

# 静力学的に導かれた高・中額領域の分布関数<sup>1</sup>

金沢学院大学 経営情報学部 石川 温<sup>2</sup>

2002 年と 2003 年における日本企業の利益データを使い、中額利益領域における非-Gibrat 則を特定した。中額領域で成立する非-Gibrat 則、高額領域で成立する Gibrat 則、そして全領域で成立する詳細釣合則を組み合わせることにより、高・中額領域の利益分布関数を静力学的に導いた。得られた分布曲線は、フィッティングパラメータ無しに実データを高い精度でトレースする。

## 1 Introduction

資産・所得・利益・売上などの経済量が、ある閾値  $x_0$  以上の高額領域でベキ分布

$$N(> x) \propto x^{-\mu} \quad \text{for } x > x_0 \quad (1)$$

に従うことは Pareto 則として知られている [2]。ここで  $N(> x)$  は  $x$  に対する累積数を表し、 $\mu$  は Pareto 指数と呼ばれている。この領域に属する個人や企業は全体の数パーセントであるものの、それらの資産・所得・利益・売上などは全体の大部分を占める。

最近、この Pareto 則と Pareto 指数が詳細釣合則： $P_{12}(x_1, x_2) = P_{12}(x_2, x_1)$  と Gibrat 則 [3]： $Q(R|x_1) = Q(R)$  から導かれることが示された [4, 5]。ここで  $x_1, x_2$  は連続する 2 年の所得・利益・売上などであり、また  $P_{12}(x_1, x_2)$  はその結合確率分布関数である。また  $R$  は  $x_2/x_1$  で定義される成長率、 $Q(R|x_1)$  は条件付き確率である。詳細釣合則と Gibrat 則は共に、Pareto 則と同じく実データ中に見られる経験則である。詳細釣合則は経済状態が安定している時期に観測され、また Gibrat 則は高額領域で成立すると考えられている [6, 7]。特定のモデルを仮定すること無しに、これら経験則の間の密接な関係が示されたことは非常に重要である。

一方、閾値  $x_0$  以下では Pareto 則は観測されない [8]。大部分の個人や企業はこの領域に属するため、高額領域の Pareto 則の研究と同じくらい中額領域の研究は重要である。しかし、その分布関数を定める明確な指針は未だ定まっておらず、実データとのフィッティングによって分布関数の良し悪しを判定している段階に留まっている。

本報告では、2002 年と 2003 年における日本企業の利益データ  $x_1, x_2$  [9] を使い、まず中額利益領域における非-Gibrat 則を特定する。さらに中額領域で成立する非-Gibrat 則、高額領域で成立する Gibrat 則、そして全領域で成立する詳細釣合則を組み合わせ、高・中額領域の利益分布関数を静力学的に導く。

<sup>1</sup>この原稿は、文献 [1] に基づいて書かれている。

<sup>2</sup>E-mail: ishikawa@kanazawa-gu.ac.jp

## 2 Gibrat 則と非-Gibrat 則

まずデータベースに含まれる  $x_1 > 0$  かつ  $x_2 > 0$  を満たす全ての企業 132,499 社を、2002 年の利益  $x_1$  に関して対数的に等しい 15 つのビンに分類する： $x_1 \in 4 \times [10^{2+0.2(n-1)}, 10^{2+0.2n}]$  ( $n = 1, \dots, 15$ )。ここで、 $\log_{10} q(r|x_1) = c \mp t_{\pm}(x_1)$   $r$  と線形近似して（複号は  $r > 0$ ,  $r < 0$ ）各  $n$  に対して  $t_{\pm}(x_1)$  を求めると、図 1 が得られる。 $r$  は成長率  $R$  の常用対数  $\log_{10} R$ ,  $q(r|x_1)$  はその条件付き確率密度である。

図 1 の第一次近似として、 $t_{\pm}(x_1)$  を

$$t_{\pm}(x_1) = t_{\pm}(x_0) \pm \alpha_{\pm} \ln \frac{x_1}{x_0}, \quad (2)$$

と表現する。まず、 $n = 13, 14, 15$  に対応する  $x_1 > x_0$  ( $= 4 \times 10^{2+0.2(13-1)}$  千円  $\sim$  1 億円) では  $\alpha_+ \sim \alpha_- \sim 0$  となり、高額領域の Gibrat 則： $q(r|x_1) = q(r)$  が確認できる。さらに反射則 [4] より、 $\mu = t_+(x_0) - t_-(x_0)$  が示せる [5]。一方、誤差の大きな  $n = 1, 2$  を省くと、 $x_{\min} < x_1 < x_0$  にて  $\alpha_+ \sim \alpha_- \sim 0.27$  ( $x_{\min} = 4 \times 10^{2+0.2(4-1)}$  千円  $\sim$  160 万円) となる。これを中額領域における非-Gibrat 則、高額領域の Gibrat 則とまとめた (2) 式を拡張 Gibrat 則と呼ぶ。

## 3 高・中額領域における利益分布

成長率  $R$ , 条件付き確率  $Q(R|x_1)$  を使うと、詳細釣合則は  $P(x_1)/P(x_2) = Q(R^{-1}|x_2)/(R Q(R|x_1))$  と変形できる。さらに、確率密度の関係： $\log_{10} Q(R|x_1) + r + \log_{10}(\ln 10) = \log_{10} q(r|x_1)$  および  $\log_{10} q(r|x_1)$  の線形近似を使うと、 $P(x_1)/P(x_2) = R^{\pm t_{\pm}(x_1) \mp t_{\mp}(x_2) + 1}$  と書き直せる。

この詳細釣合則と拡張 Gibrat 則 (2) を組み合わせると、

$$\frac{P(x_1)}{P(x_2)} = R^{\mu+1+\alpha_{\pm} \ln \frac{x_1}{x_0} + \alpha_{\mp} \ln \frac{x_2}{x_0}} \quad (3)$$

となる。この式を  $R = 1$  の周りで展開して成立する微分方程式の解として

$$P(x) = Cx^{-(\mu+1)} e^{-\alpha \ln^2 \frac{x}{x_0}} \quad (4)$$

が得られる。 $x_1$  を  $x$  と書き、 $(\alpha_+ + \alpha_-)/2$  をまとめて  $\alpha$  とした。この解は、 $R = 1$  の近傍で正しいことしか保障されない。しかしここで、非常に大きな  $R$  でない限り（あるいは非常に小さな  $R$  でない限り）分布関数 (4) は近似的に正しいと仮定する。その正しさは、導かれる結果で確認する。

分布関数 (4) と実データとの整合性を検討するのに、データのばらつきを抑えるため、次の累積分布を調べる：

$$N_H(> x) = N(> x_0) \int_x^{\infty} dt P(t) = N(> x_0) \left( \frac{x}{x_0} \right)^{-\mu}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} N_M(> x) &= \{N(> x_{\min}) - N(> x_0)\} \int_x^{x_0} dt P(t) + N(> x_0) \\ &= \{N(> x_{\min}) - N(> x_0)\} \frac{\text{Erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{\mu+2\alpha \ln \frac{x}{x_0}}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{\text{Erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{\mu+2\alpha \ln \frac{x_{\min}}{x_0}}{2\sqrt{\alpha}}\right)} + N(> x_0). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $N_H(> x)$  は高額領域  $x > x_0$  の、 $N_M(> x)$  は中額領域  $x_{\min} < x_1 < x_0$  の分布関数である。また  $\text{Erf}(x)$  は  $2 \int_0^x e^{-t^2} dt / \sqrt{\pi}$  で定義される誤差関数である。

図 2 より、累積分布関数 (5), (6) が実データに精度よく一致していることが分かる。これにより、累積分布関数を得るためにおいた幾つかの仮定は、この範囲では正しいと考えられる。

## 4 Conclusion

本報告では、2002 年と 2003 年の日本企業の利益データを含むデータベースを利用し、詳細釣合則と拡張 Gibrat 則から高・中額領域の利益分布関数を統一的に導けることを示した。

その分布関数は、高額領域ではベキ則 (Pareto 則) に従い、中額領域では対数正規分布

$$P(x) = Cx^{-1} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{x}{\bar{x}} \right] \quad (7)$$

に似た形になる。ここで、 $\bar{x}$  は  $x$  の平均、 $\sigma^2$  は分散である。ただし、分布関数 (4) に含まれる  $\mu, \alpha, x_0, x_{\min}$  はデータフィッティングに使われるパラメータではなく、拡張 Gibrat 則であらかじめ決定されている量である。つまり分布関数 (4) には、実データに当てはめて調整するフィッティングパラメータの曖昧な任意性は無い。それらは、分布関数を導く基本的なメカニズムである拡張 Gibrat 則で既に与えられているのである。

本報告で利用した企業利益データでは、中額領域の分布関数が対数正規タイプになったが、他のデータに対しても同様の分布関数になるとは限らない。中額領域に関しては、今回得られた (2) 式とは違う形の拡張 Gibrat 則が得られる可能性もある。しかしその場合でも、本報告と同じ道筋をたどれば、異なる拡張 Gibrat 則が分布関数 (4) に対応する分布関数を導くと考えられる。

## 参考文献

- [1] A. Ishikawa, physics/0508178, to appear in Physica A.
- [2] V. Pareto, Cours d'Economie Politique, Macmillan, London, 1897.
- [3] R. Gibrat, Les inegalites economiques, Paris, Sirey, 1932.
- [4] Y. Fujiwara, W. Souma, H. Aoyama, T. Kaizoji and M. Aoki, Physica A321 (2003) 598.
- [5] A. Ishikawa, physics/0506066, to appear in Physica A.
- [6] M.H.R. Stanley, L.A.N. Amaral, S.V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M.A. Salinger and H.E. Stanley, Nature 379 (1996) 804.
- [7] H. Aoyama, WEHIA 2004; H. Aoyama, Y. Fujiwara and W. Souma, The Physical Society of Japan 2004 Autumn Meeting.

- [8] W.W. Badger, in: B.J. West (Ed.), Mathematical Models as a Tool for the Social Science, Gordon and Breach, New York, 1980, p. 87; E.W. Montril and M.F. Shlesinger, J. Stat. Phys. 32 (1983) 209.
- [9] TOKYO SHOKO RESEARCH, LTD., <http://www.tsr-net.co.jp/>.
- [10] G.K. Gipf, Human Behavior and the Principle of Least Effort, Addison-Wesley, Cambridge, 1949.

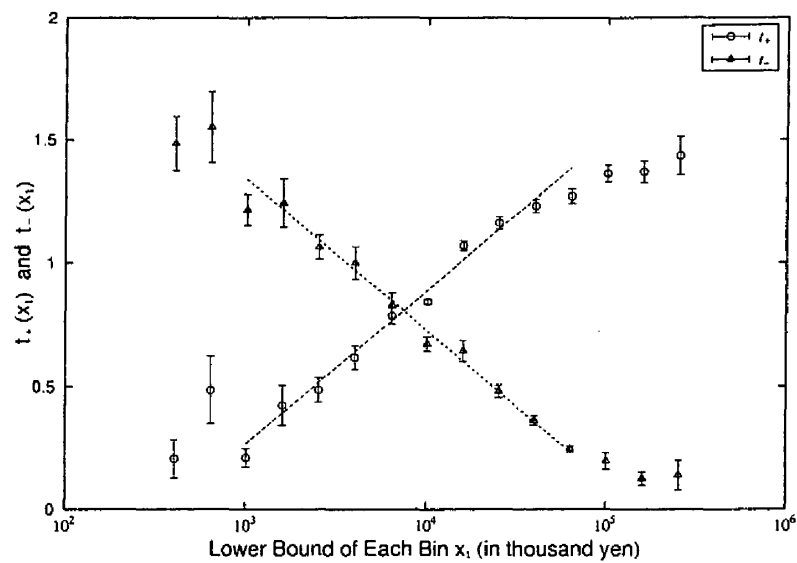


図 1: 各ビンの下限  $x_1$  と  $t_{\pm}(x_1)$  の関係。データは左から順に  $n = 1, 2, \dots, 15$ 。

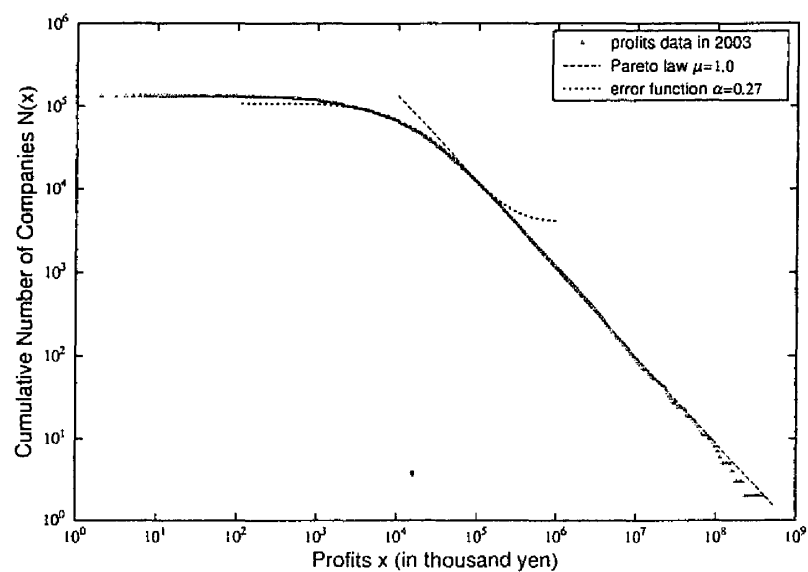


図 2: 詳細釣合則と拡張 Gibrat 則から得られた分布関数と実データ。