

# 無限階擬微分作用素の連続性について

東大 理 大学院 中村 如

## §0 記号と序論

この小論では、 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とし、 $p_{\alpha}^{(\beta)}(x, \xi) = D_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)$   
 $D_x^\alpha = (-i \frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (-i \frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ ,  $\partial_\xi^\beta = (\frac{\partial}{\partial \xi_1})^{\beta_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial \xi_n})^{\beta_n}$  なる記号を用い  
 る。最初に Gevrey 函数について定義を憶いたそう。  $s > 1$  のとき  
 $\Omega$  における class  $ss$  (resp. class  $cs$ ) の Gevrey 族の函数とは、無限階連  
 続微分可能であつて、任意の compact set  $K$  に対して、ある  $C$   
 が存在して (resp. 任意の  $k$  に対して  $C$  が存在して) 次の評価 (1)  
 が成立するものという。

$$(1) \quad \|D^\alpha f\|_{C(K)} \leq C h^{|\alpha|} |\alpha|!^s$$

ここで  $\|f\|_{C(K)} = \sup_{x \in K} |f(x)|$  である。

$\Omega$  上の class  $ss$  (resp. class  $cs$ ) の Gevrey 族の函数を  $\mathcal{E}^{ss}(\Omega)$   
 (resp.  $\mathcal{E}^{cs}(\Omega)$ ) とかく。又  $\Omega$  が compact な Gevrey 族の函数を  $\mathcal{D}^{ss}(\Omega)$   
 (resp.  $\mathcal{D}^{cs}(\Omega)$ ) とかく。

さて、無限階擬微分作用素は、Sato-Kawai-Kashiwara [5]

で、擬微分方程式系の構造の解明に用いられ、大きな威力を發揮した。一方  $\text{class } \{s\}$  の有限階の擬微分作用素は Boutet de Monvel - P. Kree [2] で論じられた。最近青木貴史氏の修士論文 [1] において、制限付増大度をもつ作用素が非正則度  $\rho > 1$  をもつ方程式の構造解明に用いられた。我々が以下考える作用素は Boutet - P. Kree に比較して (i) 無限階であること、また青木氏に比べて (ii) 各  $P_j(x, \xi)$  の  $x$  につけての正則度が整型から、Gevrey 族にまで落ちている点に新しさがある。この小論では、無限階擬微分作用素の定義、形式表象の合成、転置に閉じていること、及び無限階擬微分作用素が  $\mathcal{D}^*$  から  $\mathcal{E}^*$  への連続線型写像であることを示すことにあります。

なお小松先生には拙り語を聞いていただいたとき、有益な助言と暖かい励ましをいただいたことを感謝します。

## §1. 無限階擬微分作用素

定義 1. 形式和  $(p)(x, \xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(x, \xi)$  が  $\text{class } \{s\}$  (resp.  $\text{class}(s)$ ) の formal symbol であるとは、次の条件をみたすときである。

(i)  $P_j(x, \xi)$  は  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  で  $\xi$  につけて real analytic かつ  $j$  次同次

$x$  につけて  $\text{class } \{s\}$  (resp.  $\text{class}(s)$ ) の Gevrey function

(ii)  $\forall K \subset \subset \Omega \quad \exists h_2 > 0 \exists h_3 > 0 \forall h_1 > 0 \quad \exists C_+ \exists C_- \quad \forall \alpha \forall \beta \forall j$

(resp.  $\forall K \subset \subset \Omega \quad \exists h_1 > 0 \quad \forall h_2 > 0 \quad \forall h_3 > 0 \quad \exists C_+ \exists C_- \quad \forall \alpha \forall \beta \forall j$ )

$$(2) \quad j \geq 0 \text{ として } \|P_j^{(\beta)}(\cdot, \xi)\|_{C(K)} \leq C_+ h_1^j h_2^{|\alpha|+|\beta|} j!^{-s} |\alpha|!^s |\beta|! |\xi|^{j-|\beta|}$$

$$(3) \quad j < 0 \text{ として } \|P_j^{(\beta)}(\cdot, \xi)\|_{C(K)} \leq C_- h_3^{-j+|\alpha|+|\beta|} (-j)!^s |\alpha|!^s |\beta|! |\xi|^{j-|\beta|}$$

Remark 1.  $P_+(\alpha, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\alpha, \xi)$  とおくと  $P_+(\alpha, \xi)$  は収束して、

$\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  において  $\alpha$  について  $\text{class } \{s\}$  (resp.  $\text{class}(s)$ ) の Gevrey 族  $\xi$  について real analytic な函数となる。また次の評価をみたす。

$$\forall K \subset \Omega \quad \exists h_2 > 0 \quad \forall h_1 > 0 \quad \exists C_+$$

$$(\text{resp. } \forall K \subset \Omega \quad \exists h_1 > 0 \quad \forall h_2 > 0 \quad \exists C_+)$$

$$(4) \quad \|P_+^{(\beta)}(\cdot, \xi)\|_{C(K)} \leq C_+ h_2^{|\alpha|+|\beta|} |\alpha|!^s |\beta|! |\xi|^{-|\beta|} \exp s(h_1 |\xi|)^{\frac{1}{s}}.$$

定義 2.  $\alpha$  について Gevrey,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  において real analytic な函数  $p(\alpha, \xi)$  が無階階微分作用素の  $\text{class } \{s\}$  (resp.  $\text{class}(s)$ ) の symbol であるとは次の条件をみたすこと。

$$\exists (p)(\alpha, \xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(\alpha, \xi) : \text{class } \{s\} \text{ (resp. class}(s)\text{) の formal symbol}$$

$$\text{s.t. } P_+(\alpha, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\alpha, \xi) \quad \text{B.V.} \quad p(\alpha, \xi) = p(\alpha, \xi) - P_+(\alpha, \xi) \text{ とおくと}$$

$$p_-(\alpha, \xi) \sim \sum_{j=-1}^{\infty} P_j(\alpha, \xi)$$

である。即ち、

$$(5) \quad R_N(\alpha, \xi) = p_-(\alpha, \xi) - \sum_{j=-1}^{-(N+1)} P_j(\alpha, \xi)$$

$$\text{とおくと } \forall K \subset \Omega \quad \exists H \quad \exists C \quad \forall \alpha \quad \forall \beta \quad \forall N$$

$$(\text{resp. } \forall K \subset \Omega \quad \forall H \quad \exists C \quad \forall \alpha \quad \forall \beta \quad \forall N)$$

$$(6) \quad \|R_N^{(\beta)}(\cdot, \xi)\|_{C(K)} \leq C H^{N+|\alpha|+|\beta|} N!^s |\alpha|!^s |\beta|! |\xi|^{-N-|\beta|}$$

定義3. 作用素  $P$  が class  $\{s\}$  (resp. class  $\{s\}$ ) の無限階擬微分作用素であるとは、class  $\{s\}$  (resp. class  $\{s\}$ ) の無限階擬微分作用素の symbol  $p(x, \xi)$  が存在して

$$(7) \quad Pu(x) = \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi)$$

と表わされること。

命題1. 形式和  $(p)(x, \xi) = \sum p_j(x, \xi)$ ,  $(f)(x, \xi) = \sum f_j(x, \xi)$  が class  $\{s\}$  (resp. class  $\{s\}$ ) の formal symbol とき、<sup>形式</sup>合成  $(r)(x, \xi)$  及び <sup>形式</sup>転置  $({}^t p)(x, \xi)$  も同じ class の formal symbol となる。ここで

$$(r)(x, \xi) = \sum r_m(x, \xi)$$

$$({}^t p)(x, \xi) = \sum {}^t p_m(x, \xi)$$

とおく。

$$(8) \quad r_m(x, \xi) = \sum_{j+k+l=m} \frac{1}{j!} P_j^{(r)}(x, \xi) f_{k(l)}(x, \xi)$$

$$(9) \quad {}^t p_m(x, \xi) = \sum_{\substack{B=(b) \\ |b|=m}} \frac{(1)^{|b|}}{b!} P_b^{(p)}(x, -\xi)$$

とする。

証明) 以下の計算は簡単であるが、めんどうくさる。各  $r_m(x, \xi)$  及び  ${}^t p_m(x, \xi)$  が収束して評価(2)(3)をみたすことを示すことにあつた。このとき使う公式は次の式である。

$\alpha$  を実数、 $|x| < 1$  とすると

$$(10) \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+l-1)}{l!} x^l = (1-x)^{-\alpha}$$

特に  $|x| < 1$  とし

$$(10)' \quad \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+n-1}{l} x^l = (1-x)^{-n}$$

さて  $r_m(x, \xi)$  については以下のように場合をわけよう。

Case 1-1 :  $m \geq 0$   $j, k \geq 0$

Case 1-2 :  $m \geq 0$   $j, k$  異符号

Case 2-1 :  $m < 0$   $j, k \geq 0$

Case 2-2 :  $m < 0$   $j, k < 0$

Case 2-3 :  $m < 0$   $j, k$  異符号

以下 Case  $i-j$  上の和を  $\sum_{i=j}$  と略記する。

Case 1-1  $R_m^{(1)}(\alpha) = \sum_{i=1}^m \|r_m^{(1)}(\cdot, \xi)\|_{CCK} \text{ とおく。}$

$$\begin{aligned} R_m^{(1)}(\alpha) &\leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{j!} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} C_+(p) h_1(p)^j h_2(p)^{|\alpha+\alpha'+\beta'|} j!^{-s} |\alpha'|!^s (j+\beta')! \\ &\times C_+(\xi) h_1(\xi)^k h_2(\xi)^{|\alpha+\alpha''+\beta''|} k!^{-s} |\alpha''+\beta''|!^s \beta''! |\xi|^{m-|\beta|} \\ &\leq C_+(p) C_+(\xi) |\xi|^{m-|\beta|} |\alpha'|!^s \beta'! (h_2(p) + 2^s h_2(\xi))^{|\alpha|} (2 h_2(p) + h_2(\xi))^{|\beta|} \\ &\times \sum_{i=1}^m \frac{1}{j!} h_1(p)^j h_1(\xi)^k j!^{-s} k!^{-s} |\alpha'|!^s j! (2^{2s+1} h_2(p) h_2(\xi))^{|\alpha|} \end{aligned}$$

$h_1 = \max(h_1(p), h_1(\xi))$ ,  $h_2 = \max(h_2(p), h_2(\xi))$  かつ最後の和を  $S_{11}$  と

する。

$$\begin{aligned} S_{11} &\leq 2^{sm} p_1^m m!^{-s} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+n-1}{l} (m+l+1) (2^{2s+1} h_1 h_2^2)^l \\ &\leq (2^{sm} p_1^m)^m m!^{-s} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+n-1}{l} (2^{2s+1} e h_1 h_2^2)^l \\ &\leq (2^s e h_1)^m m!^{-s} (1 - 2^{2s+1} e h_1 h_2^2)^{-n} \end{aligned}$$

(ここで  $1+x \leq e^x$  を用い、 $h_1$  及び  $h_2$  を各場合に依じて

$0 < 2^{2s+1} e h_1 h_2^2 < 1$  とするようにならうに選んだ。) )

以上より

$$R_m^{(1)}(\alpha) \leq C_+(p) C_+(\xi) |\xi|^{m+|\beta|} |\alpha|!^s |\beta|! (2^{s+1} h_0)^{|\alpha|} (3h_2)^{|\beta|} \\ \times (2^s e h_1)^m m!^{-s} (1 - 2^{2s+1} e h_1 h_2^2)^{-n}.$$

Case 1-2.  $j \geq 0, k < 0$  の場合のみ考えれば十分であるから、

$j \geq 0, k < 0$  の上の和  $\sum_{i=2}'$  とかくことにしよう。

$$R_m^{(1)}(\alpha) = \sum_{i=2}' \|r_m^{(1)}(\alpha)(\cdot, \xi)\|_{\alpha, \xi} \quad \text{と おく。}$$

$$R_m^{(1)}(\alpha) \leq \sum_{i=2}' \frac{1}{j!} (\alpha') (\beta') C_+(p) h_1(p)^j h_2(p)^{|\delta+\alpha'+\beta'|} j!^{-s} |\alpha'|!^s \\ \times (r+\beta') C_-(\xi) h_3(\xi)^{-k+|\delta+\alpha''+\beta''|} (-k)!^s |r+\alpha''|!^s |\beta''| |\xi|^{m+|\beta|} \\ \leq C_+(p) C_-(\xi) |\xi|^{m+|\beta|} (h_2(p) + 2^s h_3(\xi))^{|\alpha|} (2h_2(p) + h_3(\xi))^{|\beta|} |\alpha'|!^s |\beta'| \\ \times \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{j=m+1+e}^{\infty} h_1^j h_3^{j-m-e} j!^{-s} (l-k)!^s (l+1)_e (2^{s+1} h_2 h_3)^e \\ \leq C_+(p) C_-(\xi) |\xi|^{m+|\beta|} (h_2 + 2^s h_3)^{|\alpha|} (2h_2 + h_3)^{|\beta|} |\alpha'|!^s |\beta'| \\ \times m!^{-s} h_1^{m+1} h_3 (1 - h_1 h_3)^{-1} (1 - 2^{s+1} h_1 h_2 h_3)^{-n}$$

$$\left( \begin{array}{l} h_1 = h_1(p), \quad h_2 = h_2(p), \quad h_3 = h_3(\xi) \quad \text{とて} \quad h_1 \leq h_2, h_3 \in \\ 0 < h_1 h_3 < 1, \quad 0 < 2^{s+1} h_1 h_2 h_3 < 1 \quad \text{と仮定するように置くこと。} \end{array} \right)$$

Case 2-1.

$$R_m^{(2)}(\alpha) \leq C_+(p) C_+(\xi) |\xi|^{m+|\beta|} \sum_{i=1} \frac{1}{j!} (\alpha') (\beta') h_1(p)^j h_1(\xi)^k h_2(p)^{|\delta+\alpha'+\beta'|} \\ \times h_2(\xi)^{|\delta+\alpha''+\beta''|} j!^{-s} k!^{-s} |\alpha'|!^s (r+\beta')! |\delta+\alpha''|!^s |\beta''| \\ \leq C_+(p) C_+(\xi) |\xi|^{m+|\beta|} (2^{s+1} h_0)^{|\alpha|} (3h_2)^{|\beta|} |\alpha'|!^s |\beta'| \\ \times (2^s e h_1)^m (-m)!^s (1 - 2^{2s+1} e h_1 h_2^2)^{-n}$$

$$(h_1 = \max(h_1(p), h_1(\xi)), \quad h_2 = \max(h_2(p), h_2(\xi)) \quad \text{と} \quad 0 < 2^{2s+1} e h_1 h_2^2 < 1 \quad \text{と仮定する})$$

Case 2-2.

$$\begin{aligned}
R_{m(\alpha)}^{22(\beta)} &\leq C(p) C(\xi) |\xi|^{m-|\beta|} \sum \frac{1}{j!} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} h_3(p)^j h_3(\xi)^{d+|\gamma+\alpha'+\beta'|} \\
&\quad \times (-j)!^s (-k)!^s |\alpha'|!^s (r+\beta')! |\gamma+\alpha''|!^s \beta''! \\
&\leq C(p) C(\xi) |\xi|^{m-|\beta|} ((2^s+1)h_3)^{|\alpha|} (2h_3)^{|\beta|} |\alpha|!^s \beta! h_3^{-m} (-m)!^s \\
&\quad \times \sum_{\ell=0}^{-m-k} (-m-1-\ell) \binom{\ell+n+1}{\ell} (2^{s+n}h_3)^\ell \\
&\leq C(p) C(\xi) |\xi|^{m-|\beta|} ((2^s+1)h_3)^{|\alpha|} (2h_3)^{|\beta|} |\alpha|!^s \beta! (2h_3)^{-m} (-m)!^s \\
&\quad \times |\alpha|!^s \beta! (1+n2^{s+n}h_3)^{-m-1} \\
&\quad (h_3 = \max(h_3(p), h_3(\xi)) \text{ とおす。})
\end{aligned}$$

Case 2-3  $j \geq 0, k < 0$  のとき考え、和  $\sum_{2-3}'$  で表す。

$$\begin{aligned}
R_{m(\alpha')}^{23(\beta)} &\leq C(p) C(\xi) |\xi|^{m-|\beta|} \sum_{2-3}' \frac{1}{j!} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} h_1(p)^j h_2(p)^{d+|\gamma+\alpha'+\beta'|} j!^{-s} \\
&\quad \times |\alpha'|!^s (r+\beta')! h_3(\xi)^{-k+|\gamma+\alpha'+\beta'|} (-k)!^s |\gamma+\alpha''|!^s \beta''! \\
&\leq C(p) C(\xi) |\xi|^{m-|\beta|} |\alpha|!^s \beta! (h_2 + 2^s h_3)^{|\alpha|} (2h_2 + h_3)^{|\beta|} \\
&\quad \times \left[ \sum_{\ell=0}^{-m-1} \sum_{j=0}^{\infty} h_1^j h_3^{-k} j!^{-s} (-k)!^s \ell!^s (2^{s+1}h_2 h_3)^\ell \binom{\ell+n+1}{\ell} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{\ell=-m}^{\infty} \sum_{j=m+\ell+1}^{\infty} h_1^j h_3^{-k} j!^{-s} (-k)!^s \ell!^s (2^{s+1}h_2 h_3)^\ell \binom{\ell+n+1}{\ell} \right] \\
&\leq C(p) C(\xi) |\xi|^{m-|\beta|} |\alpha|!^s \beta! (h_2 + 2^s h_3)^{|\alpha|} (2h_2 + h_3)^{|\beta|} \\
&\quad \times [2^{-sm} h_3^{-m} (-m)!^s (1-2^s h_1 h_3)^{-1} (1+n2^{s+1}h_2)^{-m-1} + 2^s h_1^{m+1} h_3 (-m)!^s \\
&\quad \times (1-2^s h_1 h_3)^{-1} (1-2^{s+1}h_1 h_2 h_3)^{-1}]
\end{aligned}$$

$\left( \begin{aligned} &h_1 = h_1(p), h_2 = h_2(p), h_3 = h_3(\xi) \text{ とおす, } h_1 \text{ or } h_2 \text{ or } h_3 \in \\ &0 < h_1 h_3 < 1, 0 < 2^{s+1} h_1 h_2 h_3 < 1 \text{ と仮定する。} \end{aligned} \right)$

形式転置についても同様であるので、省略する。

定理 1.  $p_+(x, \xi) \in \text{symbol}$  とする無限階擬微分作用素  $P_+$  は  $\mathcal{D}'^{(s)}$  から  $\mathcal{E}'^{(s)}$  (resp.  $\mathcal{D}^{(s)}$  から  $\mathcal{E}^{(s)}$ ) への連続作用素である。

証明)  $\mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^n)$  ( $x = \{x\}$  or  $(s)$ ) の Fourier 像について次の結果を用いる。

補題 1. (Paley-Wiener, see Komatsu [3])  $K \subset \mathbb{R}^n$  の凸コンパクト集合とする。 $\mathbb{C}^n$  上の entire function  $\hat{\varphi}(\xi)$  が ある  $\varphi \in \mathcal{D}'_K^*$  の Fourier-Laplace 変換であるための必要十分条件は

$$x = \{x\} \text{ のとき } \exists L \geq 0$$

$$(x = (s) \text{ のとき } \forall L > 0 \exists C)$$

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C \exp(-(L|\xi|)^{\frac{1}{2}} + H_K(\xi))$$

をみたすことである。

補題 1 と Remark 1. の評価 (4) より  $(P_+ u)(x) \in \mathcal{E}(\Omega)$  は明らかである。Leibniz's rule より

$$D_x^\alpha (P_+ u)(x) = \sum_{\alpha' \leq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \int e^{i x \cdot \xi} \xi^{\alpha'} D_x^{\alpha - \alpha'} p_+(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

$K \subset \subset \Omega$  として極座標に変換すると

$$\|D_x^\alpha (P_+ u)(\cdot)\|_{C(K)} \leq \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} C_1 C_2 h_2^{|\alpha''|} |\alpha''|!^{\frac{1}{2}} \pi_n$$

$$\times \int_0^\infty \rho^{|\alpha'| + n - 1} \exp \left[ s (h_1 \rho)^{\frac{1}{2}} - (L \rho)^{\frac{1}{2}} \right] d\rho$$

$$\left( \because \int_0^\infty \pi_n = \frac{1}{2^{n-1} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \right) \text{ とする。}$$

$\rho^{\frac{1}{s}} = t$ ,  $K^{\frac{1}{s}} = L^{\frac{1}{s}} - sh^{\frac{1}{s}} > 0$  変数  $t$  と定数  $K \in \mathbb{R}$  を導入

する。

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha (P_+ u)(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} &\leq C + C \pi_n s \sum (\alpha'_j) h_2^{|\alpha''|} |\alpha''|!^s \int_0^\infty t^{s(|\alpha'|+n)-1} \exp(-Kt) dt \\ &\leq C + C s \pi_n \left(\frac{1}{K}\right)^{sn} \sum (\alpha'_j) \left(\frac{1}{K}\right)^{s|\alpha''|} h_2^{|\alpha''|} \Gamma(s(|\alpha'|+n)) |\alpha''|!^s \end{aligned}$$

ここで Gauss-Legendre の公式

$$\Gamma(pz) = \frac{p^{pz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \prod_{k=0}^{p-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{p}\right) \quad (p; \text{正整数})$$

及び Stirling の公式

$$\sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \leq \Gamma(x+1) \leq \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}}$$

を用いてガンマ関数を評価する。最終的に

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha (P_+ u)(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} &\leq C + C s \pi_n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{2}} \times \left| \frac{\Gamma(sH)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2e}{K}\right)^s \right|^n n! \\ &\quad \times \left( \frac{\Gamma(sH)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2e}{K}\right)^s + h_2 \right)^{|\alpha''|} |\alpha''|!^s \end{aligned}$$

となる。これは  $P_+ u$  が Gevrey 関数であり、 $u$  の norm は  $C$  の中に含まれるから、 $P_+$  が  $\mathcal{D}^*$  から  $\mathcal{E}^*$  への連続作用素であることがわかった。

命題 2.  $P$  が null formal symbol をもつ擬微分作用素とすると、 $P$  は  $\mathcal{E}^{(s)'}(\Omega)$  から  $\mathcal{E}^{(s)'}(\Omega)$  (resp  $\mathcal{E}^{(s)'}(\Omega)$  から  $\mathcal{E}^{(s)'}(\Omega)$ ) の連続作用素となる。

この証明には次の補題を用いる。

補題 2. (Paley-Wiener. See Komatsu [4].)

$K \subset \mathbb{R}^n$  の凸コンパクト集合となる。 $\mathbb{C}^n$  上の整型函数  $\hat{f}(\xi)$  に対して、次の 2 つの条件は同値である。

(i)  $\hat{f}(\xi)$  は  $f \in \mathcal{D}_K^{\text{fst}}(\mathbb{R}^n)$  (resp.  $f \in \mathcal{D}_K^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ ) の Fourier-Laplace 変換である。

(ii)  $\forall L > 0 \exists C$  (resp.  $\exists L \exists C$ )

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C \exp((L|\xi|)^{\frac{1}{s}} + H_K(\xi)) \quad \text{for } \xi \in \mathbb{C}^n$$

(命題 2 の証明)  $P$  は null formal symbol であるから、 $R \equiv 0$ , また  $P$  に対しては次の評価が与えられる。

$$\forall K \subset \Omega \quad \exists h_3 \exists C, \quad (\forall K \subset \Omega \quad \forall h_3 \exists C.)$$

$$\|P_{-(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot, \xi)\|_{C(K)} \leq C h_3^{|\alpha+\beta|} |\alpha|! s |\beta|! |\xi|^{-|\beta|} \inf_N N! (h_3/|\xi|)^N$$

$$\text{そこで} \quad 0 < B < s \quad \exists A$$

$$\sup_p \frac{|\xi|^p}{p!^s} \geq A \exp(B|\xi|^{\frac{1}{s}}) \quad \operatorname{Re} \xi \geq 0$$

であるから

$$\|P_{-(\alpha)}^{(\beta)}(\cdot, \xi)\|_{C(K)} \leq C' h_3^{|\alpha+\beta|} |\alpha|! s |\beta|! |\xi|^{-|\beta|} \exp(-B(\frac{|\xi|}{h_3})^{\frac{1}{s}})$$

一方  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  より 補題 2 より

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C \exp(L|\xi|)^{\frac{1}{s}} \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

が与えられるから、 $P \in u$  に作用させるには  $L^{\frac{1}{s}} - B(\frac{1}{h_3})^{\frac{1}{s}} < 0$

であるように  $L$  と  $h_3$  を調節すればよい。この時定理 1 の証明と同様にして、連続であることが与えられる。

## References

- [1] 青木貴史 東大修士論文
- [2] Boutet de Monvel - P. Kise Pseudo-differential operators and  
Ganey classes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble vol 17, 1 (1967)  
295-323
- [3] H. Komatsu Ultradistributions, I. Structure theorems and  
a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA,  
vol 20, no 1, (1973), 25-105
- [4] H. Komatsu Ultradistributions, II. The kernel theorem  
and ultradistributions with support in a submanifold  
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, vol 24, no 3 (1977) 607-628
- [5] M. Sato - T. Kawai - M. Kashiwara Microfunctions and pseudo-  
differential equations, Lecture notes in Math. no. 287, Springer  
(1973)