

Diagram を定める link 群の Wirtinger 表示

神沢・自然科学 児玉 宏晃 (Kouzi Kodama)

定義

oriented link diagram の link 群の Wirtinger 表示
(c.f. Rolfsen [2])

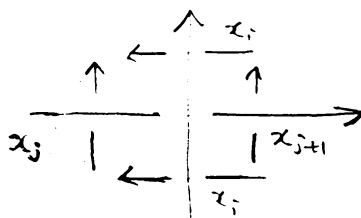
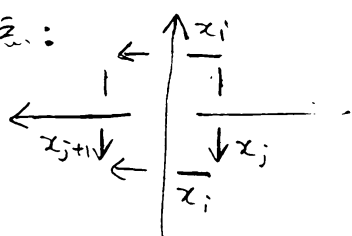
crossing を持たない trivial な component を除けば、

diagram の n 個の crossing は under crossing の部分で link を
 n 個の arc に分ける。link の component に順序をつける。さら
に link の向きに沿って arc に順序をつける。各 arc で meridian
をとり (時計回りに 1 回まわるように)、arc の順序に対応させ
る番号をつける。よって $x_1, x_2, \dots, x_n$ とする。

$G(L) = \pi_1(S^3 - N(L))$ の generator とする。

relation は各交点で次の様になる

交点:



relation:

$$x_{j+1} = x_i^{-1} x_j x_i$$

$$x_{j+1} = x_i x_j x_i^{-1}$$

この様にして link diagram から 基本群の Wirtinger 表示への対応を考える。

以下では *non-trivial, non-split oriented link* の link diagram を考える。

Waldhausen の結果 [3] より

命題. $(S^2, L_1), (S^2, L_2)$ oriented links に対し

$$\exists \psi: G(L_1) \rightarrow G(L_2)$$

meridian longitude system を保つ同型写像

$$\Leftrightarrow (S^3, L_1) \cong (S^3, L_2)$$

これから diagram については次が言える。

命題. oriented link diagrams D_1, D_2 が同じ Wirtinger 表示を持つならば $D_1 \cong D_2$ (oriented link type が同じ)

∴ meridian は 群の表示の generator として出ている。

次の様にして diagram に対応する Wirtinger 表示より一般的に diagram の各 component の longitude を求めることができる

link の i 番目の component K_i に対して、群表示の生成元中の K_i の meridian を $x_1, x_2, \dots, x_l$ とする。 K_i の n 番目の crossing の relation を

$$x_2 = x_{j_1}^{-\epsilon_1} x_1 x_{j_1}^{\epsilon_1}$$

$$x_3 = x_{j_2}^{-\epsilon_2} x_2 x_{j_2}^{\epsilon_2}$$

$$x_l = x_{j_{l-1}}^{-\varepsilon_{l-1}} x_{l-1} x_{j_{l-1}}^{\varepsilon_{l-1}}$$

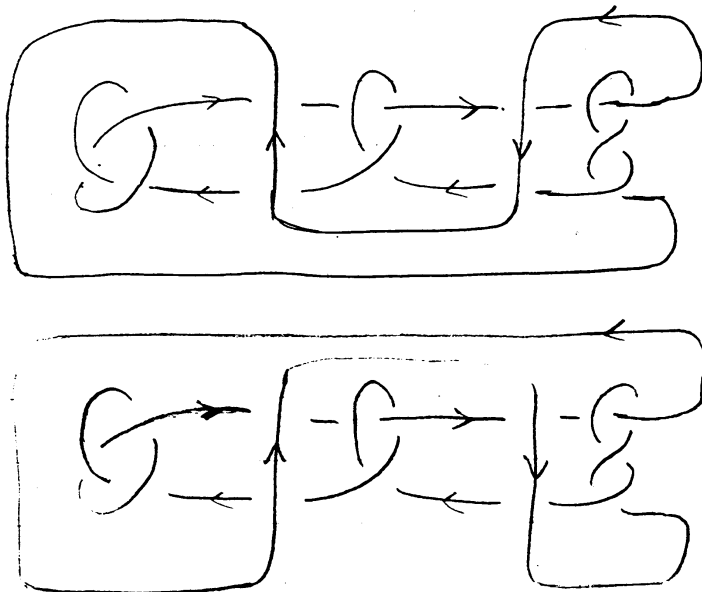
$$x_1 = x_l^{-\varepsilon_l} x_l x_l^{\varepsilon_l}$$

このとき, k_i の longitude h_i は

$$h_i = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{j_l}^{\varepsilon_l} x_1^{-\left(\sum_{s=1}^l \varepsilon_s\right)}$$

定義 S^2 上の link diagram が S^2 の orientation preserving homeo で移り合う時, 同値とする

例. 同じ Wirtinger presentation を持つが同値ではない diagram



定義. Reidemeister の moves $(R_1), (R_2), (R_3)$ による diagram の変形を diagram の isotopy.

$(R_2), (R_3)$ による diagram の変形を regular isotopy とする

命題 (c.f. Kauffman [1])

2つの diagram D_1, D_2 が isotopic かつ component 毎に writhe (交差の sign の和) が等しい.

$\Leftrightarrow D_1, D_2$ は regular isotopic

link diagram の Wirtinger presentation の relation を見ると
よ, 2 diagram の component 毎の writhe が分かる。

命題. oriented link diagram D_1, D_2 が同じ Wirtinger presentation を持つ,

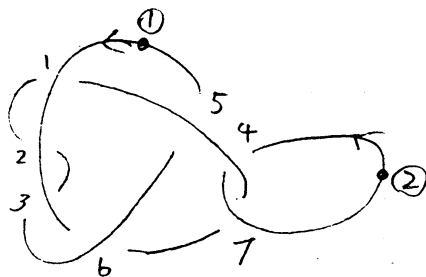
$\Rightarrow D_1, D_2$ は regular isotopic.

更に relator に順序をつける。

定義. 順序付き Wirtinger presentation

link の component に順序をつける。component の順に、
component 上に適当に始点 (を) orientation に従って diagram
をたどり overcrossing で通り時に交差に番号をつけて
やる。これにより 交差に対応する relation に番号を
つける。

例



命題 oriented link diagrams D_1, D_2 が同じ順序付き Wirtinger presentation を持つ

$\Rightarrow D_1, D_2$ は同値な diagram.

$\therefore$) link の regular projection を S^2 上の 4-regular graph と見る。順序付きの Wirtinger presentation が与えられたとき、対応する link は μ -component link とする。link の各 component に対応させて μ 個の S^1 を取る。relation に従って S^1 上は crossing point の引きもでしをやる。undercrossing には generator の番号に対応して, overcrossing には generator の番号に対応して各々順序がつく。relation は word によって対応している undercross と overcross の引きもでしを同一視して 4-regular graph を得る。この graph の S^2 への embedding の頂点近傍での様子は relator によって定まっている。graph の maximal tree を取る。この tree の S^2 への embedding を relation で決まる頂点での様子を満足するものは一意的。この embedding に残りの辺を加えてゆくとその加え方は一意的。この graph の embedding に上,下を入れれば良い。

$(G(L), \{m_i\}, \{k_i\})$	$\leftarrow$ Wirtinger presentation	$\leftarrow$ 順序付き Wirtinger presentation
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
isotopy type	$\leftarrow$ regular isotopy type	$\leftarrow$ diagram の同値

参考文献

- [1] L. H. Kauffman : An invariant of regular isotopy ,
preprint
- [2] D. Rolfsen : Knots and links , Publish or Perish Inc.
Berkeley, 1976.
- [3] F. Waldhausen : On irreducible 3-manifolds which are
sufficiently large , Ann. of Math. 87 (1968) 56-82