

揺動散逸定理について

東大 理 岡部靖憲

§1 序

Einstein (1905), Nyquist (1928), Kubo (1957, 1965, 1966), Mori (1965) 等の研究において示された揺動散逸定理は、熱運動を行なっている微視的な力学量と相互作用している物理系は、その系のうける微視的な力の、“systematic”な部分と、“random”な部分の間の内部関係を与える定理であり、その系が線型なとき、“systematic”な部分は系函数によって、“random”な部分はそのスペクトル密度によって特徴づけられるので、系函数とスペクトル密度との関係を与えるのが、揺動散逸定理ともいえる。

この報告で得られることは、揺動散逸定理は、数学的には、スペクトルの逆問題であり、しかもそれは、Sturm-Liouville型の inverse problem とは別の次元---ランダムな世界---の、Langevin型の inverse problem といえるということである。しかし、両者の逆問題は、弦の振動方程式とランジュヴァン方程式の解の時

間発展を与える作用素は、互いにユリクリー同値になる、という意味で結びついている。

§2 Ornstein-Uhlenbeck のブラウレ運動

スペクトル密度 $\Delta(\xi)$ が、 $\frac{\nu}{\pi} \frac{\beta}{\xi^2 + \beta^2}$ ($\nu > 0, \beta > 0$)、
 従って、共分散函数 $R(t)$ が、 $\nu \cdot e^{-\beta|t|}$ 、となる正規定常過程 $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ が、Ornstein-Uhlenbeck のブラウレ運動である。
 これは、正規定常過程のうちで、単純マルコフ性をもつものとして特徴づけられる。そのことの反映として、 X を支配する ランジュヴァン方程式

$$(2.1) \quad X(t) - X(s) = - \int_s^t \beta X(u) du + \sigma (B(t) - B(s)) \quad (s < t) \\ (\beta > 0, \sigma > 0)$$

が導かれる。ここで、 σ, β, ν, R の間には、

$$(2.2) \quad \sigma^2 = 2\beta\nu, \quad R(0) = \nu$$

なる関係がある。これが、Einstein の関係式である。

方程式 (2.1) の右辺の第二項は、物理系の "systematic" な部分であり、花粉の粒子が液体中を浮遊するとまわうける抵抗にあたり、 β が抵抗係数である。このとき、共分散函数 R が $R(t) = \nu e^{-\beta|t|}$ ($t \in \mathbb{R}$) より、

$$(2.3) \quad \frac{1}{\beta - i\xi} = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} e^{i\xi t} R(t) dt \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。これは、速度(花粉粒子の)の複素移動度 (mobility)

を、速度の共分散函数の Fourier-Laplace 変換として与えるもので、第1種揺動散逸定理とよばれる。数学的に意味をつけるとすれば、(2.3)の右辺は、正規定常過程 X に対し、その共分散函数 R を正規化 ($\frac{R(t)}{R(0)}$) したものの Fourier-Laplace 変換として、 R だけから定まり、(2.3)の左辺は、 X を支配する方程式 (2.1) を導いてはいじめた移動度としての意味がつかうものである。この考えを徹底させると、共分散函数 R は、スペクトル密度 Δ の Fourier 変換として定まり、 Δ は、outer function とよばれる h で定まる。 h は、

$$(2.4) \quad |h(\zeta)|^2 = \Delta(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{R})$$

$$(2.5) \quad h \in O(\mathbb{C}^+), \quad h(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^+ = \{\zeta \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \zeta > 0\},$$

$$\sup_{\eta > 0} \int_{\mathbb{R}} |h(\zeta + i\eta)|^2 d\zeta < \infty$$

$$(2.6) \quad h(\zeta) = h(\zeta + i0), \quad \overline{h(\zeta)} = h(-\bar{\zeta})$$

として唯一つに定まる。

今の場合、 $\Delta(\zeta) = \frac{\nu}{\pi} \frac{\beta}{\zeta^2 + \beta^2}$ であるから、

$$(2.7) \quad h(\zeta) = \sqrt{\frac{\nu\beta}{\pi}} \frac{1}{\beta - i\zeta}$$

となる。そこで、Einstein の関係式 (2.2) を用いると、

$$(2.8) \quad \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta - i\zeta} = h(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。この (2.8) の右辺は、 X のスペクトル密度の outer

function であり、(2.8)の左辺は、ランジュヴァン方程式(2.1)を導いてその意味が、white noise $\dot{B}(t)$ を入力電源としたときの伝達函数としての回路網としての意味が、数学的には、シュボールの意味:

$$(2.9) \quad X(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\beta - i\zeta} \hat{B} \right)^{\sim}$$

がつくのである。そして、(2.8)において、 $\zeta=0$ を代入すると、(2.7)に注意して、 $\sigma = \sqrt{2\beta v}$ 、即ち、Einsteinの関係式(2.2)が導けるので、(2.8)をもつて、Einsteinの関係式をその静的なものとして導くので($\zeta=0$ を代入して)、新しい意味の、振動散逸定理が成り立つということができる。

一方、§12のべた "systematic" な部分と "random" な部分の間の内部関係を与えるものとして、第2種振動散逸定理がすでにあり、それは、(2.2)の "random" な部分から導かれる $(\sigma \cdot \dot{B}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ の共分散函数を R_r とするとき、

$$R_r(t) = \sigma^2 \delta(t) \text{ であるから、}$$

$$(2.10) \quad \beta = \frac{1}{2R(0)} \int_0^{\infty} e^{i\zeta t} R_r(t) dt \quad (\zeta \in \mathbb{R})$$

が、(2.2)より成り立つ。これは、抵抗係数もランダムな力の共分散函数の Fourier-Laplace 変換として与えるもので、これが、第2種振動散逸定理である。この静的なものとして(実際は ζ には定数だが)、Einsteinの関係式(2.2)が導ける。

我々がのべた 揺動散逸定理 (2.8) は、静的なものとして Einstein の関係式 (2.2) を導くので、この意味では、第2種揺動散逸定理と同じ役割を果たしている。

さて、いままでの議論は、単純マルコフ性をもつ系に対してであったが、マルコフ性をもたない系に対しても、我々の意味の 揺動散逸定理 が成り立つのだろうか？ そのことを以下において述べることにする。

§3 T-正值性

$X = (X(t); t \in \mathbb{R})$ を 正規定常過程とする。構成的な場の理論で大切な Osterwalder-Schader property とよばれる、次の T-正值性 (time-reflection property) を考えよう。

$$T: X(t) \longrightarrow X(-t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

この T を、 $X(t) (t \in \mathbb{R})$ のすべての張る閉部分空間 $\mathcal{M}$ 上の、自己共役な作用素と考えるとき、 $\mathcal{M}$ から、 $X(t) (\underline{t} > 0)$ の張る閉部分空間 $\mathcal{M}^+$ への射影を P_+ とするとき、 X が T-正值性 をもつとは、

$$(3.1) \quad P_+ T P_+ \geq 0$$

が成り立つこととする。このことは、 X の共分散函数を R とするとき、

$$(3.2) \quad R(t-s) = \langle X(t), X(s) \rangle \quad (t, s \in \mathbb{R}),$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t_j \in [0, \infty), \quad \forall \xi_j \in \mathbb{C} \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$(3.3) \quad \sum_{j,k=1}^n \xi_j R(t_j + t_k) \overline{\xi_k} \geq 0$$

と同値であることはすぐわかる。

さらに、Bochnerの定理を用いたWidderの結果より、このことは、
 $\exists \mu(\lambda): \text{bounded measure on } [0, \infty)$

$$(3.4) \quad R(t) = \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) \quad (t \in \mathbb{R})$$

なる表現式と同じことがわかる。

§2でのべた Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動は、その共分散関数は $v e^{-\beta|t|}$ ($t \in \mathbb{R}$) であつたから、上の(3.4)において、 $d\mu(\lambda) = v \delta_{\{\beta\}}(d\lambda)$ とし成り立ち、T-正値性をもつことがわかる。

この報告で対象とする系 (X : 正規定常過程) は、このT-正値性をもつものとして、§2で述べた意味の揺動散逸定理が成り立つかを以下において見ていくことにする。基本的な問題として、 X を支配する方程式を導くことである。

T-正値性は、必ずしも単純マルコフ性をもたないのに、(2.1)のような拡散型の確率微分方程式は期待できない。それではどのような方程式が導かれるのであろうか？

(3.4)の測度 $d\mu(\lambda)$ が特殊な場合を考察して発見的に導いていくことにする。

§4 多重マルコフ性(3.4) において, $d\mu(\lambda)$ が,

$$(4.1) \quad d\mu(\lambda) = \sum_{n=1}^d \mu_n \delta_{\{P_n\}}(d\lambda) \cdot \left(\begin{array}{l} d \in \mathbb{N} \\ \mu_n > 0 \ (n=1, \dots, d) \\ 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_d \end{array} \right)$$

の場合を考へる。このとき、共分散函数 R は、(3.4) より、

$$(4.2) \quad R(t) = \sum_{n=1}^d \mu_n e^{-itP_n}$$

従つて、スペクトル密度 $\Delta(\xi)$ は、

$$(4.3) \quad R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} \Delta(\xi) d\xi, \quad \Delta(\xi) = \sum_{n=1}^d \frac{\mu_n}{\pi} \frac{P_n}{\xi^2 + P_n^2}$$

となる。 $\Delta(\xi)$ が $2d$ 次の有理函数であることに注意して、 Δ の outer function h を、(2.4), (2.5), (2.6) をみたすものとして定めると、

$$(4.4) \quad h(\xi) = \frac{Q(-\xi)}{P(-\xi)}$$

$$(4.5) \quad P(\xi) = (p_1 + i\xi)(p_2 + i\xi) \cdots (p_d + i\xi) \quad (d\text{-次の多項式})$$

$$(4.6) \quad Q(\xi) = c(q_1 + i\xi)(q_2 + i\xi) \cdots (q_{d+1} + i\xi) \quad (d+1\text{-次の多項式})$$

と分解出来る。

$$(4.7) \quad 0 < p_1 < q_1 < p_2 < \dots < p_n < q_n < p_{n+1} < \dots < p_d, \quad c > 0$$

と、 h の極と零点は、負の虚軸上に交互にあはれてゐる。

これは、確率過程 X は d -重マルコフ性をもつてゐることを意味する。一般に、 d -重マルコフ性をもつとは、 $\Delta(\xi)$ が $2d$ 次の有理函数ということであるが、この一般の場合、 Δ の outer function h は、(4.4) と同じく、

$$(4.8) \quad h(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

と命じられたが、 P, Q は、

$$(4.9) \quad \begin{cases} P(z) = \sum_{n=1}^d b_n (-iz)^n & b_n \in \mathbb{R}, \quad b_d \neq 0 \\ Q(z) = \sum_{n=1}^{d-1} a_n (-iz)^n & a_n \in \mathbb{R} \quad (a_{d-1} = 0 \text{ かつ } d \geq 2) \\ V_P \subset \mathbb{C}^+, \quad V_Q \subset \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}, \quad V_P \cap V_Q = \emptyset \end{cases}$$

をみたすだけである。ただし、 V_S は多項式 S の零点の集合を表す。

このとき、Okabe (1974) より、 d 次元の正規定常過程 $X(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_{d-1}(t))^*$ が存在して、 X を支配する方程式は次の確率微分方程式となる：

$$(4.10) \quad X(t) - X(s) = \int_s^t A X(u) du + (\sqrt{2\pi})^{-1} \alpha \cdot (B(t) - B(s)) \quad (s < t),$$

ここで、 α, A は、

$$(4.11) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & a_1 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & -1 & a_{d-1} \end{pmatrix}, \quad a_n = \frac{b_n}{b_d}$$

さらに、 X と X の関係は、

$$(4.12) \quad X_{d-1}(t) = -\frac{b_d}{2\pi} X(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

であるから、(4.10) の d 成分をとると、

$$(4.11) \quad X(t) - X(s) = \int_s^t \left\{ \frac{2\pi}{b_d} X_{d-2}(u) - a_{d-1} X(u) \right\} du + \sqrt{2\pi} \left(-\frac{\alpha_{d-1}}{b_d} \right) (B(t) - B(s)) \quad (t < s)$$

が得られる。ところで、 $X_{d-2}(u)$ は $M^-(u) \equiv X(u) (u \leq u)$ までの強閉部分空間に入るのだから、(4.11) より、 X は遅延のある確率

微分方程式

$$(4.12) \quad X(t) - X(s) = \int_s^t \bar{\Phi}(X(\cdot), \cdot \leq u) du + \alpha' (B(t) - B(s)) \quad (s < t)$$

を満足していることがわかった。ここで、 $\bar{\Phi}$ は線型汎関数である。

注意 $X(t)$ が $t=0$ まで可微分なとき ($\alpha_{d-1}=0$) は、(4.12)は、

$$(4.13) \quad X(t) - X(s) = \int_s^t X'(u) du$$

となり、物理系を "systematic" な部分と "random" な部分に分ける

ことになっていることを注意しておこう。

さて、一般の場合から我々の T -正値性をこの場合に戻ると、(4.5), (4.6) より、 $\alpha' = \sqrt{2\pi} C$ とするから、(4.12)は、

$$(4.13) \quad X(t) - X(s) = \int_s^t \bar{\Phi}(X(\cdot), \cdot \leq u) du + \sqrt{2\pi} C (B(t) - B(s)) \quad (s < t)$$

となる。従って、問題は、この線型汎関数 $\bar{\Phi}$ を求めることである。(4.4) ~ (4.7) より、この $\bar{\Phi}$ は求まり、

$$(4.14) \quad \bar{\Phi}(X(\cdot), \cdot \leq u) = -\beta X(u) + \int_{(-\infty, 0)} X(u+s) \gamma(ds) \quad (u \in \mathbb{R})$$

とかけ、 β, γ は、

$$(4.15) \quad \beta = \sum_{n=1}^d p_n - \sum_{n=1}^{d-1} g_n > 0, \quad \beta - \gamma((-\infty, 0)) > 0$$

$$(4.16) \quad \gamma(ds) = \sum_{n=1}^{d-1} g_n e^{g_n s} ds, \quad g_n = -\frac{\prod_{m=1}^d (p_m - g_n)}{\prod_{m \neq n} (p_m - p_n)} > 0 \quad (1 \leq n \leq d-1)$$

と与えられる。従って、 X を支配する方程式は、次の遅れのランジュヴァン方程式とあることがわかった。

$$(4.17) \quad X(t) - X(s) = \int_s^t \left\{ -\beta X(u) + \int_{(-\infty, 0)} X(u+s) f(ds) \right\} du + \sqrt{2\pi} C (B(t) - B(s)) \quad (s < t)$$

さらに、 X のスペクトル密度 Δ の outer function h は、

$$(4.18) \quad h(s) = C \frac{1}{\beta - f(s) - i s} \quad (s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}^+)$$

であることがわかる。この右辺は、ラズニツグレオ方程式(4.17)の

シンボル、伝達函数を表わしているので、§2 で述べた如く、Ornstein-Uhlenbeck のブラウレ運動に於いて成り立つ
た同じ型の揺動散逸定理が成り立っていることがわかる。

では、一般の場合は、(4.17), (4.18) と同じ表現を得ることができ
るであろうか。そのためには、 $[\alpha = \sqrt{2\pi} C, \beta, f]$ を (4.1) の
測度 $d\mu$ でつがまえなければならない。

§5 種々の公式

outer function $L \in L^2$ の Fourier 変換を E とする:

$$(5.1) \quad E(t) = X_{(0, \infty)}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} h(\lambda) d\lambda \quad (t \in \mathbb{R}).$$

今の場合、(4.4), (4.5), (4.6), (4.7) より

$$(5.2) \quad E(t) = X_{(0, \infty)}(t) \int_{(0, \infty)} e^{-t\lambda} dV(\lambda).$$

$$(5.3) \quad dV(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \delta_{[\rho_n]}(d\lambda), \quad \nu_n = 2\pi C \frac{\prod_{m=1}^{d-1} (p_n - \rho_m)}{\prod_{m \neq n} (p_n - p_m)} > 0$$

と表現される。特に、

$$(5.4) \quad E(0+) = 2\pi C = V((0, \infty))$$

一方、(4.17)に $X(s)$ をかけ、 $X(s) \perp B(t) - B(s) \quad (s < t)$ に注意して平均すると、

$$(5.4) \quad R'(t) = -\beta R(t) + \int_{(-\infty, 0)} R(t+s) d\lambda(s) \quad (t > 0)$$

さるに、(4.17)に Itô's formula を用いると、

$$(5.5) \quad \alpha^2 = 2\beta R(0) - 2 \int_{(-\infty, 0)} R(s) d\lambda(s)$$

但し、 $\alpha = \sqrt{2\pi}C$

従って、(5.4), (5.5) より、

$$(5.6) \quad \alpha^2 = -2R'(0+)$$

従って又 (4.1), (4.2) より、

$$(5.7) \quad \alpha^2 = 2 \int_{(0, \infty)} \lambda d\mu(\lambda)$$

よって、 α は捕えられた。

次に β に移ろう。 X と E の関係は、

$$(5.8) \quad X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t E(t+s) d\lambda(s)$$

があることに注意して、(4.17)より、 E も (5.4) と同様に、

$$(5.9) \quad E'(t) = -\beta E(t) + \int_{(-\infty, 0)} E(t+s) d\lambda(s) \quad (t > 0)$$

を満たすことがわかった。しかし、 $E(t) = 0 \quad t < 0$ であるから、

$$(5.10) \quad E'(0+) = -\beta E(0+)$$

従って、(5.4) より、

$$(5.11) \quad E'(0+) = -2\pi\beta C = -\sqrt{2\pi}\alpha\beta$$

一方、 R と E の関係は、

$$(5.12) \quad R(t) = \frac{1}{2\pi} E * \check{E}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

であること、(5-2)に注意して、次の公式を得る。

$$(5.13) \quad -E(0+)E'(0+) = 2\pi R''(0+) + \int_0^\infty |E'(t)|^2 dt$$

と23が、一方、(4.1)の μ_n と(5.3)の ν_n の間には、

$$(5.14) \quad \mu_n = (2\pi)^{-1} \nu_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_m}{p_n + p_m}$$

なる関係式が成り立つので、(4.2), (5-2), (5-3)より

$$(5.15) \quad 2\pi R''(0+) \geq \int_0^\infty |E'(t)|^2 dt$$

(4.1), (4.2)より

$$(5.16) \quad R''(0+) = \int_{(0, \infty)} \lambda^2 d\mu(\lambda)$$

であるから、(5-11), (5-13), (5-15)より、 β は(3.4)の測度 $d\mu$ の1次、2次のモメントで捕えることができる。 α は、(5.7)の $d\mu$ の1次のモメントで捕えるわけではない

最後に、ラングレ方程式(4.17)において、遅れ効果をもちあす測度 $\nu(d\lambda)$ であるが、これがなかなかむづかしい。と23が、我々は、揺動散逸定理(4.18)をもつてみるから、 h が(3.4)の測度 $d\mu$ で捕えるればよい。まず、(3.4), (4.3)より

$$(5.17) \quad \Delta(\zeta) = \int_{(0, \infty)} \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\zeta^2 + \lambda^2} d\mu(\lambda) \quad (\zeta \in \mathbb{R})$$

§2において、 Δ のouter function h は、(2.4), (2.5), (2.6)において定まるとのべたが、実は、上半平面 $\mathbb{C}^+$ においては、

$$(5.18) \quad h(\zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\lambda\zeta}{\lambda-\zeta} \frac{\log \Delta(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda \right\} \quad (\zeta \in \mathbb{C}^+)$$

かくして、 h は (5.17), (5.18) を通して、 $d\mu$ で捕えることができる。
従い、前のべた如く、揺動散逸定理 (4.18) によつて、 $\mathcal{F}$ が従つて
測度 $\nu(ds)$ が捕えることができる。

§6 揺動散逸定理

さて、 X が T -正値性をもつてゐる一般の場合を考えよう。 X のスペクトル密度 Δ が *outer function* をもつのは、

$$(6.1) \quad \frac{\log \Delta(\lambda)}{1+\lambda^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

の場合であり、これは、 T -正値性の枠組では、Okada (1979) により、(3.4) の測度 $d\mu$ が原点に mass をもたないで、即ち、

$$(6.2) \quad d\mu(\{0\}) = 0$$

と同じことがわかつてゐる。以下、この条件が成り立つとする。厳密にいうと、2段階の近似が必要であるが、大筋をのべると、(3.4) の測度 $d\mu$ を、discrete measure $d\mu_n$ で近似する。

$$(6.3) \quad d\mu_n \rightarrow d\mu \text{ on } (0, \infty)$$

このとき、(5.17), (5.18) より

$$(6.4) \quad h_n(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) \quad \text{広義一様 on } \mathbb{C}^+$$

が成り立つ。このことは、基本的である。各近似列の段階において、揺動散逸定理 (4.18) が成り立っている：

$$(6.5) \quad h_n(z) = c_n \frac{1}{\beta_n - \hat{f}_n(z) - i\delta} \quad (z \in \mathbb{C}^+)$$

$$(c_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi}})$$

§5で言及したように、 c_n, β_n は $d\mu_n$ の1次、2次のモーメントで補完されるので、 $\{c_n, \beta_n; n \in \mathbb{N}\}$ が相対コンパクトの列ならば、(3.4)の測度 $d\mu$ が、2次のモーメントもつて必要である。

$$(6.6) \quad \int_{(0, \infty)} \lambda^2 d\mu(\lambda) < \infty$$

従って、以下の議論において、(6.2), (6.6)は本質的な条件となる。

そこで、適当な部分列をとり直し、 $c_n, \beta_n, \hat{f}_n$ が意味で収束することがわかり、 β_n の極限を互いにくり返す補正することによって、我々は次の定理を得る。

定理 (振動散逸定理)

正規定常過程 X は T -正值性を持ち、その共分散関数を表現する (3.4)の測度 $d\mu$ は、条件 (6.2), (6.6)を満たすとする。このとき、 X は、次の遅れのある確率微分方程式を満足する：

$$(6.7) \quad X(t) - X(s) = \int_s^t \left\{ -\beta X(u) + \int_{(-\infty, 0)} X(u+s) \gamma(d\alpha) \right\} du + \alpha \cdot (B(t) - B(s)) \quad (s < t)$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, (B(t); t \in \mathbb{R})$ は、次の条件を満足する：

$$(6.8) \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

(6.9) $\gamma(ds)$ は $(-\infty, 0)$ 上の有界な測度である。

(6.10) $\beta - \gamma(-\infty, 0) > 0$

(6.11) $(B(t); t \in \mathbb{R})$ は 1次元ブラウン運動で、

$$\sigma(X(u); u \leq t) \perp \sigma(B(s) - B(t); s > t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を満たす。

さらに、 X のスペクトル密度 Δ の outer function h は、

$$(6.12) \quad h(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta - \hat{f}(z) - iz} \quad (z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R})$$

と分解される。 α, β, γ は 唯一つに定まる。

注意 Kubo (1972) において、non-Markov の確率過程

として、

$$(6.13) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = - \int_{-\infty}^t \gamma(t-t') u(t') dt' + \frac{1}{m} R(t) \\ R(t) \text{ は ランダム力} \end{cases}$$

を考え、 R の共分散函数として、

$$(6.14) \quad \langle R(t_1) R(t_2) \rangle = m k T \gamma(t_1 - t_2)$$

を仮定している。 $R(t)$ がなめらかであり、その範囲での、§2.2 のベテ Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動に対する Einstein の関係式 (2.2) に相当する。そこで、第1種揺動散逸定理として、

$$(6.15) \quad \frac{1}{m} \frac{1}{\hat{f}(\omega) - i\omega} = \frac{1}{kT} \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle u(t_0) u(t_0+t) \rangle dt$$

が、第2種揺動散逸定理として、

(6.16) $m \hat{f}(\omega) = \frac{1}{kT} \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle R(t_0) R(t_0+t) \rangle dt$
 が示されてゐる。

これは、Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動のとき、第1種揺動散逸定理 (2.3), 第2種揺動散逸定理 (2.10) に相当するわけだが、Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動は、それを記述するランジュヴァン方程式 (2.1) の random な部分が、真のブラウン運動であるため、もちろん可微分ではない。しかし、(6.13) における R は可微分であるため、(6.15), (6.16) から (2.3), (2.10) が導かれるわけではない。しかし、我々がのべてきた揺動散逸定理は、遅れのある確率微分方程式 ^(6.7) で記述され、その random な部分が真のブラウン運動であるため、(6.13) とは異なるが、Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動を記述するランジュヴァン方程式 (2.1) の拡張になっている。我々の主張は、第1種揺動散逸定理 (2.3), 第2種揺動散逸定理 (2.10) とは別々の主張 (2.8) が、遅れのある確率微分方程式 (6.7) に対しても、(6.12) として一般化されることを見、 T -正値性をもつ正規定常過程は、ある条件の下で、方程式 (6.7) で記述されることを見てきた。その意味で、(6.12) をもって、揺動散逸定理 ということにした。このことは、 X を記述する方程式 (6.7) を得たことと同じことなので、§12 のへた如く、我々の揺動散逸定理は Longevin 型の inverse problem といえるわけである。

§7 構成問題

T-正値性をみたす正規定常過程 X に対し、その共分散函数 R を表現する (3.4) の測度 $d\mu$ が、条件 (6.2), (6.6) を満足すると、 X は、三つ組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ によって、ラングレヴァン方程式 (6.7) を通して定まった。逆の、どのような状況のもとで、三つ組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ から、T-正値性をもつ正規定常過程が構成できるか。この問題に対しては、まだ完全にはわかっていないが、まず、表現核 E に関しては、次のことを示すことができる。

定理 正規定常過程 X はスペクトル密度 $\Delta(\lambda)$ をもち、Hardy weight、即ち、(6.1) を満足するとする。このとき、 Δ の outer function R は存在するの、その Fourier 変換を E とする。

X の共分散函数 R が、条件 (6.2), (6.6) を満足する測度 $d\mu$ によって、(3.4) として表現されるための必要十分条件は、

表現核 E が、次の如く表現されることである：

$$(7.1) \quad E(t) = \int_{(0, \infty)} e^{-t\lambda} dV(\lambda) \quad (t > 0)$$

ここで、

$$(7.2) \quad dV \text{ は } [0, \infty) \text{ 上の有界測度,}$$

$$(7.3) \quad dV(\{0\}) = 0,$$

$$(7.4) \quad \int_0^\infty \lambda dV(\lambda) < \infty,$$

$$(7.5) \quad \int_0^\infty \lambda^{-1} dV(\lambda) < \infty.$$

注意 正規定常過程 X が T -正値性をもつことは、別の 2 とはでいうと、(3.4) よりわかるが、共分散函数 R が完全単調 (completely monotone) ということであるが、この定理は、標準表現核 E も又完全単調である ことをいっている。 R と E の関係式は、(5.12) である。

さて、はじめの問題であるが、次の 2 とは示せる。

定理 $\equiv$ 3 組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ は、(6.8), (6.9), (6.10) を満足する任意のものである。このとき、(6.12) の右辺を *outer function* とする正規定常過程 X は唯一つ定まる。

かくして、最後に残った問題は、上の定理で得られた X が T -正値性をもつかどうかであるが、必ずしも一般には成り立たない。 $\gamma(ds) = \delta_{\{1\}}$ として反例がある。分っている性質を以下のべる。 X のスペクトル密度の *outer function* を E の Fourier 変換 (標準表現) を E とする。

(7.6) E は次の微分積分方程式の一意解である：

$$\begin{cases} E'(t) = -\beta E(t) + \int_{(0, \infty)} E(t+s) \gamma(ds) & (t > 0) \\ E(0+) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \\ E(t) = 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$(7.7) \quad E(t) \geq 0 \quad (t > 0)$$

$$(7.8) \quad \text{Re } h \in L^1(\mathbb{R}), \text{ symmetric, bounded, } \geq 0$$

$$(7.9) \quad E(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its} \operatorname{Re} h(s) ds \quad (= (\operatorname{Re} h)^{\wedge}(t)) \quad t > 0$$

と < 12.

$$E \text{ は odd で、} \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

$$(7.10) \quad Z(s) \equiv h(is) \quad \operatorname{Re} s > 0$$

と おくとき、

$$(i) \quad Z(s) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\beta - \int_{(-\infty, 0)} e^{is} h(s) ds + s} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$(ii) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} E(t) dt = Z(s) \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$(7.11) \quad E \in L^1(0, \infty)$$

以上がわかってゐることだが、問題は、 E が完全単調となるかどうかで、このための条件は、(7.10)の $Z(s)$ が左半平面迄解析接続(有理型に)し、極が実軸にあり、単純で、正の留数をもつことである、と予想されるが、完全な証明は得てゐない。

§8 回路網

§4で、outer function h が有理函数で、その極と零点が負の虚軸上に交互にあるものを、このような函数は、回路網理論でリアクタンス函数として、重要なものであることを、最近知った(すなわち、1930年代に一端子対の理論はできていた)多重マルコフ性をもつものの極限とも考えられる、一般の $T-E$

値性をもつ正規定常過程に対して、(7.10)で定義した函数 $Z(\omega)$ は、インピーダンスのもつ性質(正定函数性)をもっており、揺動散逸定理(6.12)、ランジュヴァン方程式(6.9)は、無限回路網の構成と関係があると思う。§4で考えた、多重マルコフ性をもつ場合は、RC-端子対回路のインピーダンスとなっている。§12のべた、Einsteinの関係、第2揺動散逸定理は、熱雑音に対するNyquistの定理ともよばれており、上のべた回路網のことはもっと調べる必要を感じる。

文 献

- | | |
|-----------------|---|
| [1] A. Einstein | Ann. Physik, 17 (1905), 549 |
| [2] N. Nyquist | Phys. Rev., 32 (1928), 110 |
| [3] R. Kubo | J. Phys. Soc. Japan, 12 (1957), 507 |
| [4] H. Mori | Prog. Theoret. Phys., 33 (1965), 423 |
| [5] R. Kubo | Reports on Progress in Physics, 29 (1966), 255 |
| [6] R. Kubo | 統計物理学 (岩波現代物理学の基礎),
6 (1972) |
| [7] Y. Okabe | Nagoya Math. J., 54 (1974), 191 |
| [8] Y. Okabe | J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 26 (1979)
(to appear) |