

微分方程式系の分岐点近傍のスケーリング則

九大・理 村山 徹, 富永広貴, 森 肇

カオスのアトラクターの構造は分岐点において劇的に変化し, 特異な局所構造をもつようになる。そのような分岐点の局所構造は, 軌道拡大率 $\Lambda_n(X_0)$ のスペクトル $\psi(\Lambda)$ によって特徴づけられる。さらに, このような分岐点近傍では, $\Delta\psi(\Delta\Lambda) = \tau^{-\eta}B(\Delta\Lambda)$ のようなスケーリング則が成り立つことが1次元写像で確かめられてきたが, ここでは, 微分方程式系である強制振子においてもこのようなスケーリング則が成立することを数値的に示す。

次のような強制振子の運動方程式を考える。

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + K \sin \theta = \Omega[1 + \cos(\omega t)]. \quad (1)$$

ただし, θ は振子の振れ角, γ は摩擦のパラメタ, K は非線形パラメタ, ω は外力の角振動数を表す。式(1)を数値積分して外力の周期 $t_i = (2\pi/\omega)i$, ($i = 0, 1, 2, \dots$)ごとに点をとると, 軌道 $X_i = \{\theta(t_i), \dot{\theta}(t_i)\}$ が得られる。 $\gamma = 0.22$, $\omega = 1.0$ を固定し, Ω と K を変化させて, 回転数 $\rho \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \{\theta(t_n) - \theta(t_0)\} / 2\pi n$ を計算すると, 相図(図1)が得られる。図1(b)の実線はサドル・ノード分岐, 破線はクライシスを表す。斜線の領域では, 回転数 $1/2$ と回転数 $2/3$ のアトラクターが共存しており, 図の矢印に沿ってパラメタ K を変化させると, $K = K_C = 0.307148$, $\Omega = \Omega_C = 0.1705898$ で, アトラクター融合クライシスが起こる。図2にクライシス前後のアトラクターが示してある。

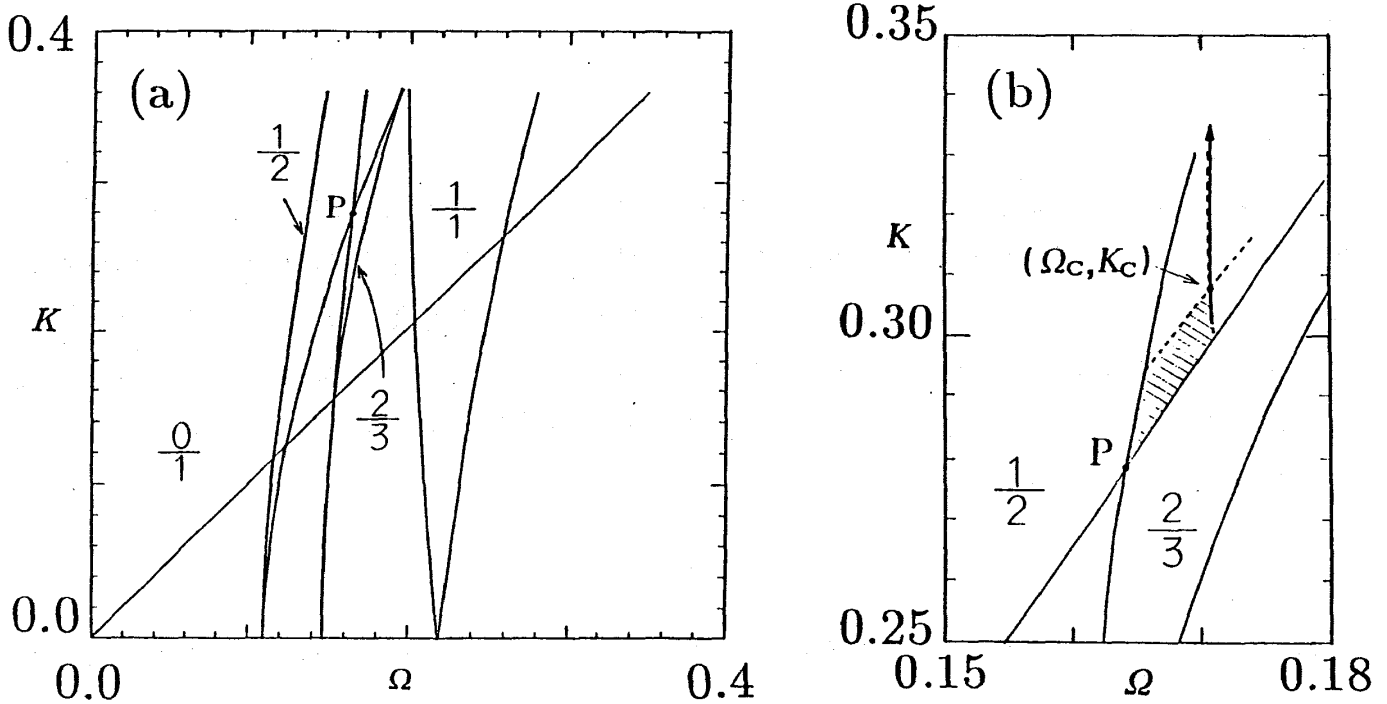


図1

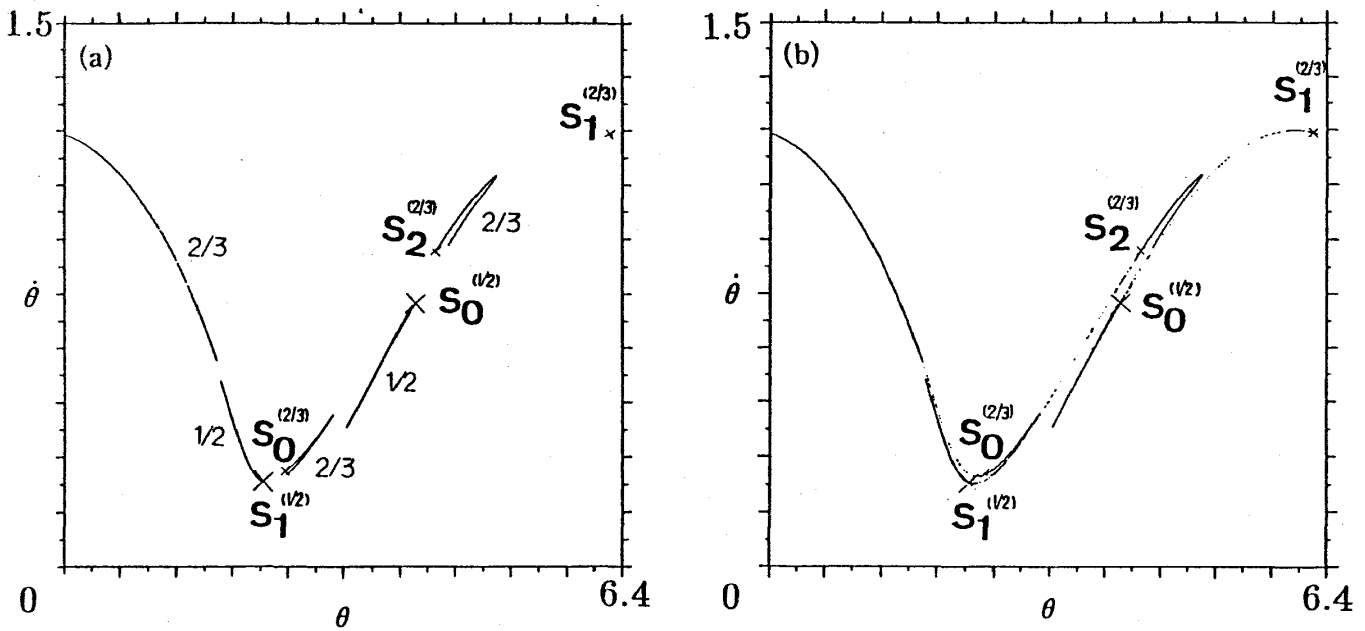


図2

このような分岐点の局所構造を捉えるため、粗視化された軌道拡大率 $\Lambda_n(X_0)$ を導入する。

$$\Lambda_n(X_0) \equiv (1/n) \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_1(X_m) \quad (2)$$

この軌道拡大率の値が Λ になる確率を、 $P(\Lambda; n)$ とすれば、 $N \rightarrow \infty$ のとき、

$$P(\Lambda; n) \equiv (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} \delta(\Lambda_n(X_i) - \Lambda). \quad (3)$$

そして $P(\Lambda; n)$ は次の形にかける。

$$P(\Lambda; n) = \exp\{-n\psi(\Lambda)\} P(\Lambda^\infty; n) \quad (4)$$

さらに、動的構造関数を次式で定義する。

$$\Phi_n(q) \equiv -(1/n) \ln \left[\int d\Lambda P(\Lambda; n) e^{-n(q-1)\Lambda} \right], \quad (5)$$

$$\Lambda_n(q) \equiv d\Phi_n(q)/dq, \quad \sigma_n(q) \equiv -d\Lambda_n(q)/dq \geq 0. \quad (6)$$

クライシス後 ($K = 0.3074$, $\omega = 0.170664$) の $\psi(\Lambda)$, $\Lambda_n(q)$, $\sigma_n(q)$ が、図3に示してある。図より、 $q = q_\gamma \simeq 1.0$ および $q = q_\delta \simeq 0.5$ で、 q -相転移が起こっているのがわかる。

クライシス直後では、軌道はクライシス前にアトラクターがあった領域に、平均時間 $\tau_{1/2}$, $\tau_{2/3}$ だけ滞在していて、この特性時間 τ は、数値的に、 $\tau_{1/2} \simeq 0.15 \varepsilon^{-0.760}$, $\tau_{2/3} \simeq 2.28 \varepsilon^{-0.683}$

($\varepsilon \equiv (K - K_C)/K_C$) と見積もられる。 $\psi(\Lambda)$ は分岐点直後 ($K = K_C + 0$, $\Omega = \Omega_C$) では線形部分を持つが、分岐点から離れてくると、その線形部分がたるんでくる。そのたるみを、

$$\Delta\psi(\Delta\Lambda) \equiv \psi(\Lambda) - \{\psi(\hat{\Lambda}) + (1 - \hat{q})\Delta\Lambda\} \quad (7)$$

(ただし、 $\Delta\Lambda \equiv \Lambda - \hat{\Lambda}$) と定義すれば、 $\Delta\psi(\Delta\Lambda)$ は、スケーリング則、

$$\Delta\psi(\Delta\Lambda) = \tau^{-\eta} B(\Delta\Lambda) \quad (8)$$

に従う。図4には、 $\tau = 54, 69, 100$ のときの $\psi(\Lambda)$ と $B(\Delta\Lambda)$ が示してある。スケーリング指数は、数値的に $\eta \simeq 1.0$ となる。図4より、 τ に依らない $B(\Delta\Lambda)$ が、確かに存在していることが証拠づけられる。

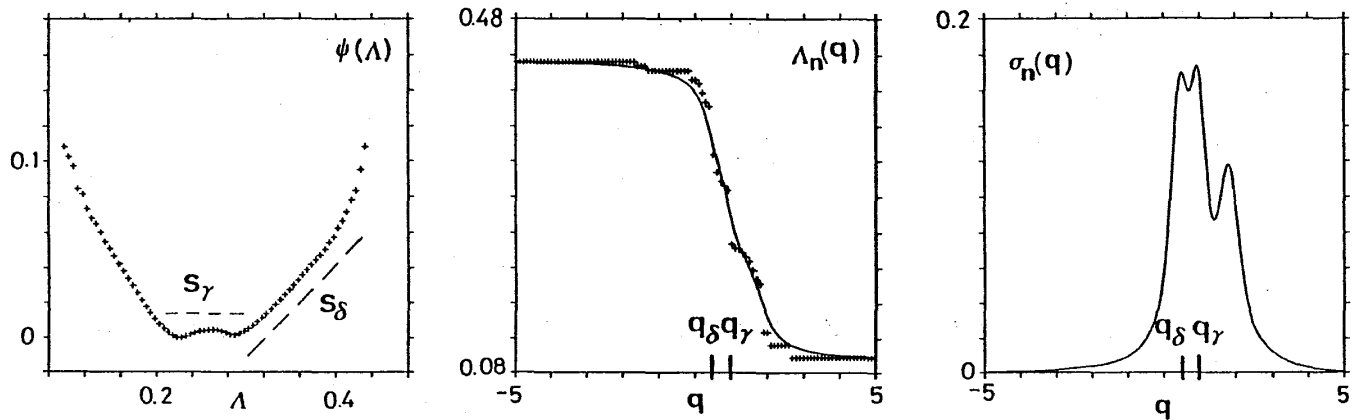


図3

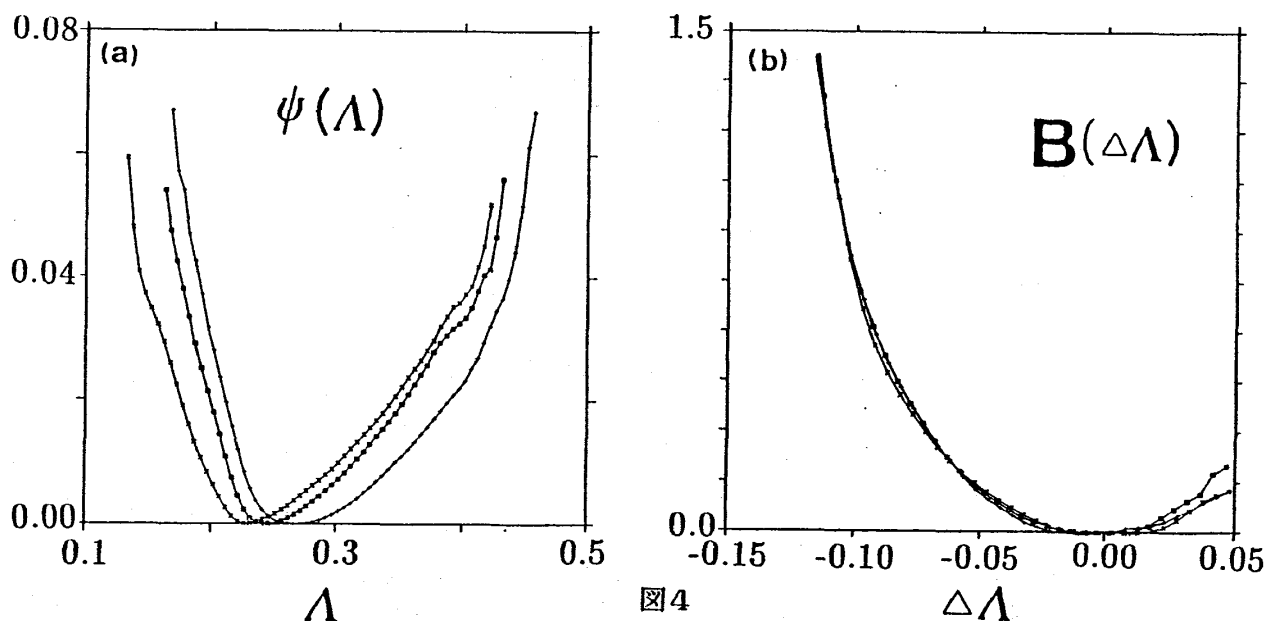


図4