

Polynomial Time Approximation Schemes for Metric TSP on the Polyhedron Side

秋田大学院・工学資源学研究所 石郷岡直輝 (Naoki Ishigouoka)

山村明弘 (Akihiro Yamamura)

Department of Computer Science and Engineering
Akita University

概要

巡回セールスマン問題に対する多項式時間近似アルゴリズム (PTAS) についての研究は長い間なされている。本論文では立体の表面上にノードが存在する場合のメトリック TSP に対する PTAS を示す。特に直方体から上下の面を取り除いた立体上のメトリック TSP について示す。ユークリッド TSP の PTAS として提案された Arora のアルゴリズムを利用する。

1 はじめに

巡回セールスマン問題 (TSP: Traveling Salesman Problem) とは n 個のノードとすべてのノード間のコストが与えられたとき、すべてのノードを経由し出発点に戻ってくる経路のなかでコストの総和が最小となるものを求める問題である。与えられたノードをすべて経由して出発点に戻ってくる経路をハミルトン閉路と呼ぶ。本論文ではこのハミルトン閉路をツアーとして話を進めていく。TSP では最適解をコストの総和が最小であるツアーとし、最適値をコストの総和とする。1970 年代に TSP は NP-困難であることが示された ([7])。すべてのノード間で三角不等式 ($c(x, y) + c(y, z) \geq c(x, z)$) を満たす場合メトリック TSP と呼ぶ。また 2 次元 (または d 次元) 上にノードの位置情報が与えられノード間のコストにユークリッド距離が使われる場合、特にユークリッド TSP と呼ぶ。ユークリッド距離はノルムを使用し、点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) のユークリッド距離は $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ となる。ユークリッド TSP はメトリック TSP の特別な場合である。ユークリッド TSP も NP-困難である ([5], [10])。Karp は最適値から $(1 + \epsilon)$ 倍 ($1 < \epsilon$ である任意の定数) 以内のツアーを高い確率で求めるアルゴリズムを提案した ([8])。また Christofides ([4]) は多項式時間ですべてのメトリック TSP のインスタンスに対して最適値の $\frac{3}{2}$ 倍以内のツアーを求める近似アルゴリズムを提案した。

Arora ([2]), Mitchell ([9]) はユークリッド TSP の PTAS を提案している。Arora が提案したアルゴリズムは動的計画法を使用する $\frac{1}{2}$ の確率で $(1 + \epsilon)$ -近似解が計算時間 $O(n(\log n)^c)$ で得られる。(ただし $0 < \epsilon < 1, c = O(\frac{1}{\epsilon})$) d 次元の場合は計算時間 $O(n(\log n)^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$ で得られる。また決定的アルゴリズムとすることが可能である。二次元の場合、計算時間 $O(n^3(\log n)^c)$ で必ず近似解が得られる。この PTAS は領域を正方格子で区切った直線とツアーとの交差が定数回となるようなツアーを求める。正方格子の数は多くても $n \log n$ 個であり 1 つの正方格子に関して計算時間 $O((\log n)^{O(c)})$ であるのでこのアルゴリズムは $O(n(\log n)^{O(c)})$ で計算可能である。

本論文では図 1 のような直方体から上下の面を取り除いてできる立体の表面上にノードが与えられ、面の表面上を移動する際の TSP について検討を行った。直方体の上下の面 (図 1 における斜線の面) にはノードは存在せず移動もできないものとする。通常の TSP (ユークリッド TSP やメトリック TSP も含む) ではコストの総和を計算することは容易である。なぜなら二点間のノードを移動する際の経路は一意的に決まるからである。しかし直方体の側面上の TSP では図 2 のように展開図上で 2 通り存在する。この点がユークリッド TSP と比べて直方体の側面上の TSP が難しい理由である。直方体の側面上のメトリック TSP の検討を行う際、直方体を任意の部分で展開した展開図を使用する。図 3 のようにユークリッド TSP と直方体の側面上のメトリック TSP では与えられるノードの配置が同じでも最適解は異なる場合がある。そのため直方体の側面上のメトリック TSP の PTAS としてユークリッド TSP の PTAS をそのまま適用することはできない。そこで本

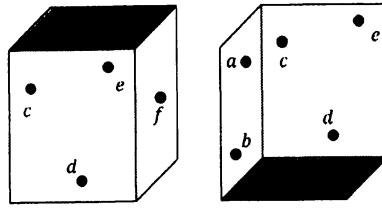


図1 本論文で検討を行う立体.

論文では直方体の側面上のメトリック TSP の PTAS の検討を行った. Arora のアルゴリズムに幾つか変更点を加えることで直方体の側面上のメトリック TSP の PTAS を構成することができた.

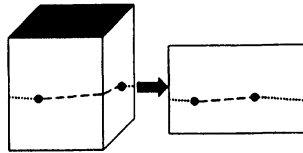


図2 直方体の側面上の TSP におけるノード間の移動経路の例.

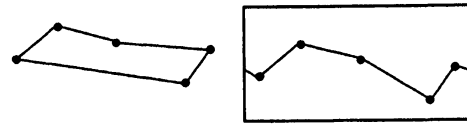


図3 ユークリッド TSP の最適解と直方体の側面上のメトリック TSP の最適解.

2 直方体の側面上のメトリック TSP について

2.1 直方体の側面上のメトリック TSP の定義

直方体の側面上のメトリック TSP を以下のように定義する. インスタンスを直方体の側面上に存在する有限集合 $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ($|V| \geq 3$) と直方体の展開図上の幅の長さ t とし, タスクを V における直方体上の完全グラフのハミルトン閉路 T で長さ $\sum_{\{v,w\} \in E(T)} \|v - w\|_2$ が最小のものとする. 直方体の側面上のメトリック TSP を解くため Arora のアルゴリズム ([2]) を応用する. まず直方体のある部分で展開した 2 次元の展開図を考える. 3 次元で与えられるノードの座標を 2 次元の展開図上の座標に変換することは難しくなく $O(n)$ で計算可能である.

2.2 良い丸め性質

直方体の側面上のメトリック TSP のインスタンスを $V \subseteq \mathbb{R}^3, n$ をノードの個数とする. V が下記のすべての条件を満たすとき良い丸め性質をもつという. ただし $0 < \epsilon < 1$ とする.

- (1) すべての $(v_x, v_y) \in V$ に対して, v_x, v_y は奇整数である.
- (2) 点間の距離は最大で $\frac{64n}{\epsilon} + 16$.
- (3) 点間の距離は少なくとも 8 以上.

議論を簡単にするために以下の命題を考える.

Proposition 2.1 良い丸め性質に限定した直方体の側面上のメトリック TSP に対する近似アルゴリズムがあるとすると一般の直方体の側面上のメトリック TSP に対する近似アルゴリズムが存在する.

Proof. $V \subseteq \mathbb{R}^3$ を有限集合とし、 $n \geq 3$ をノードの個数、 L は完全グラフにおける辺のなかで最大のもの、 $V' = \{(1 + 8\lfloor \frac{8n}{\epsilon L} v_x \rfloor, 1 + 8\lfloor \frac{8n}{\epsilon L} v_y \rfloor) : (v_x, v_y) \in V\}$ とする。 V' が良い丸め性質の (1) と (3) を満たしているのは自明である。ここで v'_x と w'_x のユークリッド距離を求める。

$$\begin{aligned} |v'_x - w'_x| &= 8 \left| \left\lfloor \frac{8n}{\epsilon L} v_x \right\rfloor - \left\lfloor \frac{8n}{\epsilon L} w_x \right\rfloor \right| \\ &\leq \frac{64n}{\epsilon L} (|v_x - w_x| + \frac{\epsilon L}{8n}). \\ \|v' - w'\|_2 &= \sqrt{|v'_x - w'_x|^2 + |v'_y - w'_y|^2} \\ &\leq \frac{64n}{\epsilon L} \sqrt{\|v - w\|_2^2 + \frac{\epsilon L}{4n} 2\|v - w\|_2 + 2(\frac{\epsilon L}{8n})^2} \\ &= \frac{64n}{\epsilon L} \|v - w\|_2 + 16. \end{aligned}$$

$\|v - w\|_2 \leq L$ より $\|v' - w'\|_2 \leq \frac{64n}{\epsilon} + 16$ となる。これより V' は (2) を満たしたため V' は良い丸め性質をもつ。ここで入力を V' 、 $\frac{\epsilon}{2}$ とし存在すると仮定した PTAS を実行する。すると長さ ℓ' が高々 $(1 + \frac{\epsilon}{2})OPT(V')$ のツアー T' が得られる。ここで $v_x = \frac{v'_x - 1}{8} \frac{\epsilon L}{8n} + r_{vx}$, $v_y = \frac{v'_y - 1}{8} \frac{\epsilon L}{8n} + r_{vy}$, $0 \leq r_{vx}, r_{vy} \leq \frac{\epsilon L}{8n}$ が成立するとする。 T' の任意の辺 (v', w') に対して対応する T の辺 (v, w) について考えると

$$\begin{aligned} |v_x - w_x| &= \left| \frac{\epsilon L}{8^2 n} (v'_x - w'_x) + r_{vx} - r_{wx} \right| \\ &\leq \left(\frac{\epsilon L}{8^2 n} |v'_x - w'_x| + |r_{vx} - r_{wx}| \right) \\ &\leq \frac{\epsilon L}{8n} \left(\frac{1}{8} |v'_x - w'_x| + 1 \right). \\ \|v - w\|_2 &= \sqrt{|v_x - w_x|^2 + |v_y - w_y|^2} \\ &\leq \frac{\epsilon L}{8n} \sqrt{\left(\frac{1}{8} |v'_x - w'_x| + 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{8} |v'_y - w'_y| + 1 \right)^2} \\ &\leq \frac{\epsilon L}{8n} \left(\frac{1}{8} \|v' - w'\|_2 + 2 \right). \end{aligned}$$

T' のすべての辺で和をとる。すると ℓ は $\frac{\epsilon L}{8n} (\frac{\ell'}{8} + 2n)$ 以下であることがわかる。さらに $\|v' - w'\|_2 \leq \frac{64n}{\epsilon L} \|v - w\|_2 + 16$ からインスタンス V' の最適値 $OPT(V')$ を求める。

$$\begin{aligned} OPT(V') &\leq \frac{64n}{\epsilon L} OPT(V) + 16n \\ &= 8 \left(\frac{8n}{\epsilon L} OPT(V) + 2n \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{以上より } \ell &\leq \frac{\epsilon L}{8n} (2n + \frac{\ell'}{8}) \\ &= (1 + \frac{\epsilon}{2}) OPT(V) + \frac{\epsilon L}{2} + \frac{\epsilon^2 L}{8}. \end{aligned}$$

$OPT(V) \geq 2L$ より

$$\begin{aligned} \ell &\leq (1 + \frac{\epsilon}{2}) OPT(V) + \frac{\epsilon}{2} OPT(V) + \frac{\epsilon^2}{16} OPT(V) \\ &= (1 + \frac{(12+\epsilon)\epsilon}{16}) OPT(V). \end{aligned}$$

$0 < \epsilon < 1$ なので $\ell \leq (1 + \epsilon) OPT(V)$ が成り立つ。

□

これ以降良い丸め性質をもつインスタンスのみを扱う。

2.3 シフトしたグリッド

与えられた立体をある部分で展開した展開図を考える。すべてのノードが $[0, 2^N] \times [0, 2^N]$ の正方形のなかに存在するように N を定義する。この正方形を正方向格子に分割することを以下のように繰り返す。

$$G_i = X_i \cup Y_i \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

$$X_i = \left\{ [(0, k2^{N-i}), (2^N, k2^{N-i})] \mid k = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1 \right\},$$

$$Y_i = \left\{ [(j2^{N-i}, 0), (j2^{N-i}, 2^N)] \mid j = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1 \right\}.$$

(ただし $[(x, y), (x', y')]$ は (x, y) と (x', y') の間の線分を表す。) またシフトしたグリッドを定義する。 $a, b \in$

$\{0, 2, 4, \dots, 2^N - 2\}$ を偶整数とする.

$$G_i^{(a,b)} = X_i^{(b)} \cup Y_i^{(a)} \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

$$X_i^{(b)} = \left\{ [(0, (b + k2^{N-i}) \bmod 2^N), (2^N, (b + k2^{N-i}) \bmod 2^N)] \mid k = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1 \right\}.$$

$$Y_i^{(a)} = \left\{ [((a + j2^{N-i}) \bmod 2^N, 0), ((a + j2^{N-i}) \bmod 2^N, 2^N)] \mid j = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1 \right\}.$$

グリッドの直線 g は $g \in G_1^{(a,b)}$ のときレベル 1 にあるという. $g \in G_i^{(a,b)} \setminus G_{i-1}^{(a,b)}$ ($i = 2, 3, 4, \dots, N-1$) のときはレベル i にあるという. グリッド $G_i^{(a,b)}$ の領域は $j, k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^i - 1\}$ に対する集合

$$\{(x, y) \in [0, 2^N] \times [0, 2^N] \mid (x - a - j2^{N-i}) \bmod 2^N < 2^{N-i}, (y - b - k2^{N-i}) \bmod 2^N < 2^{N-i}\}.$$

とする. シフトすることによって図 5 のように 1 つの領域が 2 つや 4 つに分割されることがあるがこの場合でも 1 つの領域とみなす. すべてのグリッドの直線は偶数座標であるため、良い丸め性質をもつインスタンスのノードは直線上に必ず存在しない. またすべてのノード間の距離は 8 以上離れているためすべての G_{N-1} である領域は V のノードを高々 1 個しか含まない. ツアー T と G_{N-1} の直線 g に対して T が g を横切る回数を $cr(T, g)$ で表す. 次の命題は有用である.

Proposition 2.2 直方体の側面上のメトリック TSP の良い丸め性質をもつインスタンス V の最適ツアー T に対して $\sum_{g \in G_{N-1}} cr(T, g) \leq OPT(V)$ が成立する.

Proof. T の 1 つの辺を任意に選びその長さを s とする. この辺の水平部分の長さを x 、垂直部分の長さを y とする. よって $s^2 = x^2 + y^2$ が成り立つ. グリッド G_{N-1} の直線は間隔が 2 なのでこの辺は G_{N-1} の直線を高々 $\frac{x}{2} + 1 + \frac{y}{2} + 1$ 回しか横切らない. ここで $x + y \leq \sqrt{2}s$ ($(x - y)^2 \geq 0$ を式変形する) かつ $s \geq 8$ (良い丸め性質をもつため) が成り立つのでこの辺はグリッド G を $\frac{\sqrt{2}}{2}s + 2 \leq s$ 回しか横切らない. T のすべての辺について加えると命題の不等式を得る. $\square$

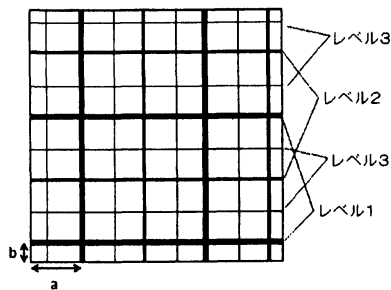


図 4 シフトしたグリッド $G_i^{(a,b)}$.

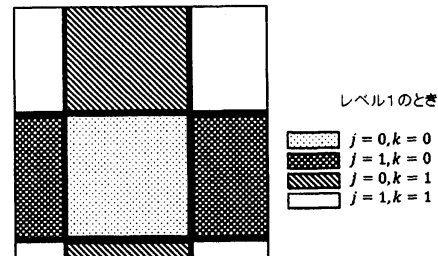


図 5 シフトによって分割された領域の例.

2.4 ポータルとシュタイナーツアー

グリッド上に等間隔に配置する点の集合をポータルと定義する. 具体的には $C = 7 + \lceil \frac{36}{\epsilon} \rceil$, $P = N \lceil \frac{6}{\epsilon} \rceil$ として, $g = [(0, (b + k2^{N-i}) \bmod 2^N), (2^N, (b + k2^{N-i}) \bmod 2^N)]$ がレベル i の水平な直線であればそのポータルの集合を

$$\{((a + \frac{h}{P}2^{N-i}) \bmod 2^N, (b + k2^{N-i}) \bmod 2^N) \mid h = 0, 1, 2, \dots, P2^i\}.$$

と定義する. グリッドの一边は $P+1$ 個のポータルをもつ. 垂直な直線に対しても同様にポータルを定義する. またツアーとグリッドの各直線とのすべての交差がポータルの部分集合となるようなものをシュタイナーツアーという. シュタイナーツアーと各 i と $G_i^{(a,b)}$ の各直線との交差が高々 C 回しかないとき軽いと呼ばれる. シュタイナーツアーを軽いシュタイナーツアーに変形させるために次のパッチング補題を使用する.

Lemma 2.3 (パッチング補題) $V \subset \mathbb{R}^3$ を直方体の側面上のメトリック TSP のインスタンスとし T を V に対するツアーとする. g を V のどの点も含まない長さ z のグリッド上の直線分とする. このとき V に対するツアー T で g との交差が 3 回以上のものを 2 回以下になるように変形した際、ツアーの長さの増加分が高々 $6z$ となる.

Proof. g を垂直な直線分としツアー T が g とちょうど h 回交差したとする. (命題より $h \geq 3$ とする.) g と交差するツアーの辺をそれぞれ $e_1, \dots, e_h$ とし各辺 $e_m (m = 1, 2, \dots, h)$ の上に 2 個ずつ新しい点 $q_m, r_m \in \mathbb{R}^3$ を配置する. ただし辺 $\{q_m, r_m\}$ の長さを 1 とし, q_i は g の左側に r_i は右側に位置する. これによって得られるツアーを T' とする. $u = \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor (h-2 \leq 2u \leq h-1)$ とし T'' を T' から辺 $\{q_1, r_1\}, \dots, \{q_{2u}, r_{2u}\}$ を除去して得られたものとする.

ここで Q は $q_1, \dots, q_h$ を通る最短ツアーと $q_1, \dots, q_{2u}$ の最小コスト完全マッチングからなるとする. 同様に R は $r_1, \dots, r_h$ を通る最短ツアーと $r_1, \dots, r_{2u}$ の最小コスト完全マッチングからなるとする. Q と R のどちらも辺の長さの総和は高々 $3z$ である. このとき $T'' + Q + R$ は g と高々 $h-2u \leq 2$ 回しか交差しない. あとは三角不等式から長さを増やさずに V に対するツアーで g との交差回数が 2 回以下であるツアーを求めることができる. 次に g が水平な直線分である場合について考える. q_i は g の上側に r_i は下側に位置するとし, これ以外は同様におく. この時 Q と R のどちらも辺の長さの総和は高々 $2z$ である. したがってこの補題が成り立つ. $\square$

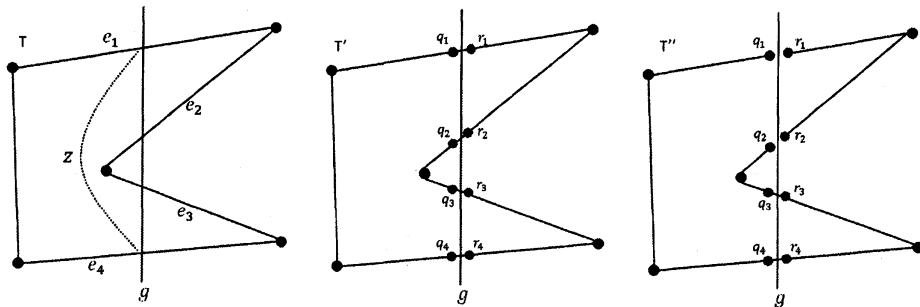


図6 パッチング補題における T, T', T'' の例.

2.5 キーとなる定理と証明

Theorem 2.4 直方体の側面上のメトリック TSP の良い丸め性質をもつインスタンスがあるとする. 与えられた立体をある部分で展開した展開図を考える. $V \subseteq [0, 2^N] \times [0, 2^N]$ を展開図上のインスタンスとする. $C = 7 + \lceil \frac{36}{\epsilon} \rceil, P = N \lceil \frac{6}{\epsilon} \rceil$ とし, 偶整数である a, b が $\{0, 2, \dots, 2^N - 2\}$ からランダムに選ばれるとすると少なくとも $\frac{1}{2}$ の確率で長さが高々 $(1 + \epsilon)OPT(V)$ の軽いシュタイナーツアーが存在する.

Proof. V に対する最適ツアーを T とする. このツアー T と直線 g との交差をシュタイナー点とする. すべてのシュタイナー点をポータル上にくるようにツアーを変形させる. レベル i の直線上のシュタイナー点から最も近いポータルまでの距離は高々 $\frac{2^{N-i-1}}{P}$ である. また f を直線 g がレベル i に存在する確率とすると

$$f(g, i) = \begin{cases} 2^{i-N} & (i > 1) \\ 2^{2-N} & (i = 1) \end{cases}$$

g 上にあるすべてのシュタイナー点をポータルに移動することによるツアーの増加分の期待値は高々

$$\sum_{i=1}^{N-1} f(g, i) \cdot cr(T, g) \cdot 2 \cdot \frac{2^{N-i-1}}{P} = N \cdot \frac{cr(T, g)}{P}$$

ここでシュタイナーツアーを変更して軽くする。以下の手続きを考える。

For $i := N-1$ down to 1 do:

パッチング補題を $G_i^{(a,b)}$ の水平な直線の各線分に適用

パッチング補題を $G_i^{(a,b)}$ の垂直な直線の各線分に適用

パッチング補題を $G_i^{(a,b)}$ の水平な直線の各線分に適用とは具体的に言うと各 $j, k \in \{0, \dots, 2^i - 2\}$ に対して $((a + j2^{N-i}) \bmod 2^N, (b + k2^{N-i}) \bmod 2^N)$ と $((a + (j+1)2^{N-i}) \bmod 2^N, (b + k2^{N-i}) \bmod 2^N)$ の間の各直線分で $C-4$ 回よりも多く交差するものにパッチング補題を適用することである。同様に垂直な直線の各線分にも適用する。ここで注意点がある。水平または垂直な直線は 2 つの分離された部分からなることがありその場合はそれぞれにパッチング補題を適用する。そのため 1 つの直線とツアーとの交差は多くて 4 つになることがある。各直線 g へのパッチング補題の適用の回数は高々 $\frac{cr(T, g)}{C-7}$ である。なぜなら毎回交差の回数が少なくとも $C-7$ 個 (少なくとも $C-3$ 個の交差が高々 4 個に) 減るからである。 $c(g, i, a, b)$ を上記の手続きの反復 i で直線 g に対してパッチング補題が適用された回数の合計とし、任意の直線 g のレベルを $level(g)$ とする。直線 g へのパッチング補題の適用によるツアー長の総増加分は $\sum_{i \geq level(g)} c(g, i, a, b) 6 \cdot 2^{N-i}$ となる。

また $\sum_{i \geq level(g)} c(g, i, a, b) \leq \frac{cr(T, g)}{C-7}$ から上記の手続きによるツアー長の総増加分の期待値は以下の値に収まる。

$$\sum_{j=1}^{N-1} f(g, j) \sum_{i \geq j} c(g, i, a, b) 6 \cdot 2^{N-i} \leq \frac{12cr(T, g)}{C-7}.$$

以上の手続きを行うとツアーと各線分との交差は高々 $C-4$ 回しかない。ここで垂直な直線にパッチング補題を適用した際に新たに水平な直線上に交差が生じる場合を考慮する必要がある。新たに生じる交差は各端点に対して高々 2 個なので各線分に対しては高々 4 個存在する。よって最終的にツアーと各線分との交差は高々 C 個なのでこのツアーは軽いことがわかる。ここでツアー長の増加分の期待値を求めると高々

$$\sum_{g \in G_{N-1}} N \frac{cr(T, g)}{P} + \sum_{g \in G_{N-1}} \frac{12cr(T, g)}{C-6} \leq OPT(V) \left(\frac{N}{P} + \frac{12}{C-6} \right) \leq OPT(V) \frac{\epsilon}{2}.$$

したがってツアー長の増加分が高々 $OPT(V)\epsilon$ である確率は $\frac{1}{2}$ である。 □

3 アルゴリズムについて

入力：直方体の側面上のメトリック TSP の良い丸め性質をもつインスタンス $V \subseteq [0, 2^N] \times [0, 2^N]$ と円周の長さ t と実数 $0 < \epsilon < 1$

出力：最適ツアーの $(1 + \epsilon)$ 倍以内のツアー

このアルゴリズムは動的計画法を使用する。一番小さい領域に関して部分解を求め記憶する。次にレベルをひとつ下げてひと回り大きい領域で部分解を得る。その際に前で求めた部分解を使用する。

3.1 部分問題について

(a) $1 \leq i \leq N-1$ となるグリッド $G_i^{(a,b)}$ の 1 つの領域 r に関して outer edge から任意の偶数個のポータルを選ぶ。もし領域 r に直線 $x = t$ が存在している場合は右側に位置する垂直な直線のポータルを直線 $x = t$ 上に移動しその中から選ぶ。

(b) 領域 r に存在するノードをすべて経由し選んだポータルを始点終点とする経路のなかで移動距離が最短であるものを求める。この経路と移動距離を部分解とする。

(a) で考えられる選びかたすべてに対して (b) の経路を求める。ここで求めた経路を記憶しておき次のレベルでその部分解を使用する。(a) で 4 個以上のポータルを選んだ場合、選んだポータル上の完全グラフの完全マッチングを求める。そのすべてのマッチングに対して (b) を求める。(b) を求めるために inner edges から任意個のポータルを選ぶ。選ばれたポータルに関する 1 つ前で求めた部分解を使用して (b) の経路を求める。

3.2 アルゴリズムについて

1. $\{0, 2, \dots, 2^N - 2\}$ から a と b をランダムに選ぶ。

2. a の位置で展開する。これによって得られる展開図を以後使用する。 $R_0 = \{([0, 2^N] \times [0, 2^N], V)\}$ とする。

3. For $i := 1$ to $N-1$ do:

$G_i^{(a,b)}$ を構成し $R_i := \emptyset$ とする。

For $|V_r| \geq 2$ を満たす各 $(r, V_r) \in R_{i-1}$ do:

$G_i^{(a,b)}$ の 4 つの領域 $r_1, r_2, r_3, r_4 (r_1 \cup r_2 \cup r_3 \cup r_4 = r)$ を構成する。

$(r_1, V_r \cap r_1), (r_2, V_r \cap r_2), (r_3, V_r \cap r_3), (r_4, V_r \cap r_4)$ を R_i に加える。

4. For $i := N-1$ to 1 do:

For 各領域 $r \in R_i$ do:

r に付随する部分問題を以下のようにして解く。

If $|V_r| \leq 1$ then すぐに解ける。

else すでに計算している 4 つの部分領域に対する部分問題の最適解を使う。

5. R_0 の 4 つの部分領域に対する部分問題の最適解を用いて V の最適な軽いシュタイナーツアーを計算する。これを計算するために直線 $[(0, 0), (0, 2^N)], [(2^{N-1}, 0), (2^{N-1}, 2^N)], [(0, b), (2^N, b)], [(0, (b + 2^{N-1}) \bmod 2^N), (2^N, (b + 2^{N-1} \bmod 2^N))]$ から任意の個数のポータルを選ぶ。もし直線 $[(0, 0), (0, 2^N)]$ から点 $(0, x)$ が選ばれた場合は点 (t, x) のポータルも選ぶ。部分解を使用してツアーを求める。

6. シュタイナーツアーのシュタイナー点を除去しツアーを得る。

3.3 計算量について

まず 1 つの領域に存在する部分解の個数を求める。領域 r は 4 つの直線を持つ。各直線はポータルを P 個ずつもつ。それぞれの直線で選ばれたポータルの数を i, j, k, l とする。するとポータルの選び方は $\binom{P}{i} \binom{P}{j} \binom{P}{k} \binom{P}{l}$ 通りある。 $PM(2n)$ を完全グラフ K_{2n} の完全マッチングの個数とすると $PM(2n) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ となる。 $\binom{n}{m} \leq n^m, PM(2n) \leq (2n)!$ より 1 つの領域に存在する部分問題の個数は

$$\sum_{0 \leq i, j, k, l \leq C \text{ かつ } i+j+k+l \text{ は正の偶数}} \binom{P}{i} \binom{P}{j} \binom{P}{k} \binom{P}{l} PM(i+j+k+l).$$

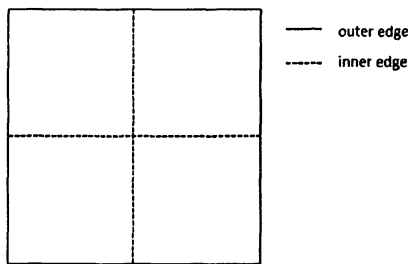


図7 outer edge と inner edge.

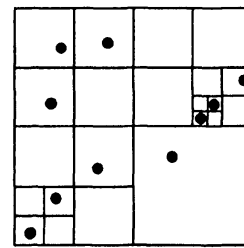


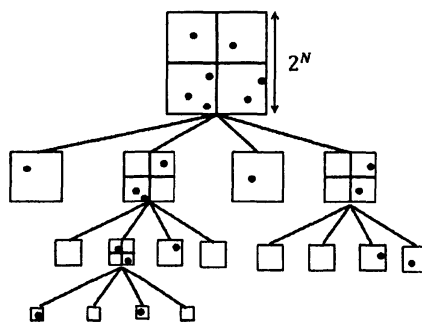
図8 領域の構成の例.

$$\leq (4C)! \left(\sum_{0 \leq i \leq C} \binom{C}{i} P^i \right)^4.$$

二項定理より

$$= (4C)! (P+1)^{4C}.$$

次に1つの部分解を求めるのに必要な計算量を求める. まず inner edge にあるポータルの選び方は同様に $(P+1)^{4C}$ 個ある. 選んだポータルを訪れるすべての可能な順序は高々 $(8C)!$ 個 (inner edge 4本と outer edge 4本から選ばれたポータルの順序) である. 以上より1つの領域ですべて部分解を求めるのに必要な計算量は $O((P+1)^{8C} (4C)! (8C)!)$ である. 次に領域の個数を求める. ここで領域内のノードの個数が一つ以下の場合は定数時間で部分問題が解けるため複数のノードが存在する領域の個数を求める. そこで図9のような有向木 A を考える. 根は R_0 にある領域である. 各領域は $r \in R_i$ は0または4個の子をもつ. S をこの木 A の点で4個の葉を子としてもつものの集合とする. これらの領域の内部同士は互いに素であり, 領域内のノードの数が1個以下になるまで分割を繰り返すため集合 S の各領域はノードを少なくとも2個含んでいる. したがって $|S| \leq \frac{n}{2}$ である. この木 A の深さは N であり A の各点は葉か少なくとも1個の S の祖先なので, 葉でない領域が高々 $N \frac{n}{2}$ 個となり合わせて高々 $\frac{5}{2} Nn$ 個の領域しかない.

図9 有向木 A の例.

$N = O(\log \frac{n}{\epsilon})$ (良い丸め性質 (2) よりすべてのノード間距離が $\frac{64n}{\epsilon} + 16$ に抑えられるため), $C = O(\frac{1}{\epsilon})$, $P = O(\frac{N}{\epsilon})$ より全体の計算量は以下ようになる.

$$O\left(\frac{5}{2} Nn (P+1)^{8C} (8C)^{12C}\right) = O\left(n(\log n)^c\right).$$

ただし $c = O(\frac{1}{\epsilon})$ である。したがってより良い解を得るため ϵ を小さく設定すると計算量が増加する。このアルゴリズムはシフトしたグリッドで使用した a, b のすべての組合せを試すことで決定的アルゴリズムにすることができる。これは計算時間を $O(\frac{n^2}{\epsilon^2})$ 倍するので最終的に以下の計算量が得られる。

$$O(n^3(\log n)^c).$$

4 まとめと今後の課題

本論文では直方体の側面上のメトリック TSP の検討を行った。ユークリッド TSP の PTAS として提案されている Arora のアルゴリズムに幾つか変更点を加えることで PTAS を構成することができた。今後の課題としては直方体上や円柱上のメトリック TSP の PTAS の検討が挙げられる。

参考文献

- [1] Bernhard, K, Jens V.: Combinatorial Optimization. 601-610 (2009)
- [2] Arora, S.: Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. Journal of the ACM 45, 753-782 (1998)
- [3] Arora, S., and Safra, A.: Probabilistic checking of proofs: A new characterization of NP. In Proceedings of the 33rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, Calif., 2-12 (1992)
- [4] Christofides, N.: Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. In symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity, J. F. Traub, ed. Academic Press, Orlando, Fla. 441 (1976)
- [5] Garey, M. R., Graham, R. L., and Johnson, D. S.: Some NP-complete geometric problems. In Proceedings of the 8th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Hershey, Pa., May 3-5). ACM, New York, 10-22 (1976)
- [6] Goemans, M.: Worst-case comparison of valid inequalities for the TSP. Math. Prog 69, 336-349
- Ibarra, O. H., and Kim, C. E. 1975. Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subsets problems. J. ACM22, 4(Oct.)463-468 (1995)
- [7] Karp, R. M.: Reducibility among combinatorial problems. In Complexity of Computer Computations, R.E. Miller and J.W. Thatcher, eds. Advances in Computer Research, Plenum Press, New York, 85-103 (1972)
- [8] Karp, R. M.: Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the TSP in the plane. Math. Oper. Res. 2, 209-224 (1977)
- [9] Mitchell, J. S. B.: Guillotine subdivisions approximate polygonal subdivisions: Part II-A simple PTAS for geometric k-MST, TSP, and related problems (1998)
- [10] Papadimitriou, C. H.: Euclidean TSP is NP-complete. Theoret. Comput. Sci. 4, 237-244 (1977)
- [11] Shmoys, D. B., and Williamson, D. P.: Analyzing the Held-Karp TSP bound: A monotonicity property with application. Inf. Proc. Lett. 35, 281-285 (1990)
- [12] Wolsey, L. A.: Heuristic analysis, liner programming and branch and bound. Math. Prog. Study 13, 121-134 (1980)