

On a zero density estimate for Dedekind zeta functions of the fields $\mathbb{Q}(n^{1/k})$.

岩手大学教育学部 川田 浩一
(Koichi Kawada, Iwate Univ.)

1. 導 入

k を 2 以上の自然数とし, $\zeta(s)$ を Riemann zeta 関数とする。
 $s = \sigma + it$ は複素変数で, σ, t はそれぞれ s の実数部分, 虚数部分である。自然数 n に対して, $\zeta_n(s)$ を, 有理数体 $\mathbb{Q}$ に n の
実 k 乗根を添加した体 $\mathbb{Q}(n^{1/k})$ の Dedekind zeta 関数とする。こ
の場合, Uchida [7] あるいは van der Waall [8] により,
 $\zeta_n(s)/\zeta(s)$ は整関数である。先に k は 2 以上, としたが,
 $k=2$ のときは $\zeta_n(s)/\zeta(s)$ はある Dirichlet の L 関数となり, L
関数の零点密度定理などにより, 以下の話はもっと簡単に扱
える。したがって以下の話が意味をもつのは, k が 3 以上の
とき, ということになる。

いま, $N(n; \alpha, T)$ を整関数 $\zeta_n(s)/\zeta(s)$ の零点のうち,

$$\sigma \geq \alpha, \quad |t| \leq T$$

なる領域に入っているものの個数とする。さらに集合 I_k を,

$x^k - n$ が多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ において既約であるような自然数 n 全ての集合とする。

このとき、筆者が [2] で述べた通り、

$$(1) \quad \sum_{\substack{n \leq N \\ n \in I_k}} V(n; 1-k, T) \ll (NT)^{1-\delta}$$

となる正の実数 δ が存在することが証明できる。実際, [2] には, より詳しい形が示されている。

この零点密度の評価 (1) は, 自然数を素数と k 乗数の和として表すことに関する研究の中で必要となったものである。自然数 n を素数と k 乗数の和として表すとき, その表し方の数を $r_k(n)$ とすると,

$$(2) \quad r_k(n) \sim \frac{n^{1/k}}{\log n} G_k(n) \quad (n \in I_k, n \rightarrow \infty)$$

という漸近式が予想されている。ここで, $G_k(n)$ は特異級数 (singular series) と呼ばれるもので,

$$G_k(n) = \prod_p \left(1 - \frac{f_n(p) - 1}{p - 1} \right)$$

で定義される。ただし, 文字 p は素数を表し, $f_n(p)$ は合同式 $x^k - n \equiv 0$ の法 p での解 x の個数である。ここでは, $f_n(s)$ の性質を用いて, 定義式の無限積が収束すること, および不等式 $G_k(n) \gg (\log n)^{-k}$ ($n > 1$) が証明できること, に注意

しておく。

筆者[2]は、ほとんどすべての自然数 n に対して、予想されている漸近式(2)が成立することを示した。より詳しくいうと、任意に固定した正の実数 A に対して、

$$E_k(N) = \#\{1 < n \leq N; |r_k(n) - \frac{n^{y_k}}{\log n} \phi_k(n)| > n^{\frac{1}{k}} (\log n)^{-A}\}$$

とおくとき、

$$(3) \quad E_k(N) \ll N (\log N)^{-A}$$

となる。この証明の中で、特異級数の扱いに関する部分に、前述の零点密度の評価(1)が使われているが、その点については[2]を参照されたい。また、証明の詳細は、学位論文[3]に含まれている。

さて、この $E_k(N)$ についての評価(3)は、筆者のプレプリント[1]が雑誌に受理されるうちに、Perelli-Zaccagnini[6]によって、区間の長さを短かくするという点で精密化された。彼らは素数と乗数の和について扱った論文[6]の中で、予想されている漸近式(2)に対する例外の自然数の個数については、 $H \geq N^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ のもとで、

$$(4) \quad E_k(N+H) - E_k(N) \ll H (\log N)^{-A}$$

であることを示した。その中で、特異級数の扱いに関する部分には、Dedekind zeta関数の零点密度の評価ではなく、Nair-

Berelli [5] による結果が使われている。その結果 [5, Theorem 1] をここでの記号で書けば、 $H \geq N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $N, M \geq 1$ のもとで、

$$(5) \quad \sum_{N < n \leq N+H} \left| \sum_{M < p \leq 2M} (p_n(p) - 1) \right| \ll HM (\log M)^{-A}$$

という結果である。この評価 (5) の Vinogradov 記号に含まれている定数は、 A, k, ε に依存するだけでなく、非実効的 (ineffective) である。従って、これをを用いて得られた結果 (4) の中に含まれる定数も、やはり非実効的である。

不等式 (5) の証明は、 M が $\exp(\log N \cdot (\log \log N)^2)$ より大きい小さいかに分けて行なわれるが、大きいときの方を扱う際に非実効的な定数が現れ、今のところそれを避けることができない。

彼らはそれを Siegel-Brauer の定理と呼んでいる ([5, Lemma 4]) が、Dedekind zeta 関数 $\zeta_n(s)$ の例外的に 1 に近い零点の評価に関する部分で非実効的な定数が現れるのである。

一方、不等式 (5) は、零点密度の評価 (1) の証明の基本となる補題とよく似た形をしている。 n の区間の長さを除けば、本質的に同じ、といえる。つまり、Nair-Berelli [5] は零点密度評価 (1) における n の区間を (5) と同じところまで短くすることができるとをも指摘している、といえる。ただし、

零点密度の評価にあたっては, (5) といえば, M が N の中乗程度の大きさのところまでしか必要とされないので, 非実効的な定数が現れることはない。実際, (1) と (3) のどちらについても, その中に含まれている定数は実効的 (effective) であった。

したがって, 我々はまず (1) における n の区間を改良して短くし, それを用いて特異級数を扱うことで, (4) における定数を実効的なものにするができる。

定理 $N, T \geq 2, H \geq N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \varepsilon > 0$ のとき, ある正の定数 δ があって,

$$\sum_{\substack{N < n \leq N+H \\ n \in I_k}} \mathcal{N}(n; 1-\varepsilon, T) \ll (HT)^{1-\delta}.$$

系 k, A のみに依存する実効的な定数が Vinogradov 記号に含まれているものとして, 不等式 (4) が成立する。

Nair-Perelli の結果 [5, Theorem 1] は, 多項式で表される素数の分布についての応用もある [5, Theorem 2]。その Theorem 2 の証明中の一つの鍵となる式 [5, (36)] が Theorem 1 によって示されている。我々はやはり零点密度の評価によって, [5, (36)] に含まれている定数を, 非実効的なものでなく, 実効的なもの

のにあることができる。

2. 証明について。

定理の証明は、(1)の証明において機械的に区間の長さを短いものに置き代えるだけでできる、といえる。

気持ちとしては、Dirichlet の L 関数に対する零点密度定理の証明 (例えば Montgomery [4, Ch. 12]) と平行して証明を進める。ここでは大きな篩の不等式 (large sieve inequality, [4, Theorem 2.5]) が重要な役割を果たしているので、 $\zeta_n(s)/\zeta(s)$ の零点密度を評価するにあたり、これに対応するものを用意する必要がある。それが証明の一番大きなポイントであり、それ以外は、 L 関数の零点密度定理の証明と同じことを繰り返すだけ、ともいえる。

さて、Dedekind zeta 関数 $\zeta_n(s)$ の Euler 積表示は、

$$\zeta_n(s) = \prod_p \prod_{1 \leq t \leq k} (1 - p^{-ts})^{-a_n(t, p)} \quad (\sigma > 1)$$

という形で表すことができ、 $f=1$ のとき、少なくとも $p \nmid kn$ であれば、 $a_n(1, p) = p_n(p)$ となることが知られている。そこで、

$$\frac{\zeta_n(s)}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-p_n(p)+1} \cdot \prod_{p \mid kn} (1 - p^{-s})^{-a_n(1, p)+p_n(p)} \times \prod_{p \nmid kn} \prod_{2 \leq t \leq k} (1 - p^{-ts})^{-a_n(t, p)}$$

$$= \prod_p (1 + (p_n(p) - 1) p^{-s}) \cdot F_n(s)$$

とかく。

我々は σ の実数部分が 1 に近いところに注目するので、 $F_n(s)$ は本質的には簡単に扱うことができる。この意味で、本質的には $\zeta_n(s)/\zeta(s)$ を Dirichlet 級数で書いたときの係数は、

$$\beta_n(m) = \mu(m)^2 \prod_{p|m} (p_n(p) - 1)$$

である、ということが出来る。ここで $\mu(m)$ は Möbius 関数である。つまり雑な言い方をすれば、 $\sigma > 1$ において

$$\frac{\zeta_n(s)}{\zeta(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_n(m)}{m^s}$$

とすることが出来る。

そして大きな節の不等式の代わりとして、

$$\sum_{N < n \leq N+H} \left| \sum_{M < m \leq 2M} a_m \beta_n(m) \right|$$

に対して“自明でない”評価が与えられれば、それをもとに定理を得ることが出来る。実際、この和を $\ll H M^{1+\varepsilon} \max_{M < m \leq 2M} |a_m|$ とおさえれば自明だが、それより少し良くできれば、つまりある $\varepsilon > 0$ に対し、

$$(6) \quad \sum_{N < n \leq N+H} \left| \sum_{M < m \leq 2M} a_m \beta_n(m) \right| \ll H M^{1-\frac{\varepsilon}{3}} \max_{M < m \leq 2M} |a_m|$$

という形の評価が示せば、零点密度をおさえる際の良く知られた方法によって定理を得ることができるというわけである。

ところで、 α_m の値を、 m が素数のときのみに、その他のときは0と定めれば、(6)の左辺は(5)の左辺と一致する。そして、Nair-Berelliの(5)の証明の M があまり大きくないときの議論は、一般の複素数 α_m に対する(6)の証明にも同様に通用し、我々は次の補題を得ることができる。

補題 $H \geq N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $M < N^B$, $\varepsilon, B > 0$ とすると、不等式(6)は $< \frac{\varepsilon}{10B}$ に対して成立する。

定理はこの補題から従うが、その道筋は[1](あるいは[3])と同様である。

References.

- [1] Kawada, K. "On the sum of a prime and a k -th power",
Mathematical Research Note, Inst. Math. Univ. Tsukuba No. 92-008, 1992.
- [2] Kawada, K. "On the asymptotic formula for the number of representations of numbers as the sum of a prime and a k -th power",
Proc. Japan Acad. vol. 69 ser. A no. 8 (1993), 283-286.
- [3] Kawada, K. "Contributions to the additive theory of numbers",
Thesis, University of Tsukuba, 1993.
- [4] Montgomery, H. L. "Topics in Multiplicative Number Theory",
Springer, 1971.
- [5] Nair, M. and Perelli, A. "On the prime ideal theorem and irregularities in the distribution of primes", Duke Math. J.
vol. 79. no. 1 (1995), 1-20.
- [6] Perelli, A. and Zaccagnini, A. "On the sum of a prime and a k -th power", Izvestija Acad. Nauk. ser. Mat. vol. 59 no. 1 (1995),
185-200.
- [7] Uchida, K. "On Artin L-functions", Tôhoku Math. J. vol. 27
no. 2 (1975), 75-81.
- [8] van der Waall, R. W. "On a conjecture of Dedekind on zeta functions", Indag. Math. vol. 37 (1975), 83-86.