

Algebraic groups and ω -stable groups

イリノイ大学・神戸大

田中 克己 (Katsumi Tanaka)

1970 年代の初めから、数々の model theorist 達により ω -stable group という群の研究がされている。その定義は Logic の言葉によるものだが、代数的に大変良い性質を持っている。例えば、全ての代数的閉体上のアフィン代数群は、 ω -stable となる。このノートでは、ホップ代数と関連の有りそうな、いくつかの ω -stable group の問題を紹介する。

ここでは、 ω -stable group の定義は敢えてせず、definable subgroup についての降鎖条件をみたす群として特徴づける。ここで言う definable とは、群論を展開するために必要な第一階の述語言語で、記号 $+$, $\cdot$ と論理記号 $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ と変数およびパラメーターを用いて definable を意味する。

例えば、 G を群、 $a \in G$ とするとき、

$$G \text{ の中心 } Z(G) \text{ は、 } \forall y (x+y = y+x) \quad \text{で、}$$

$$a \text{ の中心化群 } C_G(a) \text{ は、 } a+x = x+a \quad \text{で、}$$

それぞれ定義される definable subgroup となる。

§1 では、構造の definable subset の複雑さを表す Morley rank を定義する。これは、代数群を考えたときにその次元とはほぼ一致する。§2 では、 ω -stable group についての、いくつかの基本的結果を紹介する。§3 では、Morley rank が 2 以下の群の分類を考える。§4 では、有限の Morley rank を持つ単純群についての Cherlin の予想と、これに関する結果を紹介する。

§1. Morley rank

代数幾何では、多様体 V が $n+1$ 次元のとき、それぞれの共通部分が高々 $n-1$ 次元の、無限個の異なる n 次元の部分多様体が存在する。また V が、真部分多様体の和集合として表わせないと既約であるという。Morley は 1965 年に、[Mo] の中で、これらの概念を一般化した。一般の構造において、次元に対応する Morley rank を、既約成分の数に対応して Morley degree を次のように定義した。

定義. M を構造とする (必ずしも群構造である必要はない)。 X を M の言語の中で M のパラメーターを用いて定義される集合とする。このとき、Morley rank (MR) は次のように定義

さしる。

- (i) $MR(X) = 0 \Leftrightarrow X$ は有限 ;
- (ii) $MR(X) \geq 1 \Leftrightarrow X$ は無限 ;
- (iii) δ が limit ordinal のとき ,
 $MR(X) \geq \delta \Leftrightarrow MR(X) \geq \alpha \text{ for all } \alpha < \delta ;$
- (iv) $MR(X) \geq \alpha + 1 \Leftrightarrow$ 互いに素な definable subsets $X_i, i < \omega$
 が存在して、 $MR(X \cap X_i) \geq \alpha \text{ for all } i < \omega ;$
- (v) $MR(X) = \infty \Leftrightarrow MR(X) \geq \alpha \text{ for all } \alpha .$

また、 $MR(X) \geq \alpha$ かつ $MR(X) \neq \alpha + 1$ のとき、 $MR(X) = \alpha$ と定義する。

今、 $MR(X) = \alpha$ とする。このとき、互いに交わらない definable subsets $X_i, 0 \leq i < n$ が存在して、 $MR(X \cap X_i) \geq \alpha, i < n$ となる。このような最大の n を、 X の Morley degree という。

G が ω -stable group のときは、 $MR(G) < \infty$ となることが知られている。次の命題は、定義より明らか。

命題. X, Y を構造 M の definable subset とする。

- (1) $X \subseteq Y \Rightarrow MR(X) \leq MR(Y) .$
- (2) $X \subseteq Y$ かつ $MR(X) = MR(Y) \Rightarrow \deg(X) \leq \deg(Y) .$

§ 2. ω -stable groups

先に述べたように、 ω -stable group は definable subgroup についての降鎖条件をみたす (ω -stable d.c.c.)。このことから、次の定義が意味をもつ。

定義. G の definable subgroup H で $[G:H]$ が有限なものの中で最小の群 H を、 G の既約成分と呼ぶ。このとき、 $H=G^\circ$ と表わす。特に、 $G=G^\circ$ のとき、 G は連結であるという。

今、 $\{H_i: i \in I\}$ を G の中で指数有限の definable subgroup 全体のクラスとする。 $\bigcap_{i \in I} H_i$ を考えると、 ω -stable d.c.c. から、ある有限集合 $I_0 \subset I$ が存在して、

$$G^\circ = \bigcap_{i \in I} H_i = \bigcap_{i \in I_0} H_i$$

となる。この有限性から、 G° は definable となる。また、定義より一意性も明らか。

もちろん $[G:G^\circ]$ は有限だが、Cherlin は $[G:G^\circ] = \deg(G)$ を示した。また、上と同様の議論により、次が証明できる。

定理. G を ω -stable group, $X \subset G$ とするとき、ある有限部分集合 $X_0 \subset X$ が存在して、 $C_G(X) = C_G(X_0)$ が成り立つ。

上の定理は、Baldwin and Saxl [B.S] により一般化され、stable group とよばれる群について成り立つことが知られている。

Macintyre は、 ω -stable アーベル群の特徴づけを行なった。

定理 ([Ma]). G がアーベル群のとき、

$$G \text{ は } \omega\text{-stable} \iff G \cong D \oplus H,$$

ここで、 D は divisible, H は exponent 有限。

また、Reineke が [R] で使った共役類についての議論を使うと次のことがわかる。

定理. 無限の ω -stable group は、無限の definable アーベル部分群をもつ。

§ 3. Morley rank 1 および 2 の群

上の無限アーベル群の存在から、次が直ちに導かれる。

定理. Morley rank が 1 の連結な群は、アーベル群である。

系 ([R]). Morley rank が 1 の連結群は、次のいずれかの形をしている:

$$\textcircled{1} \quad \oplus \mathbb{Z}_p$$

$$\textcircled{2} \quad \oplus_{\mathbb{I}} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{\text{prime}} \left[\oplus_{\mathbb{I}_p} \mathbb{Z}(p^\infty) \right], \quad |\mathbb{I}| \geq 0, \quad |\mathbb{I}_p| < \omega.$$

代数群では、一次元の連結群は G_a か G_m に限ることが知られているが、これらは上の $\textcircled{1}$ か $\textcircled{2}$ の形をしている。

また、Prüfer 群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ は代数群とは同型にならない。

一般に代数群においては、その次元と Morley rank がほぼ一致することが知られているが、標数 p の代数的閉体上の代数群 $G_a \oplus G_a$ は二次元だが、群としては $\oplus \mathbb{Z}_p$ に同型となり Morley rank は 1 になる。

次に Morley rank が 2 の群の分類を考える。Cherlin は [C] で以下の結果を得た。

定理. Morley rank が 2 の連結群は 2-step の可解群である。

この定理から、Morley rank が 2 の連結群は、次のいずれかになる。

I. アーベル群

II. 可解で centerless

III. 可解で中心が有限

IV. 2-step のベキ零群

二次元の連結代数群も上の I ~ IV のいずれかになる。

上の I の場合は、§2 のアーベル群の特徴づけの意味で分類は終わっている。II については、Cherlin が先の論文で次の結果を与えている。

定理. G が Morley rank 2 の連結可解群で中心が trivial ならば、ある代数的閉体 K が存在して、

$$G \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a \in K, b \in K^* \right\}.$$

証明. $[G, G]$ を U とおくと、 U は Morley rank 1 の連結な正規アーベル群となる。今、 $C_G(b)$ が無限となる元 b を $G - C_G(U)$ から選び、 $C_G(b)^0$ を T とする。 $U \cap T$ は有限だから、 $MR(UT) = 2$ となり、 $G = UT$ がわかる。さらに G は centerless だから、 $U \cap T = 1$ となり、

$$G = U \rtimes T.$$

今、 U を加法的に、 T を乗法的に書くことにする。

$$t \cdot u = tut^{-1} \quad \text{for } t \in T, u \in U$$

と定義する。したがって $1_G = 0_U$ 。

G は連結で centerless だから、 $a \in G-1$ にたいし、
 $[G: C_G(a)] = \infty$ となる。よって全 G の nontrivial な共役類
 は無限となる。 U は連結で rank 1 だから、 $U-1$ は G の
 中で一つの共役類となる。 $u \in U-1$ にたいし、 $U-1$ の任意
 の元は $t \cdot u$ ($t \in T$) という形をしている。

今、 $u \in U-1$ を fix する。このとき、 $C_G(u) = U$ と
 なる。 $\text{map } ^\wedge: t \mapsto \hat{t} = t \cdot u$ は T から $U-1$ への bijection
 となる。 T に特別な元 0 を付け加えて、 T の multiplication を

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

として、 $F = T \cup \{0\}$ の上へ拡張してやる。 F 上の加法を

$$(x+y)^\wedge = \hat{x} + \hat{y}$$

で定義する。すると $+$ は F 上可換で associative な operation
 になり、逆元は、

$$(-x)^\wedge = -x$$

で定義する。さらに、

$$(z(x+y))^\wedge = z \cdot (x+y)^\wedge = z \cdot (\hat{x} + \hat{y}) = \hat{z}x + \hat{z}y = (zx + zy)^\wedge$$

となり、 F は G 上解釈された体となる。『 ω -stable な体は
 代数的閉体に限る』というモデル理論の結果から、 F は代数的
 閉体であることがわかる。 U を $1 \in F_+$ と同一視すれば、
 $U = F_+$, $T = F^\circ$ となり、 $G = F_+ \times F^\circ$ がいえる。 終

この証明のポイントは、operation が一つしかない群の構造の中に、いかに operation を二つもつ体の構造を解釈するかにある。これは、モデル理論の中でも重要な問題の一つである。他にも、Mal'cev 対応、Thomas の方法等知られているが、Cherlin の議論を一般化した次の Zil'ber の結果は、他の問題とも関連して、大変重要である。

定理 ([Z]). G が有限の Morley rank をもつ連結可解群で、ベキ零でなければ、その中に代数的閉体を解釈する。

Ⅲ の場合は、 $G/Z(G)$ を考えれば Ⅱ に帰着する。後は Ⅳ の場合さえ考えてやればよい。Ⅳ のクラスに関しては、Cherlin の次の結果がある。

定理. G を Morley rank 2 の連結ベキ零群で可換でないとする。このとき、 G の exponent は素数 p か p^2 になる。

更に、この群の構造を考えてみる。中心の連結成分 Z とその剰余群 G/Z は、ともに $\oplus \mathbb{Z}_p$ という形をしている。ここで、群 G は 2-step ベキ零群だから、元 $x \in G - Z(G)$ を fix したとき、写像 $f_x: G \rightarrow Z$ via $G \ni y \mapsto [x, y] \in Z$ は、

準同型写像となる。この写像は definable だから、その核 $\ker f_x = C_G(x)$ は definable subgroup となる。 $MR(C_G(x)) = MR(Z) = 1$ かつ $C_G(x) \cap Z$ より、 $[C_G(x):Z]$ は有限となる。よって $|C_G(x)| = |Z|$ となり $|G| = |Z|$ がわかる。

ここで、Morley rank 2 の連結、2-step ベキ零群の構成を考える。今までの類似性から、代数群を考えるのが妥当だろう。

Z と G/Z は $\oplus \mathbb{Z}_p$ という形をしているから、ある標数 p の代数的閉体 K の加法群と考える。したがって、

$$0 \rightarrow K_+ \rightarrow G \rightarrow K_+ \rightarrow 0$$

という central extension を考えてやればよい。この群は、Kambayashi - Miyanishi - Takeuchi の [KMT] の中で詳しく考察されている。一般に、 G は $K \times K$ 上に operation を次のように定義したものになる。

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a+c, b+d+f(a, c)).$$

ここで、2-cocycle $f: K \times K \rightarrow K$ は次の条件をみたす。

- ① $f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z),$
- ② $f(x, 0) = f(0, x) = 0.$

例 1. $f(x, y) = x^p y$ とすると、群 G は代数群 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^p y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in K \right\}$ と同型。

例 2. $f(x, y) = x^{p^m} y^{p^n}$, $m \neq n$.

上の例はともに群の exponent が p になる。一般に f が biadditive のとき、 G の exponent は p になる。次に exponent が p^2 の例を与える。

例 3. $f(x, y) = x^p y + \frac{1}{p} [(x+y)^p - x^p - y^p]$,
 $\mathbb{Z}$ -polynomial として定義する。

クラス IV の分類に向けて、次のことが問題となる。

問題. 上の構成において、 K は代数的閉体でなければいけないか。

問題. Morley rank 2 の連結な 2-step ベキ零群は代数群か。

問題. 上の群の中に代数的閉体は解釈できるか。

この一年の間に、最後の問題に対して次の部分解が得られた。

定理. 例 1 ~ 3 の群の中に代数的閉体が解釈できる。

証明. ここでは例 1 についての方法を与える。方針としては、 $G/Z(G)$ の中に代数的閉体 $\langle G/Z(G), \oplus, \otimes \rangle$ を解釈する。

$\oplus$ は群の operation により自然に与えられる。以下に、
乗法 $\otimes$ の解釈を与える。

パラメーターとして $(1, 0)$, $\bar{1}$ と記す, を使う。今、
 $(x, -)$, $(y, -)$, $(a, -)$, $(b, -)$ という形の G の元をそれぞれ $\bar{x}, \bar{y}$,
 $\bar{a}, \bar{b}$ と書くことにする。

$$[\bar{x}, \bar{a}] = [\bar{y}, \bar{1}] \wedge [\bar{x}, \bar{1}] = [\bar{y}, \bar{b}]$$

という formal な式は、体 K の中で、

$$(*) \quad \begin{cases} x^p a - x a^p = y^p - y \\ x^p - x = y^p b - y b^p \end{cases}$$

を意味する。 $(*)$ から、

$$y = \frac{1}{b - b^p} (x^p - x - x^p a b + x a^p b)$$

が導かれ、 $(*)$ から y を消去すると、

$$(1 - a^p b^p) x^{p^2} + (\dots) x^p + (a^p (b - b^p)^p + (b - b^p)^{p-1} (1 - a^p b^p)) x = 0$$

を得る。

$a, b \notin \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ なる a, b にたいし、

$$ab = 1 \Leftrightarrow (*) \text{ の解の数 } < p^2.$$

$G/Z(G)$ 上に " $ab=1$ " を意味する述語 $R(a, b)$ を

$$R(a, b) \Leftrightarrow [a, b \in \{1, \dots, p-1\} \wedge b = a^{p-2}]$$

$$\vee [a, b \notin \{0, 1, \dots, p-1\} \wedge (*) \text{ の解の数 } < p^2].$$

と定義できる。右側は formal に表現することができる。

このとき、

$$\bar{w} = \bar{u} \otimes \bar{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\bar{x}, \frac{1}{\bar{u} + \bar{v}} \right] = [\bar{y}, \bar{1}] \wedge \left[\bar{x}, \frac{1}{\frac{1}{\bar{u}} + \frac{1}{\bar{v}}} \right] = [\bar{y}, \bar{w}] \\ \text{の解の数が } < p^2 & \text{if } \bar{u} \cdot \bar{v} \neq \bar{1} \\ \bar{w} = \bar{1} & \text{if } \bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{1} \end{cases}$$

と定義すると、右側は formal に表現できる。これで $\otimes$ は解釈されることになった。

ひとたび群の中に代数的閉体 k が解釈されたら、その群が k 上の代数群となることを示すのは、モデル理論の問題と言うよりも、むしろホップ代数の問題となるだろう。

§4. 単純群

これまで見て来たように、代数群と ω -stable group は大変似た性質をもつ。このことから Cherlin は次の予想をたてた。

Cherlin の予想. Morley rank 有限の ω -stable な単純群は、代数的閉体上の代数群と同型になる。

これについては、S. Thomas [T] が locally finite の場合に有限単純群の分類を使って証明したが、一般の場合はまだ未解決である。このむずかしさは、 ω -stable 単純群に Borel subgroup の一般論が無いことによる。§3 の終わりに述べ

たように、群の中に代数的閉体を解釈することを考える。

H を ω -stable group G の部分群 (definable でなくともよい) とする。このとき、 H を含む G の最小の definable subgroup が一意に存在する。(証明は連結成分のときと同様) これを H の model closure とよび $\tilde{H}$ と記す。これに関して、Zil'ber の結果がある。

定理. H を ω -stable group G の可解 (ベキ零) 部分群とすると、 $\tilde{H}$ も可解 (ベキ零)。

したがって、 ω -stable group の極大可解 (ベキ零) 部分群は definable である。§2 の最後の定理から、それらのうちに無限のものが存在することがわかる。もしその definable な可解群がベキ零でなければ、§3 の Zil'ber の定理から、群は代数的閉体を解釈する。しかしながら、今のところ Morley rank 3 の単純群についてさえ、 $\text{PSL}(2, K)$, K は代数的閉体、以外に存在するかどうかも知られていない。

参考文献

[B.S] J. Baldwin and J. Saxl, Logical stability in group theory.

J. Austr. Math. Soc., vol. 21 (1976) 267-276.

- [C] G. Cherlin, Groups of small Morley rank, *Ann. of Math. Logic* 17 (1979) 1-28.
- [KMT] T. Kambayashi, M. Miyanishi and M. Takeuchi. *Unipotent Algebraic Groups*. LNM 414. Springer.
- [Ma] A. Macintyre, On ω_1 -categorical theories of abelian groups. *Fund. Math.* 70 (1971), no. 3, 253-270.
- [Mo] M. Morley, Categoricity in power. *Trans. A.M.S.* 114 (1965) 514-538.
- [R] J. Reineke, Minimal Gruppen. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 21 (1975) 357-359.
- [T] S. Thomas, Classification theory of simple locally finite groups. PhD Thesis, University of London 1983.
- [Z] B. Zil'ber, Groups and Rings with categorical theories (in Russian). *Fund. Math.* 95 (1977), 173-188.