

ウェーブレットを用いた熱対流乱流の局所性解析

京大・理・物理 飯間 信, 藤 定義

平成8年 10月 21日

第1章 はじめに

本研究は、乱流のカスケード過程に対する普遍性、特にその空間的、スケールの局所性について、熱対流乱流を対象とし、ウェーブレットを手段として、研究したものである。

3次元乱流におけるエネルギーカスケードの描像は、コルモゴロフ理論の直接の仮定である。これは平均エネルギー散逸率 ϵ を通して各種のスケーリングを導いていることから分かるように、乱流を理解する上で極めて重要な過程である。一方熱対流乱流においては、エネルギーカスケードよりもむしろエントロピーカスケードの存在を仮定した Bolgiano-Obukhov スケーリングが実験結果に良く合うという事実がある。エネルギーに限らず、ある物理量のカスケード過程を仮定することでスケーリング則が導かれるという意味で、両者は共通部分を持っている。

しかしこの2つの乱流現象を、数値計算の容易さという技術的観点で見た時、両者には決定的な差がある。3次元乱流の数値計算は大変困難で、コルモゴロフ理論が適用できる精度の実験はなかなか思うようにいかないのが現状である。しかし、熱対流乱流の場合、2次元系でも3次元系と同じ保存量を持つため、2次元系を用いることでスケーリングが再現できる精度の数値計算を行なうことは比較的容易である。

このことから、乱流現象一般に共通する過程はどのようなものか、という観点に立った研究を行なう場合、2次元熱対流乱流の解析を行なうことは、乱流、特にカスケード過程の普遍性に関して多くの知見が得られる可能性がある。その理由は、3次元乱流とはカスケードする物理量が異なること、相互作用の種類が異なること、またより精度の良い解析が可能であるからである。

本研究では以上の立場にたって、熱対流乱流のエントロピー輸送過程の空間的、スケールの局所性について直交ウェーブレットを用いて調べた。直交ウェーブレットを用いた保存量の非線形項輸送を表す表式は、既に提案されている [1]。しかし、本研究では非線形輸送の表式を直接用いずに、VTR を活用したり、温度場、速度場、ストレイン場等の物理量の対応を見ることで、エントロピー輸送の局所性を、直観的に把握することを目的とした。また比較のために、2次元乱流も同様に解析した。

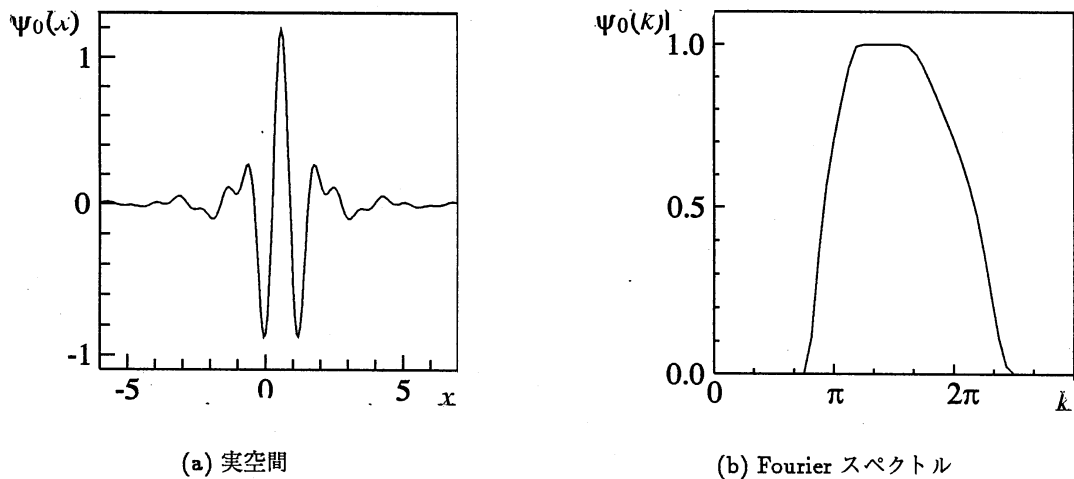


図 1: (a) $\psi_0(x)$ のグラフ。(b) $|\tilde{\psi}_0(k)|$ のグラフ。

第 2 章 ウェーブレット解析と局所性の解析

2.1 ウェーブレット解析

一般にある構造をもつ (ここでは、空間的に局在しているという意味) 場と、その Fourier 変換された場の間には、以下のような不確定性関係が成り立つ。

$$\Delta x \cdot \Delta k \lesssim \text{const.}, \quad (2.1)$$

ここで $\Delta x, \Delta k$ はそれぞれ考えている構造の実、波数空間での特徴的な幅である。直交ウェーブレットの最も特徴的な点は、実空間と波数空間の両方で (式 (2.1) を満たす範囲で) 解析精度を保つために、 $\Delta x \sim \Delta k$ となるようなある関数 (マザーウェーブレット) $\psi_0(x)$ を選び、そのスケール変換と平行移動を組み合わせた変換

$$\psi_j^m(x) \equiv \psi\left(\frac{x - 2^{-m}j}{2^{-m}}\right) \quad (m, j \text{ は整数}), \quad (2.2)$$

で $L^2(R)$ をなす完全正規直交基底 $\{\psi_j^m | m, j \in \mathbb{Z}\}$ を作り出すところにある。関数 $\psi_0(x)$ の具体的な作り方は文献 [1, 2]、また直交ウェーブレットの一般論については文献 [3, 4] を参照されたい。

本研究ではメイヤーの手続きにしたがって作ったマザーウェーブレットを用いた (図 1)。

特徴としては、(1) 無限回微分可能な実関数である (2) 波数空間でコンパクトサポート ($\frac{2}{3}\pi \leq |k| \leq \frac{8}{3}\pi$) である (3) 実空間では遠方でどんなベキ関数よりも早く減衰する (4) $x = \frac{1}{2}$ に関して対称である という特徴を持っている。なお、マザーウェーブレットの特徴的波数を 2π 、特徴的幅を 1 と見なせば、 (m, j) で特徴付けられるウェーブレットは、大まかにいって、波長が 2^{-m} で、位置 $2^{-m}j$ にあると考えることができる。また、ウェーブレットが波数空間で局在している

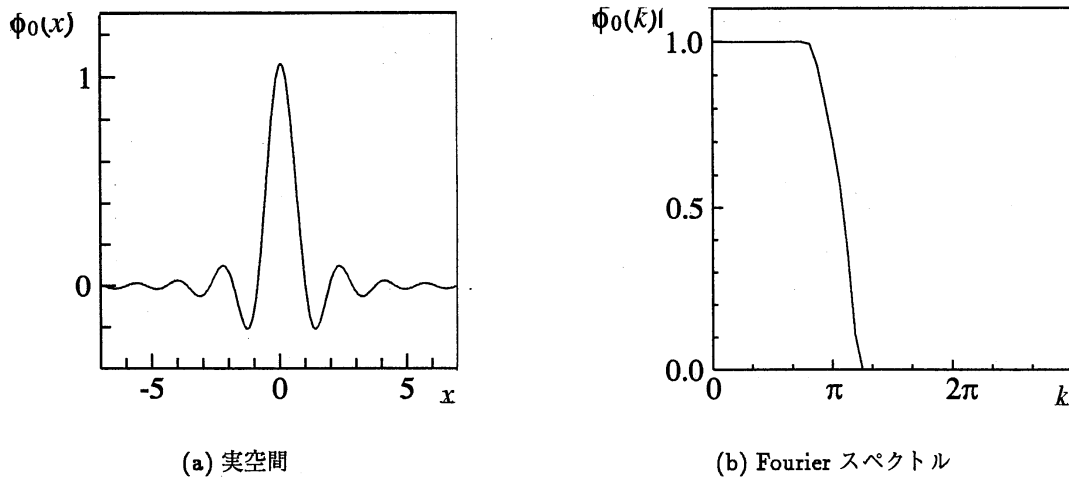


図 2: (a) $\phi_0(x)$ のグラフ。(b) $|\tilde{\phi}_0(k)|$ のグラフ。

ことから、 m を固定したウェーブレットの集合 $\{\psi_j^m | j \in \mathbf{Z}\}$ で張られる空間を、元の空間に対する一種のバンドパスフィルターと考えることができる。

2次元のウェーブレットを生成するには、以下のようにする [3, 4, 7]。ウェーブレット理論におけるファーザーウェーブレットを ϕ_0 とし、(図 2)、ウェーブレットを生成する時と同様に $\phi_j^m(x)$ を作る。 ϕ_0 は $|k| \leq \frac{4}{3}\pi$ で、コンパクトサポートであり、この意味で $\{\phi_j^m | j \in \mathbf{Z}\}$ で張られる空間は、元の空間に対する一種のローパスフィルターであると考えられる。この ϕ_j^m と ψ_j^m の直積

$$\Psi_{m,j}^{q=1}(x) = \phi_{j_x}^m(x) \psi_{j_y}^m(y), \quad (2.3)$$

$$\Psi_{m,j}^{q=2}(x) = \psi_{j_x}^m(x) \phi_{j_y}^m(y), \quad (2.4)$$

$$\Psi_{m,j}^{q=3}(x) = \psi_{j_x}^m(x) \psi_{j_y}^m(y), \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

(ここで $x = (x, y)$, $j = (j_x, j_y)$) を用いると、 $\{\Psi_{m,j}^q | q \in (1, 2, 3), m \in \mathbf{Z}, j_x, j_y \in \mathbf{Z}\}$ が、2次元空間の基底となっている。個々の基底 $\Psi_{m,j}^q$ は波数空間においてある領域に局在している (例えば $\Psi_{m=0,j}^{q=1}$ なら、 $|k| \in [0, \frac{4}{3}\pi] \times [\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi]$)。これを m についてのみ固定した集合 $\{\Psi_{m,j}^q | q \in (1, 2, 3), j_x, j_y \in \mathbf{Z}\}$ が張る空間は、元の関数に対する一種のバンドパスフィルターと見なすことができる。

2.2 局所性解析を行なう上での特徴

ある物理量 $f(x)$ のウェーブレット係数 $\hat{f}_j^m$ は、位置 $2^{-m}j$ にある、波長 2^{-m} 程度の揺らぎと関係があるが、揺らぎのもつ強さ (振幅) そのものではない。これはウェーブレット基底は実関数であることが原因である。

ところが、例えば、エネルギーやエントロピーなどの 2 次の物理量の分布を議論する時は、揺らぎの振幅を取り出す必要である。このため、そのままの解析した時には不都合が生じる。この一例として、メネヴォー (1991) が直交ウェーブレット空間におけるウェーブレットエネルギーの輸送を調べた例がある [8]。ここでは、ウェーブレット係数の自乗でエネルギーを定義することで、解析を行ない、ウェーブレット係数に表れる揺らぎそのものの影響が解析結果に悪影響を及ぼしている¹。

解析結果を位置に関して縮約したいとき (例えばある構造に対してスウィーピングの影響を除去したいとき)、また別の不都合が起こる。例えばエネルギーのシェル平均の代わりに、ウェーブレットエネルギーのスケール内での和 $\sum_j \frac{1}{2}(f_j^m)^2$ を用いることが多いが、この量は並進不変性を破ることが計算によって示されている [5]。従ってウェーブレット係数を局所性解析に適用する場合には揺らぎの振幅に相当する部分を取り出す作業が必要となる。具体的な手順については文献 [5] を見てもらいたい。以後、本講究録で「ウェーブレットエネルギー」などといった場合、この振幅を取り出す操作を行なったエネルギーなどを指す。

また、ウェーブレットをバンドパスフィルターとして活用するとき、基底が無限回微分可能であることを反映して、フィルターをかけられた場合は波数空間での単純なバンドパス操作を施した場に比べて滑らかになる。しかしベクトル量に関しては非圧縮性等の特性が必ずしも保たれないことに注意しておきたい。このことに関しては、第 5 章で再び述べる。

第 3 章 ハード乱流と NS 乱流

熱対流乱流 (ハード乱流) とは、熱対流系でレイリー数 Ra^2 を 10^8 程度以上にした時現れる強い乱流状態である。レイリー数が $10^6 \lesssim Ra \lesssim 10^8$ の時に見られるソフト乱流と比較して、以下のような点が異なっている。(1) 中央付近での温度揺らぎの確率分布が、指数分布である (ソフト乱流ではガウス分布)。(2) マクロな秩序構造が形成されている。具体的には、容器のサイズの大規模循環流が存在し、また熱境界層からプリューム又はスウオールと呼ばれる熱構造が時々吐き出されている。(3) このような秩序構造にも関わらず、中央領域では発達した乱流場となっている。中央領域に対する具体的な特徴としては、[a] 中央領域の平均場はほぼ一様である [b] 温度揺らぎの時系列に対するパワースペクトルが、巾則を満たす [c] エントロピー (温度の自乗) カスケードを仮定して、エネルギースペクトルやエントロピースペクトルの形を決定する Bolgiano-Obukhov (B-O) スケーリング [9, 10] が、実際観測されるパワースペクトルと良く一致するという 3 点が挙げられる。本研究では中央領域での乱流状態のモデルとして、以下のような 2 次元ブシネ近似方程式 (以下、「2 次元ブシネモデル」と呼ぶ) を用いた [7]。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \alpha g T \mathbf{e}_y + \nu \Delta^n \mathbf{u} + \mathbf{D}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta^n T + \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

¹なお、メネヴォーの定義した輸送関数では、エネルギーのスウィーピングの影響も取り除かれていない。

$$Ra \equiv \frac{(\alpha g) L^3 \Delta T}{\nu \kappa}.$$

α は体積膨張率、 g は重力加速度、 L は、容器の鉛直方向の長さ、 ΔT は上下の温度差、 ν は動粘性率、 κ は熱拡散率。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.3)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は速度場、 T は温度揺らぎ、 g は重力加速度、 α は熱膨張率、 ν は動粘性率、 κ は熱拡散率を表している。また $\mathbf{e}_y$ は鉛直上向き (= y 軸) を表す単位ベクトルある。粘性は通常の粘性 (式 (3.2), (3.3) で、 $n = 1$ に相当) の代わりに超粘性 (hyper-viscosity, $n \geq 2$, ここでは $n = 8$) を用いた。また境界条件は周期境界条件としている。この時、エネルギーが大スケールへと輸送され、低波数で発散するため、大スケールの速度場を取り去るドラッグ項 $\mathbf{D}$ を付け加えた。また、プリューム等秩序構造の中央領域侵入をモデル化し、低波数への温度攪乱を外力項 $\mathbf{F}$ として加えた。

(3次元の) 実際の熱対流乱流は、ナヴィエ・ストークス方程式で記述される普通の乱流と異なり、2次元ブシネモデルでその特性を良く記述できる。その理由は、このモデルは2次元と3次元で同じ方程式の形をしており、ともに以下の二つの保存量

$$S = \int \frac{1}{2} T^2 dV \quad (3.4)$$

$$E_{\text{total}} = \int \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \alpha g y T \right) dV \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

を持っているためと考えられている。これは、2次元系と3次元系で異なる保存量をもつナヴィエ・ストークス方程式と比べて特徴的である。ブシネ近似モデルの場合、いわゆるエネルギー (運動エネルギー: $E = \int \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 dV$) は保存しない量であることに注意されたい。しかし以下で単に「エネルギー」といった場合、運動エネルギーを指す。また、 S のことを「エントロピー」と呼ぶ。なお、このモデルでは周期境界条件を課しているために、通常の意味でのレイリー数は定義できないことに注意されたい。

この2次元モデルは通常の粘性を用いて動粘性係数を変えた時、慣性領域でのスペクトルの巾は B-O スケーリングでよく記述できる。このことから2次元ブシネ近似モデルを用いることの妥当性が分かる。なお超粘性を用いた場合、慣性領域でのエントロピースペクトルの巾は B-O スケーリングから1割ほど緩やかな巾をもち、エネルギースペクトルの巾は1割ほど急な巾をもつことが分かっている [7]。

最後に、3次元のブシネ方程式による数値計算では B-O スケーリングが再現さないが、コリオリ力の形による回転効果によって2次元性を高め、B-O スケーリングを再現させることは可能なようである。このことから、定常的な大規模循環流の存在による大規模構造の2次元性が B-O スケーリングを成立させる一つの要因である可能性が示唆されていることも付け加えておきたい。

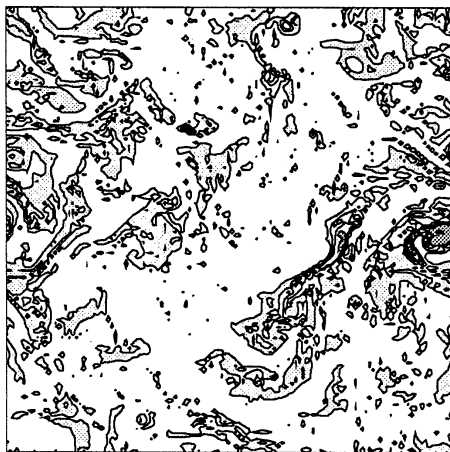
第4章 解析結果1 — エントロピー輸送の局所性 —

この章では、熱対流におけるエントロピー輸送の局所性をビデオを用いて解析した結果を報告する。目的は、エントロピー輸送が卓越していると思われる状態について、ウェーブレットエントロピーの場の時系列を解析することで、エントロピー輸送が如何に起こっているかを直観的に把握することである。なお、実際の解析及び本研究会における発表に関しては、場をカラーでビデオにとったものを用いた。しかし、本報告ではビデオ画像を白黒に変換したもののうち、いく

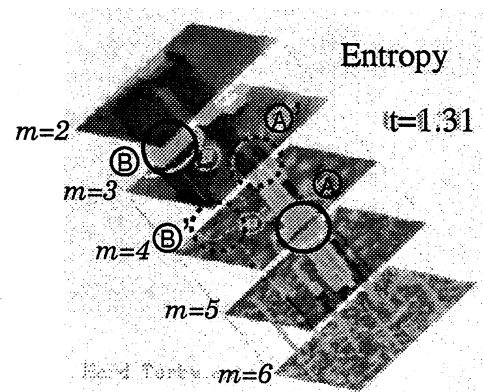
つかのスナップショットを掲載することにする。また速度場等との相互作用の様子は次章で考察する。

前章で提示した 2 次元ブシネモデルを数値計算により時間発展させた場を作り、そこから解析する場を選んだ。サイズは $2^8 \times 2^8$ で、計算における空間成分の周期は 2π である。時間の刻幅は $dt = 2.0 \times 10^{-3}$, 浮力の強さは $\alpha g = 1.0$, であり、離散化の方法は、空間成分については擬スペクトル法を、時間発展には 4 次のルンゲ・クッタ法を用いた。但し空間成分についてはエイリアシングを取り除くために、1/2-phase shift 法を用いている。粘性は、慣性領域をなるべく多くとるために、超粘性 (式 (3.2), (3.3) で、 $n = 8$) を用いた。外力項は定常で低波数に入れる形をとり ($F = \cos(2x)\cos(2y)$)、ドラッグ項は波数の大きさが 3 以下の時に、 $D = -0.5\Delta^{-1}u$ という形で入れた。このようなシミュレーションを行なって、エントロピー S の時系列を取り、変化が大きい (急増して急減少する) 時間帯のウェーブレットエントロピーを解析対象とした。

図 3 (a) は、 S が急増したのち急減している時間帯中のある時刻でのエントロピーの等高線を描いたものである。右端中央に渦状のエントロピー構造がみられ、その左側から斜め右下へ伸びるエントロピー構造がある。この後、渦状のエントロピー構造は回転しながら周りに線状のエントロピーを吐き出すように推移し、その左側のエントロピー構造は引き伸ばされて、線状構造が形成されていく。図 3 (b) は、図 3 (a) をウェーブレットを用いて分解した解析図である。階層的な面のそれぞれが、ウェーブレットで解析する時のスケールに対応しており ($2 \leq m \leq 6$ に対応する面が表示されている。)、各面内でのメッシュが、そのスケールでのモードが表す特徴的な場所に対応している。データは、取り出した時間帯の中で、各スケール毎に統計をとり、その (平均) + (標準偏差) $\times 3$ で正規化している。ビデオでは、色が青→黄→赤と変わるにつれ振幅が大きいことを表していたが、図 3 (b) では、色が薄い方が振幅が大きいことを意味する。



(a) 実空間



(b) 解析図

図 3: (a) エントロピーの高波数輸送が顕著と思われる時刻 ($t = 1.31$) における実空間におけるエントロピー分布の等高線図。平均から標準偏差の 3 倍まで描いてある (b) 同時刻におけるウェーブレットエントロピーの解析図。エントロピー塊が空間的にもスケール的にも局在している。

また角柱状の物体は、この二次元面を多重解像度で分解した図を $O-xyz$ の 3 次元領域と見て値が (平均) + (標準偏差) $\times 3$ となる等値面を描いたものである。角柱の林立する領域は、空間的に局所的な構造の存在を意味しており、角柱のスケール方向の局在は、構造のスケールの局所性を表している。

図 3 (b) には、大きなウェーブレットエントロピーの塊が大きく分けて二つ (図中に A, B と示したもの) ある³。塊 A は、 $m = 4$ というスケールで、空間的に局在した塊である。この時、このスケールの倍又は半分を表す $m = 3, 5$ の対応する場所では、ウェーブレットエントロピーは弱く、スケールの見てもこのエントロピー塊は局在しているといえる。この時刻では、図 3 (a) で見られた、伸びかかったエントロピー構造は解析図には見えてない。

図 4 は、解析図の時系列を表示したものである。A, B に相当するエントロピー塊は、 $t = 1.31$ (図 3 に対応) から $t = 1.91$ に掛けて徐々に m の大きい面 (小スケール) へ移動していつていくことが分かる。スケールが小さくなるにつれてそのスケールでの特徴的な時間が短くなっていくため、相対的に大きなスケールにエントロピー塊が残っていても、小さいスケールではより小さいスケールへとエントロピーが輸送されており、解析図では塊が伸びていく様な振舞いとして観察されている。

また、スケール $m = 4$ では、エントロピー塊は 3 ~ 4 のモードに分布していたのが、小さいスケールに輸送されるにつれ、空間的に広がっていくように見える。この過程は実空間で見ると二つのエントロピー構造が関係している。 $t = 1.31$ で A, B に対応しているのは、比較的大きな渦構造であり、この渦構造は周囲にフィラメントをまき散らしながらも図のなかでは構造を保ったままである。また途中で $m = 5, 6$ なるスケールで、A から左下方向に伸びるライン状のエントロピー塊 ($t = 1.61, 1.71$ の図が分かりやすい) は、A の右側でシアによって引き延ばされ、線状に変化したエントロピー構造に対応している。

なお、同じ時間帯における、運動エネルギー E の振舞いは、 S ほどははっきりしないがやはり増加して減少という過程を経ている。しかしながら、ウェーブレットエネルギーの解析図を時間順に見てもエントロピーの時ほどエネルギー塊がはっきりせず、移動も明らかでない。また局所的に高波数に輸送しているとも見てとれない。これはエントロピーカスケードを仮定して B-O スケーリングを導出した L'vov らの描像と良く合う結果だと思われる。

また、熱対流乱流においては、運動エネルギーは一方では小さなスケールに輸送されながらも、他方ではより大きなスケールに輸送されている。このことが巨視的秩序の形成と関わりがあると考えられている [7] が、これらの輸送がどのような形で起こっているのかは今のところ明らかでない。

³ 周期境界条件を課しているため分離しているが、渦構造に対応する塊とみなすべきものである。

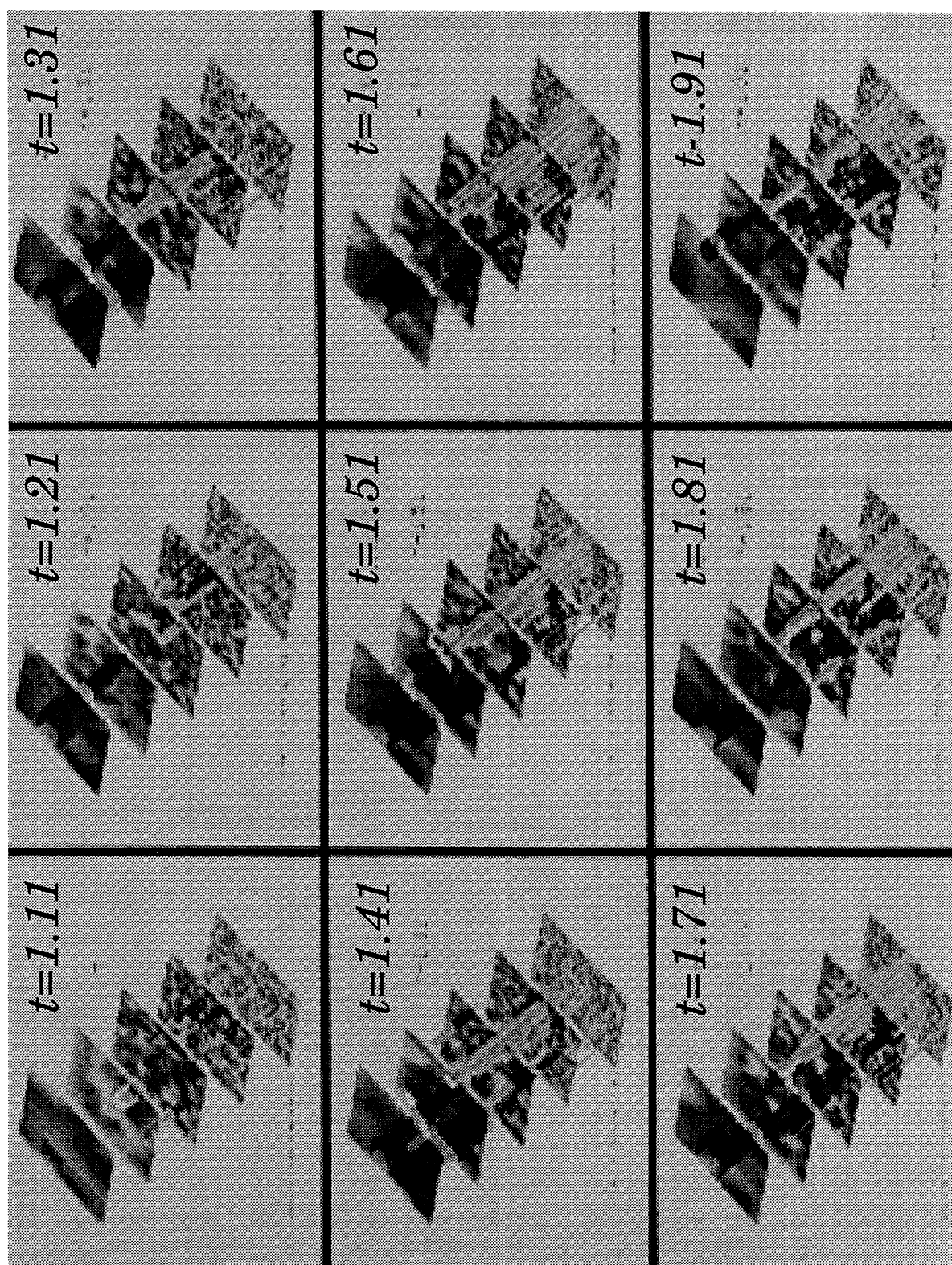


図 4: ウェーブレットエントロピー解析図の時系列。 $t = 1.31$ の時刻が図 1 に相当する。

第5章 解析結果2 — 相互作用の局所性 —

本章では、速度場と温度場に関わる諸量の相関などを通して、エントロピー輸送の局所性について論じる。前章で見た、エントロピー輸送のある過程を引き起こしている場の相互作用を絞り込むことが目的である。

ブシネモデル方程式 (3.2)(3.3) より、エントロピー方程式を作るとき、スケール間輸送を司る項は $-\int dVT(\mathbf{u} \cdot \nabla)T$ と書かれる。エントロピー及びエネルギーを一般の基底を用いてモード分解したとき、これらのモード間相互作用は、原則的に全てのモードの組合わせについて起こり得る。このことは、波数空間において同様の相互作用は、3つのモードに特別の関係 (3つの波数ベクトルの和が0) が成立する場合に限られることと比べると対照的である。さらに、普通に分解するだけでは三角相互作用のように局所的な保存則は満たされない。局所的な保存則が満たされる相互作用の一つの提案は飯間と藤によってなされている [1]。この表式は非線形輸送の効果について詳細釣合が成立するが、圧力項の影響は取り込まれていない。本研究では、モード間輸送を直接調べるよりもむしろ物理的な側面からの解析を行ない、将来の直接解析への足掛かりとすることを主眼とした。

そのために、速度場と温度場を、ウェーブレット基底を用いてスケール分解し、その各スケール各々について、ストレインや揺らぎの空間的あるいはスケールの局所性及びそれらの相関を見ることが速度場と温度場の相互作用を調べた。具体的には、速度場、温度場を、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{m=1}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{m=2}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{m=3}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (5.1)$$

$$T(\mathbf{x}) = T^{m=1}(\mathbf{x}) + T^{m=2}(\mathbf{x}) + T^{m=3}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u}^m(\mathbf{x}) = (u^m(\mathbf{x}), v^m(\mathbf{x})) \quad (5.3)$$

と分解し、 u^m, v^m, T^m を、

$$\begin{cases} u^m(\mathbf{x}) = \sum_{j,q} \hat{u}_{m,j}^q \Psi_{m,j}^q(\mathbf{x}), \\ v^m(\mathbf{x}) = \sum_{j,q} \hat{v}_{m,j}^q \Psi_{m,j}^q(\mathbf{x}), \\ T^m(\mathbf{x}) = \sum_{j,q} \hat{T}_{m,j}^q \Psi_{m,j}^q(\mathbf{x}), \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{u}_{m,j}^q \equiv \int u(\mathbf{x}) \Psi_{m,j}^q(\mathbf{x}) dV, \\ \hat{v}_{m,j}^q \equiv \int v(\mathbf{x}) \Psi_{m,j}^q(\mathbf{x}) dV, \\ \hat{T}_{m,j}^q \equiv \int T(\mathbf{x}) \Psi_{m,j}^q(\mathbf{x}) dV, \end{cases}$$

と定義する。定義から分かるように u^m, v^m, T^m は各物理量から、一種のバンドパスフィルターを通して作った場である。 $\int u^m u^{m'} dV = 0 (m \neq m')$ 等の関係式が成立し (つまり、直交している)、 u^m は特徴的な波数 $2\pi 2^m$ を持っている。仮想的な速度場 $u^{m=1}$ によって、仮想的な温度場 $T^{m=2}$ がどのように変形されるかを見ることで、式 (3.2) の移流項によるスケール間相互作用を間接的に知ることができる⁴。

ここで、分解した場と元の場との違いについて述べておきたい。非圧縮を仮定しているため、当然空間の全ての点で $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ が成立している。しかし、式 (5.1) を用いて分解した u^m の発散 $\nabla \cdot \mathbf{u}^m$ は一般に0ではない (もちろん全てのスケールに渡って加えればこれは $\nabla \cdot \mathbf{u}$ となり、各点でゼロになる)。このような「みかけ」の発散は、フーリエ空間におけるバンドパスフィルターをかければ現れないが、その場合分解した場の局在性、滑らかさは失われてしまうために採

⁴FFT などを用いるコンボリューションを考えれば、その意味が分かりやすいと思われる。なお、今使っている基底は局所的なので、相互作用は実空間で局所的である。従って、位置に関してわざわざ分解する必要もない。

用しないことにした。なおこの発散がウェーブレット空間での相互作用の内、何らかの本質的な内容に関係がある可能性も否定できない。しかし、単に基底が離散に並んでいることを反映している可能性もある。興味深い問題ではあるが、本研究ではこの問題にはこれ以上立ち入らない。

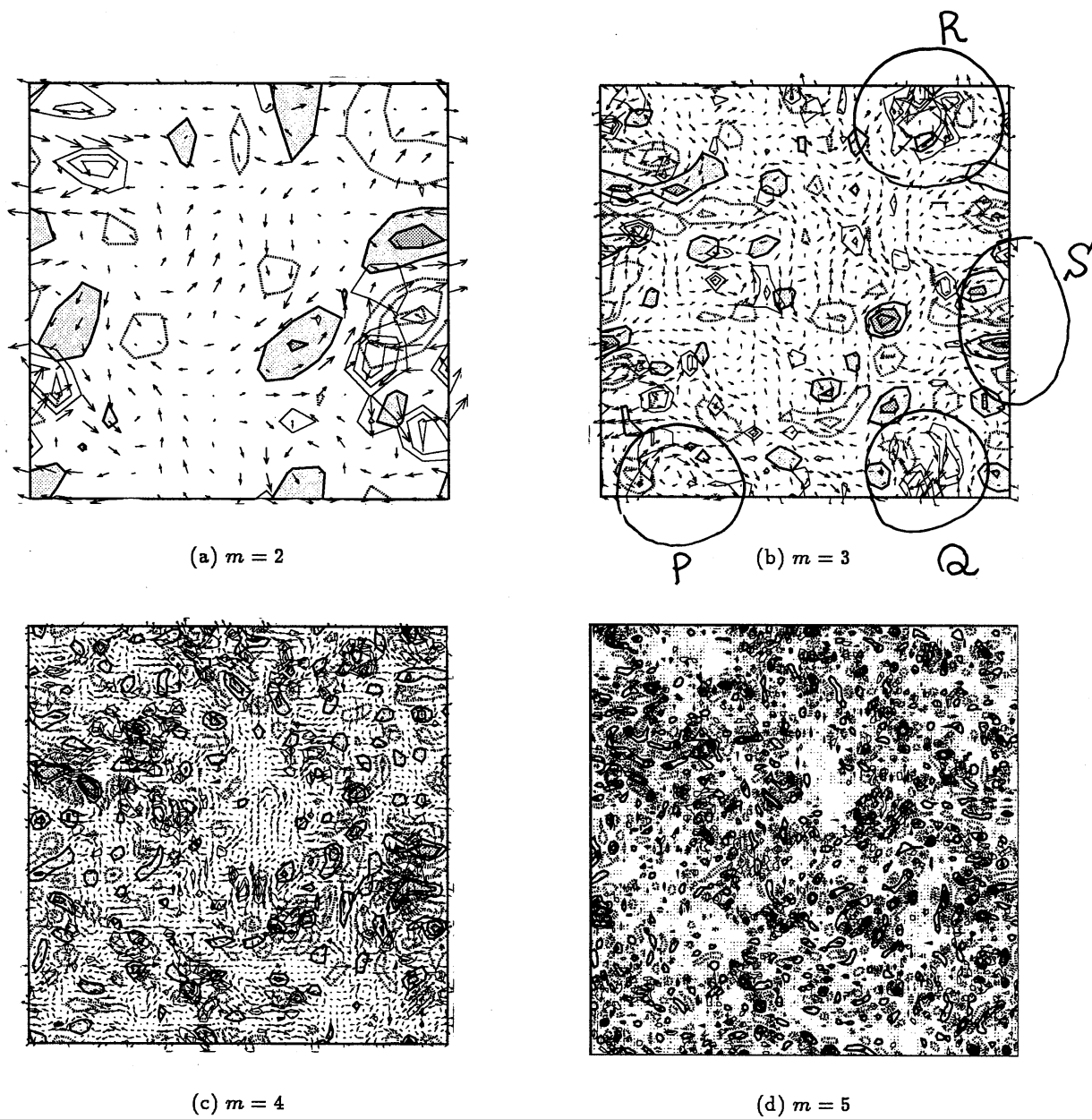


図 5: 速度場、ストレインテンソルの固有値、温度場を重ねたもの (熱対流乱流)。

図 5 (a)~(d) には、熱対流乱流のスナップショット (図 3 に対応) の $m=2$ から $m=6$ までのスケールに対して、以下の 3 つの場が重ねて表示されている。(1) 速度場ベクトル $\mathbf{u}^m(\mathbf{x})$ (矢印) (2) 速度場 $\mathbf{u}^m(\mathbf{x})$ に対して、ストレインの強さを表す量 $|\sigma_{ij}^m|$ ⁵ が強い箇所 (細実線) (3) T^m の強いところ (太実線と太破線。正の値には網がかかっている。) ここで場の解像度は特徴的スケールの $1/4$ に設定した (つまり、スケール m に対応する図の解像度は $2^{-(m+2)}$ である。) 理由は、ここに表示されている場は、振幅を取り出す操作を行っていないために、場の特徴的なスケールを波長とする揺らぎがそのまま残っているため、解析のためには揺らぎを含めた形で可視化を行う必要があるからである。図 5 (a)~(d) に共通して見られる特徴は、スケールの見て独立な渦の存在である。典型的なのは、(b) の位置 P, Q に見られる渦で、他のスケールの対応する場所には渦は存在していない。このような渦は周辺部にドーナツ状の強いストレイン場を生み出している事がわかる。ここに挙げた例は 2 つとも単一のスケールのみに渦が存在しているケースだが、一般的には、例えば $m=3,4$ のスケールにおける共通の位置に渦構造が見えている場合もある。また R のように、渦構造が 3 つ以上のスケールに渡って存在している場合もある。これは実空間では点渦に近い、直径の小さい渦に対応している。前章で述べた、この時間帯でエントロピー輸送の顕著な領域の一つは S に対応している。これは温度揺らぎと速度場が絡み合った複雑な構造をしている。

明らかに図の (a)(b)(c)(d) における温度揺らぎのパターンは一致しておらず、温度揺らぎに関しても、スケール間の独立性がわかる。また、ストレイン場と温度揺らぎの間にはそれほど強い相関はない。

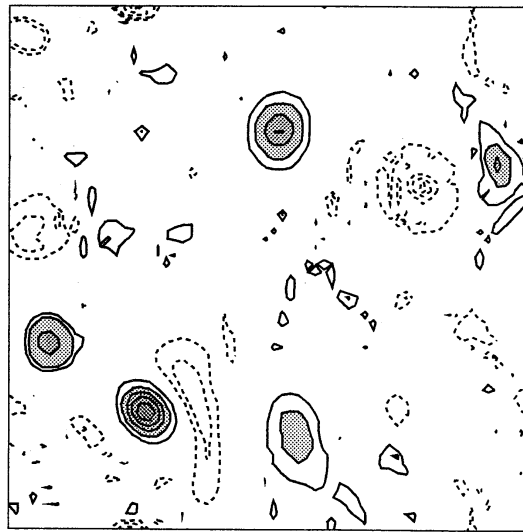
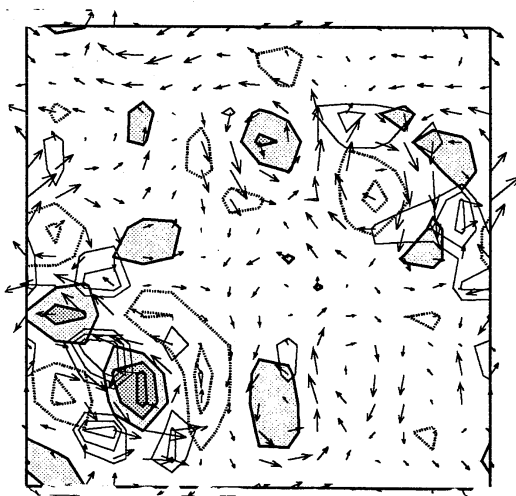


図 6: 二次元乱流における渦度場。

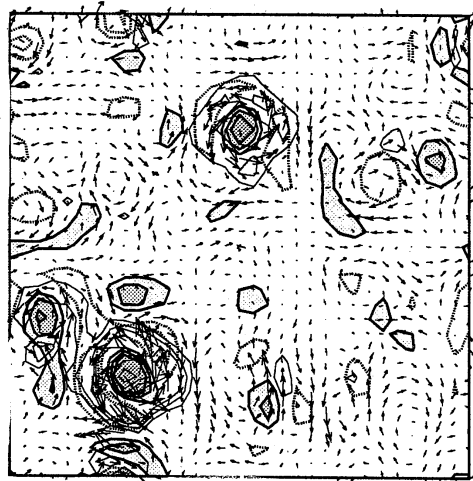
局所的な渦構造が存在し、周囲で強いストレインが見られること、また温度揺らぎにもスケールの局所性が見られることは、浮力項を通じて温度揺らぎが速度シアを生成することを考えると

⁵定義は、 $|\sigma_{ij}^m| \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{xx}^m \sigma_{yy}^m - (\sigma_{xy}^m)^2}$ である。 $\nabla \cdot \mathbf{u}^m \neq 0$ であるから、ストレインテンソルの固有値は本来 $\frac{1}{2} \{ \sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m \pm \sqrt{(\sigma_{xx}^m - \sigma_{yy}^m)^2 + 4(\sigma_{xy}^m)^2} \}$ である。差は $\mathbf{u}^m$ の発散の半分である。

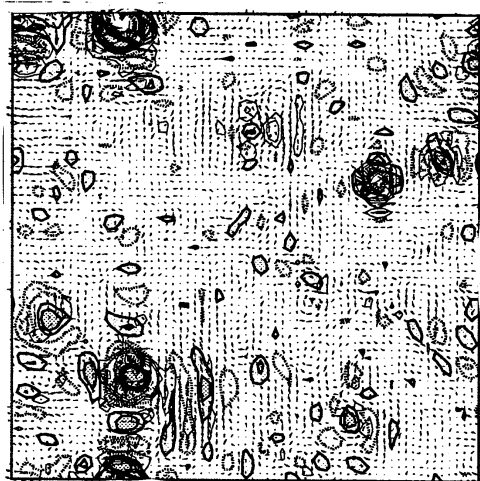
相互作用自体も局所的に成り立っている可能性を示唆しており、興味深い。



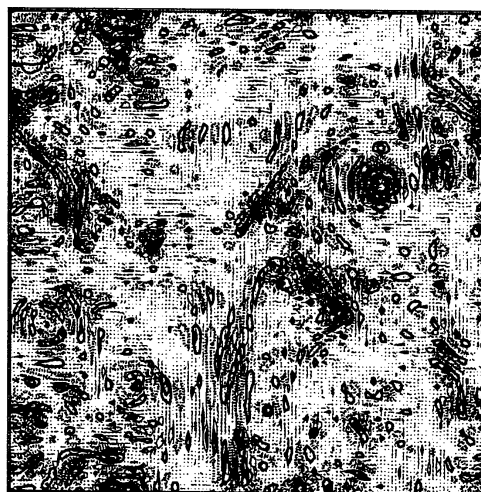
(a) $m = 2$



(b) $m = 3$



(c) $m = 4$



(d) $m = 5$

図 7: 速度場、ストレインテンソルの固有値、温度場を重ねたもの (二次元乱流)。

これに対し、二次元乱流のケースは対照的である。図 6 には、比較のために解析した二次元乱流の場のエンストロフィー場が示されている。

図 7 に、ウェーブレットで分解した二次元乱流解析図が示されている。見方は図 5 と同じであるが、温度場の代わりに渦度場が示されている。

(a) ~ (d) によると、大規模渦に対応する場所に、スケールの観点で見た場合には非局所的な構造が見られることが分かる。例えば渦 C に対して $m = 2 \sim 4$ まで渦度揺らぎとシアによるストレインが重なった構造が、全く同様に見られている。二次元乱流では大きな渦の周囲でエンストロフィーが高波数へ輸送されていると言われているが、図 6, 7 でも大規模渦の周りでシアが強く、ここでエンストロフィーが引き延ばされていることが分かる。また、(d) を見ると、より大きなスケールを持つパターンが見えている。

以上のことから、二次元乱流は熱対流乱流とは本質的に異なっており、むしろ非局所的な相互作用を起こしている可能性が高いことがわかる。

第 6 章 まとめ

本研究では、特に、局所性に着目してカスケード過程の普遍性を調べるために、熱対流乱流を解析した。

ウェーブレットを用いて、あるスケールにおけるエントロピーの空間分布をとりだすことに成功した。またその時系列を観察することによって、熱対流におけるエントロピー輸送が空間的、スケールの観点からみて局所性が強いことを示唆する結果を得た。その意味でエントロピーの輸送はカスケードと呼べる現象なのかも知れない。

また、相互作用がどのように起こっているのかを把握するために、速度場のストレインと温度揺らぎの相関を調べ、エントロピーカスケードが起こっている箇所では、両者が共に強いと言う結果を得た。このような傾向は、二次元乱流でも全く同様に表れた。両者の違いは、スケールに分解した時、各スケールでの場の特徴が空間的な意味で対応しているか否かである。二次元乱流の場合は、大規模渦の影響がはっきり表れていて、どのスケールを見ても渦の位置に対応する場所にストレインが見られた。しかし、熱対流乱流の場合はスケール毎の独立性が高く、ある種の局所性が見られた。

カスケードが起こるためには、あるスケールでの構造が崩壊する状況が自励的に小さいスケールに移る必要がある。熱対流乱流の場合は、温度揺らぎによってポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに変換され、その運動エネルギーが温度揺らぎを変形させるといったメカニズムが考えられるが、メカニズムの検証は今後の課題である。また、上で述べたエントロピー輸送の局所性や速度場との相互作用が統計的な意味で熱対流乱流の構造を決定しているのかという問題も調べられるべきであろう。

参考文献

- [1] M. Iima and S. Toh, Phys. Rev. E, **52**, 6189(1995).
- [2] M. Yamada and K. Ohkitani, Prog. Theor. Phys. **83**, 819 (1990); Fluid Dyn. Res. **8**, 101 (1991).
- [3] M. Farge, Annu. Rev. Fluid Mech. **24**, 395(1992).
- [4] Y. Meyer, *Wavelets*, eds. J. M. Combes, A. Grossmann and Ph. Tchamitchian (Springer, Berlin) 21 (1988).

- [5] M. Lima and S. Toh, *preprint*.
- [6] S. Toh and E. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **73**,1501(1994).
- [7] S. Toh, J. Phys. Soc. Jpn. **64**,685(1995).
- [8] C. Meneveau, Phys. Rev. Lett. **66**, 1450(1991); J. Fluid Mech. **232**, 469(1991).
- [9] V. S. L'vov, Phys. Rev. Lett. **67**,687(1991).
- [10] I. Procaccia and R. Zeitak, Phys. Rev. Lett. **62**, 2128(1989).