スラグ表面において} \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= q^{(1)}(x, t_k) : \text{スラグとメタルの界面において.} \end{aligned}$$

の下で解くための連立1次方程式を構成する.

[3] メタル領域において, ラプラス方程式

$$\Delta u_2 = 0$$

を境界条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} &= \begin{cases} 0 & : \text{壁面において} \\ -\frac{v_0}{K_2} & : \text{出銑口において} \end{cases} \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} &= q^{(2)}(x, t_k) : \text{スラグとメタルの界面において.} \end{aligned}$$

の下で解くための連立1次方程式を構成する。

[4] 上の[2],[3]で得た方程式と, 方程式(16), (17), すなわち

$$u_{1f} + \Delta t K_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(t_{k-1})}{\partial x} \right)^2} q^{(0)} = f(t_{k-1})$$

$$u_{1g} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_{2g} + \Delta t K_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(t_{k-1})}{\partial x} \right)^2} q^{(2)} = \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) g(t_{k-1})$$

を組み合わせ、全体の連立1次方程式を作る。

[5] [4]で得た全体の方程式を対称化し, これをICCG法で解く。

[6] [5]で得た解から

$$\begin{aligned} f(t_k) &= u_{1f} \\ g(t_k) &= \left(u_{1g} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_{2g} \right) / \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right). \end{aligned}$$

を使って時刻 t_k における f, g を計算する。

[4]で得た方程式はそのままでは非対称であり, これをスケーリングによって対称化することが大切である。

4. 3次元問題の数値計算結果

前節で述べた方法では, スラグ表面とスラグとメタルの境界面の形は, 面倒な法線方向の微分を差分で計算したりせずに, 各時間ステップにおける連立1次方程式の解から[6]のようにごく簡単な手間で求めることができる。したがって, この方法は直ちに3次元モデルの問題を解くために使うことができる。2次元の場合と異なる点は, ラプラス方程式の次元が2から3になった点と, 境界の形状の更新が次式によってなされる点である。

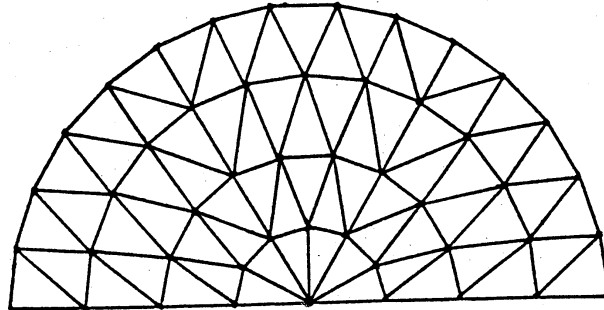
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -K_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} : \text{スラグ表面において}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -K_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} : \text{スラグとメタルの界面において}$$

以下に, 文献[2]にある3次元モデルの計算結果の一部を示す。まず, 炉床をモデル化するためにこれを円柱で近似し, 有限要素法を適用するためにスラグ領域とメタル領域のそれぞれを四面体分割した。すなわち, まず底面を図4のように三角形分割し, 高さ方向を, スラグ領域, メタル領域ともに4層に分割する。そして, できた各三角柱を三つの四面体に分割する。

以上の条件の下に, 前節の最後に示した手順で, 3次元の有限要素法を使って境界面の変化を追った。モデルの物理パラメータは次のとおりである。

図 4: 円柱モデルの底面の三角形分割



スラグの透過係数 K_1 : 0.04 m/sec

メタルの透過係数 K_2 : 15.0 m/sec

スラグの比重 γ_1 : 2600 kg/m³

メタルの比重 γ_2 : 6700 kg/m³

炉床の直径 : 10 m

炉床の高さ : 5 m

ここで、次のような無次元化を行う。

$$1 \text{ m} \longrightarrow 0.1$$

$$1 \text{ sec} \longrightarrow 0.001$$

すると、速度は

$$1 \text{ m/sec} \longrightarrow 100$$

となる。

出鉄口は、無次元化した単位で次のような位置にあるとする。

$$\text{出鉄口の幅} : 0.174 \quad \text{高さ} : 0.0625 \leq z \leq 0.125$$

排出速度は、無次元化した単位で次のようにとる。

$$\text{排出速度 } v_0 : 1.52667$$

スラグとメタルの初期高さは共に 0.25 (2.5 m) とした。また、時間刻み幅は初期段階では $\Delta t = 1.0$ とし、スラグの表面が出鉄口に近づいた段階で $\Delta t = 0.2$ とした。なお、対称性があるので、実際の計算は円柱の半分について行った (図 4)。また、計算はすべて倍精度で行った。

炉床における二つの境界面の時間変化を図 5 に示す。時間 $t = 10.8$ においてスラグ表面が出鉄口に達したので、計算を終了した。図 5 の結果は、実際の溶鉱炉の中で起こっている現象を、少なくとも定性的にはよく捉えていると思われる。なお、研究集会当日には、この結果のアニメーションをビデオで示した。

有限要素法から得られる連立1次方程式の次元数は564で、解法として採用したICCG法の時間1ステップ当りの平均反復回数は、相対残差の限界を 10^{-10} とすると、25.8であった。また、誤差の一つの目安として、出銑口からの総排出量と、スラグ面の低下による炉内の体積減少量とを比較した。この両者は本来は一致すべき量であるが、その差は次のとおりわずかであり、ここで採用したモデルが適切であったことを示している。

$$\frac{|\text{体積減少量} - \text{総排出量}|}{|\text{総排出量}|} = 1.54 \times 10^{-5}$$

5. おわりに

本論文では、自由境界の動きを決める方程式の中に解の法線方向の微分に直接関係した量が含まれるとき、この法線方向の微分自体を未知数として扱って全体の方程式に直接組み込む方法を提案した。そして、この方法を溶鋳炉の中に現れる3次元自由境界問題に適用し、これが効率のよい数値計算法であることを確かめることができた。この方法は、類似の自由境界問題に対する有効な手法として応用できると期待される。

参考文献

- [1] M. Mori, M. Natori and Zhang Guo-Feng, A finite element analysis of a free surface drainage problem of two immiscible fluids, International Journal for Numerical Methods in Fluids 9 (1989) 569-582.
- [2] 高橋則夫,「溶鋳炉に現れる3次元2相自由境界問題の有限要素解析」, 筑波大学理工学研究科昭和62年度修士論文.

図 5: 境界面の変化

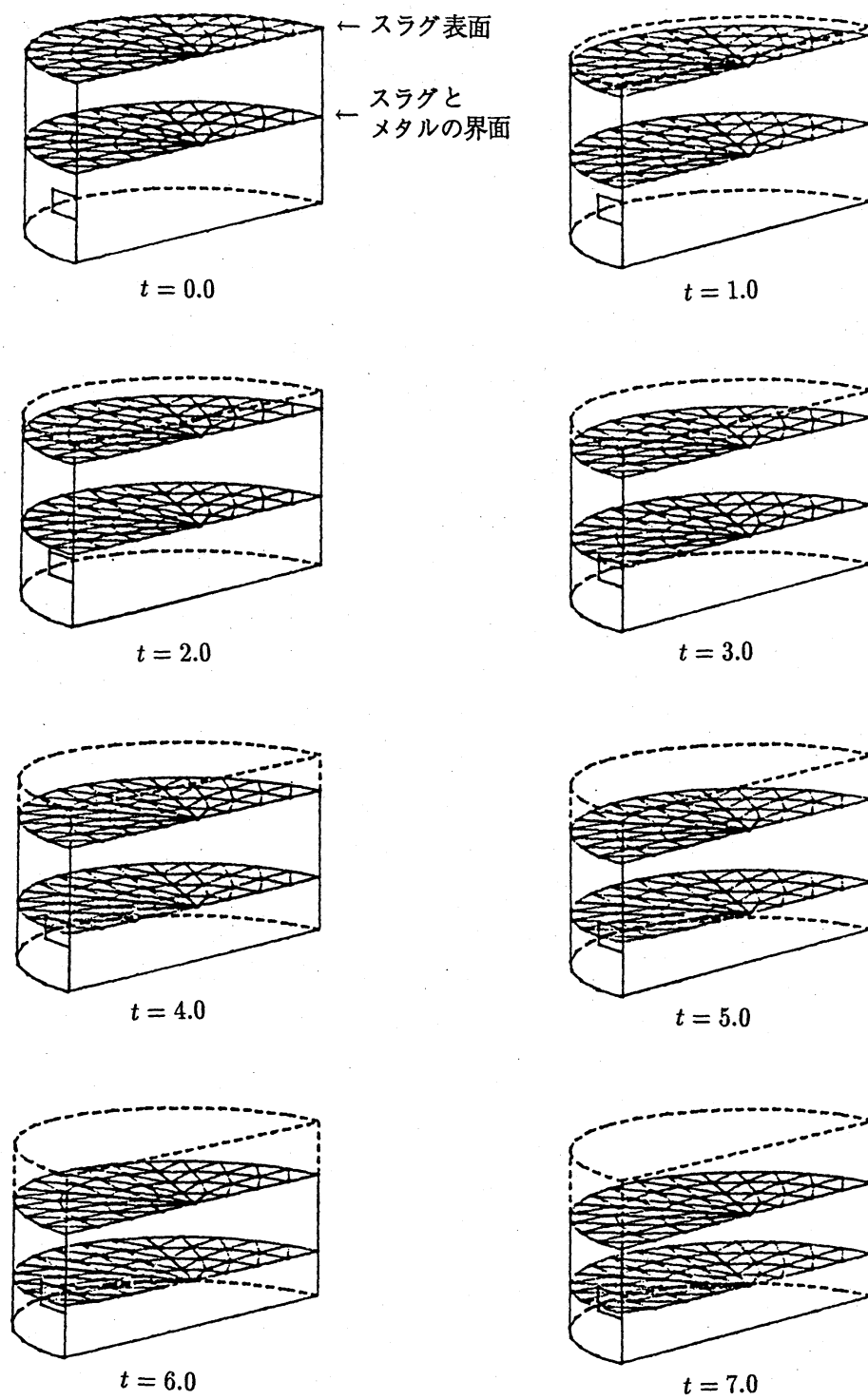
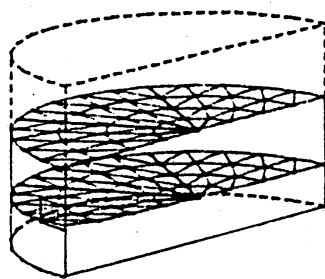
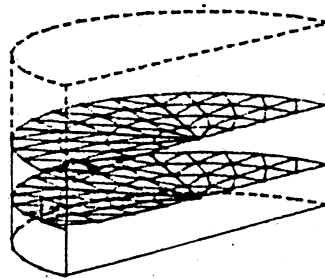
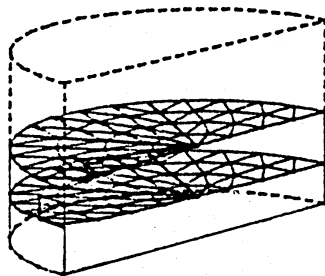
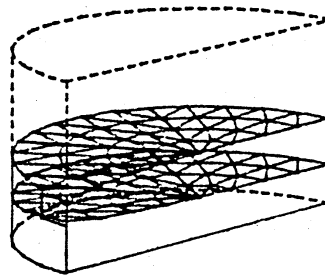


図 5: 境界面の変化 (続き)

 $t = 8.0$  $t = 9.0$  $t = 10.0$  $t = 10.8$