

ボーズ・アインシュタイン凝縮の物理

岡山大学大学院自然科学研究科 町田一成

1 序論

1995年に ^{23}Na 、 ^{87}Rb からなるアルカリ原子気体をレーザーと磁場を用いて超低温に冷却し、ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) に MIT と JILA のグループが成功した。その成果に対して 2001 年度のノーベル賞が与えられたことはまだ記憶に新しい。それ以来この分野の理論的、実験的研究の進展は著しいものがある。BEC になった原子種は ^7Li , H , ^4He , ^{41}K , ^{85}Rb が新たに加わり、又 BEC を実現した実験グループは世界で 30 個所以上、国内においても東大、京大、学習院大、電通大と 4 グループを数えるまでになった (最新の情報については <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html/> を参照のこと)。一方でフェルミ粒子系についてもクーパー対形成による超流動実現に向けて ^{40}K , ^6Li 等を用いて着々と到達温度は低下し、現在フェルミ温度の 4 分の 1 程度にまで到達している。

この BEC を用いて様々な実験が実行された。例えば、系の低励起構造、超流動性に係わる実験、二つの BEC の干渉現象、量子渦の生成崩壊等々が挙げられる。また、磁場を用いずに光学トラップだけで気体を冷却することにも成功しており、個々の原子のもっている角運動量 (スピンと以下呼ぶ) を生かしたまま BEC を実現できる。 ^{87}Rb 、 ^{23}Na ではスピンの大きさ F が 1、即ち、 $m_F = 1, 0, -1$ の三つの縮退した状態が同時に BEC になる。磁気トラップでの BEC は一成分の秩序変数で記述されるのに対して、今度は三成分で書かれる。前者は ^4He の、後者は ^3He の超流動に対応した秩序構造になっている。

中性アルカリ原子気体の BEC の特徴を挙げる

- (1) 系は弱く相互作用する希薄ボーズ系であり、ボーズ粒子は剛体球と見なせ、相互作用は散乱長で特徴づけられる。
- (2) 原子物理学の知識により個々の原子の散乱長はかなりよくわかっている。従って、系は調節パラメーターを含まない真に微視的なハミルトニアンで記述される。
- (3) 外部磁場を印可することにより散乱長を変えることが出来、強い斥力系からはじまって弱い斥力系、更には引力系へと同一原子集団を変化させることが可能である。
- (4) 原子ガスは磁気トラップ或いは光トラップによって空間的に閉じ込められている。そのポテンシャルは調和型でよく近似できる。

以上のような特徴を備えた BEC という新たな巨視的量子状態を手にいれたことになる。これを舞台にしてどのような物理を展開するか。ここからは各自の想像力、構想力の世界である。そのための基礎的な理論の枠組みを以下に解説する。この講義録では紙面の都合で要点のみを記す。式の導出等は講義に譲る。

2 調和型トラップ中の自由 ボーズガス

フェルミ系の超流動は本質的に相互作用によって引き起されるのに対して、ボーズ系の凝縮は相互作用なしで起き統計性に起因する現象である。無限に大きな系の自由 ボーズガスの BEC は

学部の授業でも取り上げられる話題である。その復習かたがた調和ポテンシャルに閉じ込められた自由 ボーズガスがどのように振舞うか調べるところから話を始めよう。外部ポテンシャル

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}\omega^2 \mathbf{r}^2 \quad (1)$$

の下での 自由 ボーズガスは固有値 $\epsilon_{n_x n_y n_z} = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})\hbar\omega$ を持ちボーズ分布関数に従って分布する。 N 個のボーズ粒子の基底状態の波動関数は最低一粒子状態 ($n_x = n_y = n_z = 0$) に N 個つめればよい。即ち、 $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \Pi_i \phi_0(\mathbf{r}_i)$ 。ここで

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}\omega^2 \mathbf{r}^2\right). \quad (2)$$

密度の分布は $n(\mathbf{r}) = N|\phi_0(\mathbf{r})|^2$ であり、大きさは N によらず、調和振動子の長さ $a_{ho} = (\frac{\hbar}{m\omega})^{1/2}$ で定まっている。非凝縮相は古典ボルツマン統計に従って分布する、つまり $e^{-\beta V(\mathbf{r})} = e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{r}^2}$ なのでその拡がり R は、 $R = (\frac{2kT}{m\omega^2})^{1/2} = a_{ho}(\frac{kT}{\hbar\omega})^{1/2}$ と見積ることができる。通常は $kT \gg \hbar\omega$ なので、凝縮相より大きく外側に拡がっている。従って今の系は空間的に凝縮が起きていることになる。図1はMITの実験データを示したものである。実線はGP方程式に基づく理論値、破線は自由ボーズガスの計算値である。

調和ポテンシャルに異方性を持たせ、葉巻型なりディスク型なりに閉じ込めると基底波動関数も異方的になり、フーリエ変換して考えると分かるように運動量空間においても異方性が生じる。一方、非凝縮相は高いエネルギー状態に熱的に励起されており、そうした異方性はない。従って、凝縮相と非凝縮相はその異方性において画然と区別される。これが実験で見えた BEC の重要な特色である。

有限温度での系の性質は統計力学に従って次のように定められる。

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_n - \mu)} - 1} \quad (3)$$

$$E = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{\epsilon_n}{e^{\beta(\epsilon_n - \mu)} - 1} \quad (4)$$

$\mu \rightarrow \mu_c = 3\hbar\omega/2$ として、 $n_x = n_y = n_z = 0$ の状態の粒子数を N_0 とすると

$$N - N_0 = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega(n_x + n_y + n_z)} - 1} \quad (5)$$

$N \rightarrow \infty$ の極限では

$$N - N_0 = \zeta(3) \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3 \quad (6)$$

従って、

$$kT_c = \hbar\omega \left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3} \sim 0.94\hbar\omega N^{1/3} \quad (7)$$

但し $kT \ll \hbar\omega$ とした。凝縮相の割合は

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \quad (8)$$

エネルギーは

$$\frac{E}{NkT_c} = \frac{3\zeta(4)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^4. \quad (9)$$

これらの表式は三次元の無限系のよく知られた結果、

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

$$kT_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left[\frac{n}{\zeta(\frac{3}{2})} \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (n \equiv N/V) \quad (11)$$

$$\frac{E}{NkT_c} = \frac{3\zeta(5)}{2\zeta(\frac{3}{2})} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (12)$$

と対比すべきものである。

実際の実験では $\omega \sim \text{Hz}$, $N = 40000$ に対して $T_c \sim 300\text{nK}$ となり、上の計算をよく再現している。しかし N は有限であるため転移は理論程にはシャープではない。図2は JILA のデータであり、破線は (8) 式である。また精密に N_0/N を見積ると有限サイズ効果によるずれが見える。

2.1 次元性

Hohenberg の定理により一、二次元では熱ゆらぎのため有限温度で BEC は起きない。これは運動量分布 $n(p) \propto \int d^d p / (e^{\beta p^2/2m} - 1)$ の赤外発散に由来する。一様自由ガスでは状態密度 $\rho(\epsilon) \propto \epsilon^{(d-2)/2}$ (d は次元性) なのに対して、調和ポテンシャル系では $\rho(\epsilon) \sim \epsilon^{d-1}$ となり $d = 2$ 以下でその発散はおきないので有限の相転移が定まる。即ち、 $kT_{2D} = \hbar\omega [\frac{N}{\zeta(2)}]^{1/2}$ である。

2.2 コヒーレンス長

系の長さの特徴づける重要な量としてコヒーレンス長 ξ がある。これは運動エネルギー項 $\hbar^2/2m\xi^2$ と相互作用エネルギー $\sim 4\pi\hbar^2 a n/m$ とを等値すると、 $\xi = (8\pi n a)^{-1/2}$ と求まる。凝縮相が空間変化する際に、その特徴的長さとして現れる。量子渦のコアの大きさの目安を与える。

2.3 引力系

以下では専ら斥力系を議論するが、 ^7Li のような引力系も存在する。この系はある臨界個数以上になると運動エネルギーからの量子的な圧力では、もはや系を安定に保つことができなくなり、ついには爆発崩壊してしまう。実験的にも宇宙のスーパノバに対応するようなボーズノバとよばれる現象が観測されている。

3 ボゴリューボフ理論

N 個の相互作用をするボーズ系のハミルトニアンは

$$H = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ho} \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \quad (13)$$

で与えられる。 $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ は二体相互作用であり、今の場合、よい近似で $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ で与えられる。ここで散乱長 a は $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ で g と結びついている。 ^{23}Na では $a = 2.75\text{nm}$ 、 ^{87}Rb では $a = 5.77\text{nm}$ で斥力系、 ^7Li では $a = -1.45\text{nm}$ で引力系であることが知られている。

場の演算子を $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ と一粒子波動関数 Ψ_{α} で展開する。ここで a_{α} は α 状態の消滅演算子であり、

$$[a_{\alpha}, a_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_{\alpha}, a_{\beta}] = 0, \quad [a_{\alpha}^{\dagger}, a_{\beta}^{\dagger}] = 0 \quad (14)$$

を満足するボーズ演算子である。ボーズ・アインシュタイン凝縮を基底状態 $\alpha = 0$ に巨視的な数 N_0 が存在する状態と考えるのがボゴリューボフ理論の基本的なアイデアである。熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で N_0/N は有限とする。その際、演算子を $a_0 = a_0^{\dagger} = \sqrt{N_0}$ となる c -数と見なす。一様系では運動量ゼロ状態が基底状態なので $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{N_0}{V}} + \psi(\mathbf{r})$ と書き換えられ $\psi(\mathbf{r})$ は小さな摂動として扱う。

非一様で時間変化がある系への拡張は $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)$ とする。ここで $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$ は位相の定まった複素関数である。従って、ゲージ対称性が破れていることがこの系の特徴となる。 $n_0(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2$ である。

なぜ単一の基底状態のみが巨視的な数 n_0 で占有されるのか。いくつかの状態に分けあってもよいではないかという疑問が湧くかもしれない (fragmentation の問題)。Nozieres の議論にしたがうと、分割すると交換相互作用エネルギー分だけ全体のエネルギーが上昇しそれは得ではないことが証明できる。

$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ の運動方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), H] \quad (15)$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ho}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

となり、 $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ とすると、凝縮相の波動関数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ に対する運動方程式は次のようになる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (17)$$

この方程式は Gross-Pitaevskii (GP) 方程式とよばれ、希薄ボーズ系の基底状態を記述する基本式である。この方程式は次のエネルギー汎関数

$$E[\Phi] = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi|^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) |\Phi|^2 + \frac{g}{2} |\Phi|^4 \right] \quad (18)$$

の変分

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta E}{\delta \Phi^*} \quad (19)$$

としても得られる。ガスパラメーター $|a|^3 \bar{n} \ll 1$ が希薄ボーズガス或いは弱い相互作用系の条件となる。 $\bar{n}$ は空間平均したガスの密度である。 $a = 2.75\text{nm}$ (^{23}Na) に対して通常の実験は $10^{13} \sim 10^{15} \text{cm}^{-3}$ なのでガスパラメーターは $\bar{n} a^3 \leq 10^{-3}$ である。

相互作用のエネルギーは $\sim g N \bar{n} = g N \frac{N}{a_{ho}^3} \propto |a| \frac{N^2}{a_{ho}^3}$ また運動エネルギーは $N \hbar \omega_{ho} \sim \frac{N}{a_{ho}^2}$ とそれぞれ見積ることができる。したがって、それらの比は

$$\frac{E_{int}}{E_{kin}} \sim |a| \frac{N^2}{a_{ho}^3} \frac{a_{ho}^2}{N} = \frac{N|a|}{a_{ho}}. \quad (20)$$

$\bar{n}|a|^3 \ll 1$ の希薄ガスであっても (20) 式の比は 1 より大きくなることもあり、相互作用は無視できないことがあり得る。実際 JILA の 1995 年の実験では $|a|/a_{ho} \sim 7 \times 10^{-3}$, $N \sim 10^4$ なので $\frac{N|a|}{a_{ho}} \geq 1$ である。MIT の実験では $10^3 \sim 10^4$ である。

3.1 基底状態

μ を化学ポテンシャルとして $\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$ とおくと GP 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ho}(\mathbf{r}) + g\phi(\mathbf{r}, t)^2\right]\phi(\mathbf{r}, t) = \mu\phi(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

但し、 $\int d\mathbf{r}\phi^2(\mathbf{r}) = N_0 = N$ 。これは非線形 Schrödinger 方程式の形をしており、非線形性は相互作用項 $\propto gn(\mathbf{r}) = g\phi^2(\mathbf{r})$ によって生じる。 $-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ho}(\mathbf{r})$ の部分は調和振動子の一粒子演算子であり、基底状態 Gauss 関数 $\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\phi_0(\mathbf{r})$ である。(2) 式を $Na/a_{ho} = 1, 10, 100$ の場合に対して計算した結果を図 3 に示した。比較のため自由ボーズガスの結果を破線で示した。

3.2 トマス・フェルミ近似

斥力系で、しかも $Na/a_{ho} \gg 1$ の場合、運動エネルギー項は無視できる。その時、密度分布は

$$n(\mathbf{r}) = \phi^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{g}[\mu - V_{ho}(\mathbf{r})] \quad \text{for } \mu \geq V_{ho}(\mathbf{r}) \quad (22)$$

$$n(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{outside} \quad (23)$$

と書ける。全粒子数についての $\int d\mathbf{r}\phi^2(\mathbf{r}) = N$ の条件を用いると $\mu = \frac{\hbar\omega_{ho}}{2} \left(\frac{15Na}{a_{ho}}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{\partial E}{\partial N}$ 。これから

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{7}\mu \propto N^{\frac{2}{5}} \quad (24)$$

このエネルギーの N についての冪則は実際の実験で観測されている。粒子の空間分布は $n(\mathbf{r}) = \frac{1}{g}(\mu - V_{ho})$ で与えられるので調和型の場合は逆放物線の形になり、その拡がり $R = a_{ho} \left(\frac{15Na}{a_{ho}}\right)^{\frac{1}{5}}$ で与えられる。 N が大きくなるにつれ、系の半径 R も大になる。

3.3 Bogoliubov 変換と励起スペクトル

$\phi(\mathbf{r})$ と $\psi(\mathbf{r})$ とで Hamiltonian(16) 式を書き直す。

$$\begin{aligned} H = & \int d\mathbf{r}[\phi^*(\mathbf{r})h(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}g|\phi(\mathbf{r})|^4] \\ & + \int d\mathbf{r}[\psi^\dagger(\mathbf{r})h(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + g\psi^\dagger(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})] + h.c. \\ & + \int d\mathbf{r}[\psi^\dagger(\mathbf{r})h(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \\ & + g(2\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r})) \\ & + \int d\mathbf{r}[g\{\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r}) + \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\}] \quad (25) \end{aligned}$$

ここで $h(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ho}(\mathbf{r}) - \mu$ は一体の Hamiltonian である. $\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = 2\rho(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$, $\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = 4\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})$ (ここで $\rho(\mathbf{r}) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \rangle$ は非凝縮体の密度) と近似すると

$$\begin{aligned} H = & \int d\mathbf{r} [\phi^*(\mathbf{r})h(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}g|\phi(\mathbf{r})|^4] \\ & + \int d\mathbf{r} [\psi^\dagger(\mathbf{r})(h(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + g\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + 2g\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})) + h.c.] \\ & + \int d\mathbf{r} [\psi^\dagger(\mathbf{r})h(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + g\{2\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})(\rho(\mathbf{r}) + \phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})) \\ & + \frac{1}{2}\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r}))\}] \end{aligned} \quad (26)$$

と書き直すことができる. この Hamiltonian を対角化するために Bogoliubov 変換

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_q [u_q(\mathbf{r})\eta_q - v_q(\mathbf{r})\eta_q^\dagger] \quad (27)$$

を施す. ここで q は励起粒子の量子数である. 固有値 E_q をつかって Hamiltonian は対角化された形

$$H = E_0 + \sum_q E_q \eta_q^\dagger \eta_q \quad (28)$$

に書ける. そのための条件として

$$h(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2\phi(\mathbf{r}) + 2g\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (29)$$

が得られ, これは先の GP 方程式 (21) を非凝縮成分 $\rho(\mathbf{r}) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \rangle$ を考慮して拡張した形式になっている. また対角化の条件として

$$[h(\mathbf{r}) + 2g\rho(\mathbf{r}) + 2g\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})]u_q(\mathbf{r}) - g\phi(\mathbf{r})^2v_q(\mathbf{r}) = E_q u_q(\mathbf{r}) \quad (30)$$

$$[h(\mathbf{r}) + 2g\rho(\mathbf{r}) + 2g\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})]v_q(\mathbf{r}) - g\phi^*(\mathbf{r})^2u_q(\mathbf{r}) = -E_q v_q(\mathbf{r}). \quad (31)$$

が得られる. この固有値方程式を解けば固有関数 $u_q(\mathbf{r})$, $v_q(\mathbf{r})$ と固有値 E_q が求まる. ただし, 固有関数は正規化条件

$$\int \{u_q^*(\mathbf{r})u_q(\mathbf{r}) - v_q^*(\mathbf{r})v_q(\mathbf{r})\} d\mathbf{r} = \delta_{p,q} \quad (32)$$

を満足していなければならない. 非凝縮成分の密度は

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \rangle = & \sum_q [u_q^*(\mathbf{r})u_q(\mathbf{r}) + v_q^*(\mathbf{r})v_q(\mathbf{r})] f(E_q) \\ & + \sum_q v_q^*(\mathbf{r})v_q(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (33)$$

から決定できる. 全粒子数の密度は

$$\langle \bar{n}(\mathbf{r}) \rangle = |\phi(\mathbf{r})|^2 + \rho(\mathbf{r}) \quad (34)$$

である. $f(E_q)$ はボーズ分布関数である. 上の一式の方程式 (29), (30), (31) は閉じた自己無撞着な方程式群を構成する.

この一連の近似理論は Hartree-Fock-Bogoliubov 理論とよばれ, 上のように anomalous 平均 $\Delta(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \rangle$ を無視している Popov 近似とも言われている. 更に上で $\rho(\mathbf{r}) = 0$ にする

近似もあり得て、これを Bogoliubov 近似という。これらの近似理論の得失については議論のあるところでいくつかの問題が存在する。

(1) $\Delta(r)$ を取り込んだ Hartree-Fock-Bogoliubov 理論では一様無限系の励起スペクトルがギャップを持ち Hugenholtz-Pines の定理に反する。

(2) その点 Popov 近似は gapless 理論になっており、低励起のスペクトルは正しく Bogoliubov spectrum として知られる励起構造を示す。即ち、

$$E^B(k) = \sqrt{\epsilon(k)^2 + 2\epsilon(k)n_0g}. \quad (35)$$

自由粒子のエネルギーは $\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ であり、 k は波数である。このスペクトルは長波長極限で phonon spectrum

$$E^B(k) \sim \hbar ck \quad \text{for } k \rightarrow 0 \quad (36)$$

ここで音速 $c = \sqrt{\frac{n_0g}{m}}$ を与え、短波長極限で $E^B(k) \sim \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ($k \rightarrow \infty$) となり一粒子の個別励起スペクトルになる。

(3) Bogoliubov 近似は非凝縮成分を無視しており、 $T=0$ での近似理論となっている。

(4) いずれの近似も凝縮相が巨視的数であるという近似に立脚しており、転移点近傍では破綻する。したがっていずれの意味でも完全に満足にいく近似理論は今のところ存在しない。現在でもそれを乗り越えようとする提案がなされている。

(5) しかし、全般的に見て Hartree-Fock-Bogoliubov の理論的枠組みは今問題にしているアルカリ原子気体の BEC 現象をよく記述できているといえる。

(6) 先の固有値方程式 (30)、(31) は超伝導の理論においても出てくる Bogoliubov-de Gennes 方程式と同型になっている。ただし、超伝導のようなフェルミ粒子系においては Bogoliubov-de Gennes 方程式は Fermionic な励起を記述するのに対して、現在のボーズ系の場合は系の重心運動を記述する。前者が個別励起を、後者は集団励起を記述している。したがって、フェルミ粒子系では集団励起を調べるためには別の方程式が必要になる。

3.4 量子渦

BEC 系を回転させるとある回転角速度以上になると渦が形成される。通常の流体では粘性のためにこの渦はすぐに崩壊してしまうが、超流体では渦は安定に存在しうる。渦の性質は個々の超流体の様子を正確に反映するのでそれを調べることでより超流体そのものを深く理解するための手段となる。超伝導体では渦の振舞いが臨界電流等を決定するので応用上からも重要である。個々の超流体によらない渦一般の性質は「量子渦の物理」として一つの学問分野を形成している。

数年前に BEC においても渦が観測された。一番単純な渦の生成法は光学スプーンで葉巻型の系をかき回し、回転を与えることである。実際、ENS ではこうして渦を生成し、いろいろは実験をおこなった。例えば渦一本が発生するための臨界角速度の問題、多数の渦がどう配列するか渦格子の問題、高回転域での BEC 崩壊の問題等々興味ある問題がある。一部は解決し、一部は未解決である。講義では GP 方程式を含む Bogoliubov 理論に基づいて量子渦の記述法について解説したい。

4 スピノール BEC

磁場によらず、光学トラップで BEC をつくと個々の原子の持っている内部自由度を生かしたままの凝縮相が実現する。 ^{23}Na や ^{87}Rb では hyperfine 状態 $F = 1$ の BEC が実現しており $m_F = 1, 0, -1$ の縮退した三成分が同時に存在する。したがって、秩序変数は三成分が必要となる。このようなスピノール BEC は超流動 ^3He や重い電子系の超伝導体 UPt_3 等の triplet 対の超伝導と似た数学的構造をもつ。その意味でそれらと共通の物理的側面と物理としての一般性を有しており興味深い研究対象である。以下 $F = 1$ の場合をとり上げてその定式化を示す。

三つのスピン成分に応じた場の演算子 $\hat{\Psi} = (\hat{\psi}_x, \hat{\psi}_y, \hat{\psi}_z)$ をまず導入する。スピン空間での回転対称性とゲージ対称性の要請から Hamiltonian は次のように書ける。

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\sum_{i,j} \hat{\psi}_i^\dagger \{h(\mathbf{r}) - \mu_i\} \hat{\psi}_j \delta_{ij} + \frac{g_n}{2} \sum_{i,j} \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_j^\dagger \hat{\psi}_j \hat{\psi}_i \right. \\ \left. + \frac{g_s}{2} \sum_{\alpha} \sum_{ijkl} \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_j^\dagger (F_{\alpha})_{ik} (F_{\alpha})_{jl} \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \right] \quad (37)$$

ここで 相互作用定数は $g_n = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \cdot \frac{a_0+2a_2}{3}$ と $g_s = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \cdot \frac{a_2-a_0}{3}$ である。これは 相互作用項を

$$g_n \hat{n} \cdot \hat{n} + g_s \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \quad (38)$$

と書いてみるとわかるように密度とスピンのチャンネルの相互作用である。ただし、 $\hat{n} = \hat{\psi}_\alpha^\dagger \hat{\psi}_\alpha$ であり、 $\hat{\mathbf{S}}_i = \hat{\psi}_i^\dagger \mathbf{F}_i \hat{\psi}_i$ である。 $(\mathbf{F}_i)$ は 3×3 のスピン行列である。) 二つの散乱長 a_0 と a_2 はそれぞれに粒子が散乱する際に全スピンの場合と 2 と場合とに対応している。

$g_s > 0$ ($g_s < 0$) を反強磁性 (強磁性) 相互作用といい ^{23}Na は前者に ^{87}Rb は後者にあたっていると考えられている。この Hamiltonian に対して以前の一成分スカラー秩序変数の場合におこなったのと同様の手順で三成分に対する Bogoliubov 理論を展開できる。 $\phi_i = \langle \hat{\psi}_i \rangle$ で秩序変数を導入すると次の拡張された GP 方程式を導くことができる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi_j = \{h(\mathbf{r}) + g_n \sum_k |\phi_k|^2\} \phi_j + g_s \sum_{\alpha} \sum_{kl} (F_{\alpha})_{ij} (F_{\alpha})_{kl} \phi_k^* \phi_l \phi_j \quad (39)$$

全粒子数は $N = \int d\mathbf{r} \sum_j |\phi_j|^2$ で与えられる。スピン相互作用項は $-g_s |2\phi_1 \phi_{-1} - \phi_0|^2$ (但し、 $1, 0, -1$ は z 軸に量子化軸を選んだ表記) と書き直せるので $g_s > 0$ では $\Phi = (\phi_1, \phi_0, \phi_{-1})$ において $\Phi = (0, 1, 0)$ とするとエネルギーが下がる。この状態を polar 状態といい、反強磁性相互作用の場合の基底状態になっている。 $g_s < 0$ の強磁性相互作用の場合は $\Phi = (1, 0, 0)$ であり、文字どおりスピンの上向き成分に全ての粒子がなっている状態が安定になる。

これらの基底状態からの小さなゆらぎ、即ち集団モードを記述することは前と同様にできる。音波励起以外にスピン波の励起も当然のことながら存在する。この内部自由度を持ったスピノール BEC の量子渦も調べられておりその自由度に応じた多種多様な渦が実現することが期待されている。

参考文献

- [1] A.J. Leggett, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 307.
- [2] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. 71 (1999) 463.
- [3] T. Ohmi and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn., 67 (1998) 1822.
- [4] T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 742.
- [5] 最も最近の筆者の論文であり、それ以前の論文についてはこれを参照のこと. T. Mizushima, K. Machida and T. Kita, cond-mat/0203242.

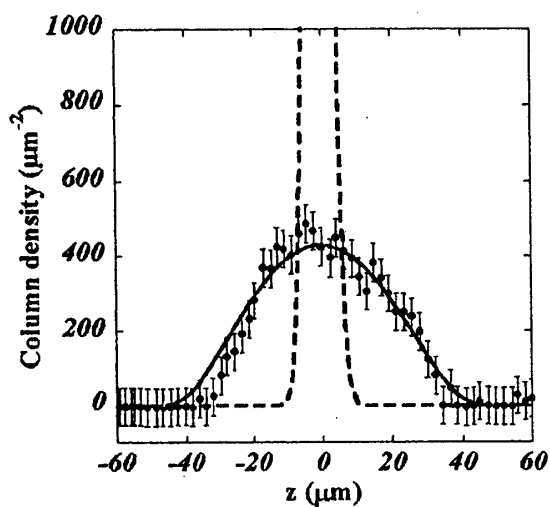


図 1

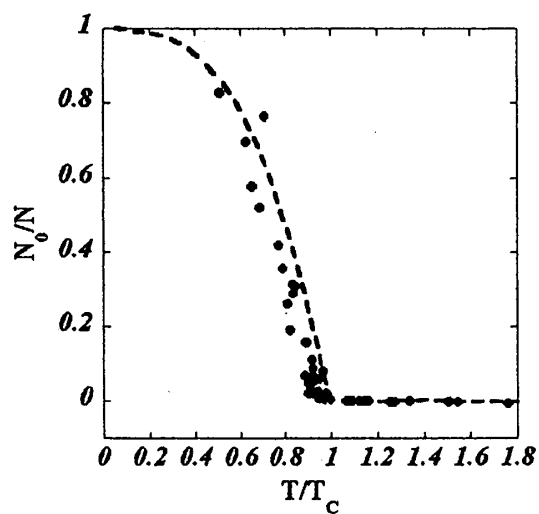


図 2

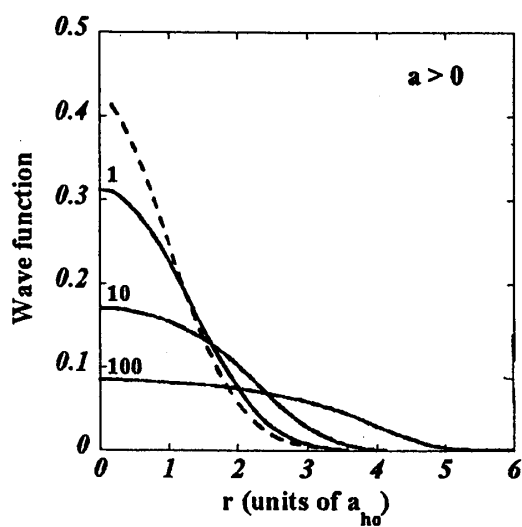


図 3