

Chaos に到る 異常分岐列

京大, 理, 物理 津田一郎

§1. はじめに

カオスに到る分岐には現在まで数種類知られてゐる。
このうち周期倍現象が最もよく研究されており、臨界現象と
の類似で、ファイゲンバウムが、理論をつくら¹⁾た。その後、数
学者や数値物理学者がこの理論を厳密にし、宿題になつてゐ
た conjecture を証明したりした。しかし、これらの仕事には、
ファイゲンバウム程の独創性は感じられな²⁾り。(もっとも、数
学者と物理学者では独創性の現われ方は異なるのだから。)
周期倍分岐が存在し、かつ無限につづくという仮定のもとに
理論を作るとすれば、やはり、ファイゲンバウム以上の事は出
てこないだろう。ファイゲンバウム以上ではな³⁾りかつ、その後の
ユレたちの仕事より独創性のある仕事として、大同氏の、ま
れいな仕事がある²⁾。(本号、大同寛明氏の報告を見よ。)
彼の仕事によつて、ファイゲンバウム理論は、す、まりした。

しかし筆者が、ここで興味をもつのは、もっと異常な分岐である。B-2反転の我々の模型から、次の異常分岐がみつかった。

1. 2^n 分岐が存在しても、有限で切れ、他の種類の周期解や、カオスへ転移する。³⁾
2. カントール的な分岐構造。³⁾
3. Self-similar なクラスターを作る分岐構造。⁴⁾
4. フィボナッチ分岐。³⁾
5. 外部ノイズによ、で誘起された間欠性カオス。⁵⁾

ここでは主として、1, 4 について述べる。

§2. フィボナッチ分岐の臨界現象

我々がみつけたフィボナッチ分岐は不完全で、無限の分岐が起きない。しかし、ここでは、無限まで分岐するとして、局所理論を展開する。この局所理論は、ファイゲンバウムの局所理論(2^n)の精神を越えてはならない。

フィボナッチ数と F_n とする。

次の self-similarity を使う。

$$g^{(F_{n+1})} = g^{(F_n)} \cdot g^{(F_{n-1})} \quad (F_{n+1} = F_n + F_{n-1}) \quad \text{---①}$$

解を求める。 $G^*(y) = 1 - a|y|^n$ としよう。

すると、

$$\alpha^{2n} + n\alpha - n \sim 0$$

$$n=1 \text{ とき, } \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \equiv \tau$$

$$\alpha = \tau^{-1}$$

$\alpha = -\tau^{-1}$ が物理的な解, この時 $a = 1$.

$\therefore g(y) = 1 - |y|$ は universal function である。

これは極めて reasonable. 何故なら, この map は 2 周期解が
1 つだけ存在し, しかも, それらが全て marginal stability である。
つまり τ の値からわかる, フォルダリングは 2^n が部分的に縮退したも
のであるという知見と合致する。

次に fixed function からの deviation を考える。つまり安定性
の議論。

$$G^{(\bar{n}_n)}(y_n, \varepsilon_n) = G^*(y_n) + \psi_n(y_n, \varepsilon_n) \text{ とおく。}$$

すると、

$$\alpha^{-1} \psi_{n+1}(y_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \sim G^{*'}(\alpha G^*(\alpha^{-1} y_n)) \cdot \alpha \psi_n(\alpha^{-1} y_n, \varepsilon_n) \\ + \psi_n(\alpha G^*(y_{n-1}), \varepsilon_n)$$

が得られる。ここには

$$G^{*'}(\alpha G^*(\alpha^{-1} y)) = \frac{G^{*'}(\alpha y)}{G^{*'}(\alpha^{-1} y)} = \alpha^2 \text{ である。}$$

$$\mathcal{L}[\psi(y)] \equiv \alpha [G^*(\alpha G^*(\alpha^+ y)) \alpha \psi(\alpha^+ y) + \psi(\alpha G^*(\alpha^+ y))]$$

この operator $\mathcal{L}$ を定義する.

$$\begin{cases} \delta_j \varphi_j(y) = \mathcal{L} \varphi_j(y) \\ \psi_n(y) = \sum \delta_j(n) \varphi_j(y) \end{cases}$$

右の固有値問題は帰着される.

$$\delta \varphi(y) = \alpha (\alpha^3 \delta^+ \varphi(\alpha^+ y) + \varphi(\alpha G^*(\alpha^+ y)))$$

$$y=0, \quad y=\alpha, \quad y=1 \quad \text{と} \quad \delta \text{ を 決める} \quad \delta \text{ は}$$

$$\tau^5 \delta^3 - (\tau + \tau^3) \delta + 1 = 0$$

の根となる. 物理的な解は $\delta = \tau^{-1}$.

また, $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\lambda_n) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_c - \lambda_n|^{-\nu}$ 臨界指数 ν を定義すると, (ただし $T(\lambda_n)$ は $\lambda = \lambda_n$ の時の周期)

$$\nu = 1$$

が得られる.

以上をまとめると, ショタナチ分岐の臨界現象は, 次のようになる.

$$\begin{cases}
 \text{Functional Equation : } G(-\alpha y) = -\alpha G(-\alpha G(-\alpha^4 y)) \\
 \text{Fixed Function : } G^*(y) \sim 1-|y| \\
 \text{Scaling Factor : } \alpha = \tau^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988 \dots \\
 \hspace{15em} (\text{golden mean}) \\
 \text{Bifurcation Velocity : } \delta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988 \dots \\
 \hspace{15em} (\text{golden mean}) \\
 \text{critical exponent : } \nu = 1
 \end{cases}$$

しかしながら、筆者には、これらの結果だけでは、また不満足なのである。スボナッチ分岐の機構を理解するためには、このような局所理論ではダメで、大域的な理論が、必要だからである。

§3. 異常 2^n 分岐

2^n 分岐が、おこることも有限で切れてしまう場合がある。

これは、どのように理解したらよいのか？

$$x_{m+1} = f(x_m; \lambda)$$

と考える。ここで 2^n 周期解が出たとする。これは、 $f^{(2^n)}$ において、2周期解である。 $g \equiv f^{(2^n)}$ とすると、 g は2周期解が出た直後の振動計算をみてみよう。 $\lambda = \lambda_c$ が2周期解の onset とする。 $\lambda - \lambda_c = \varepsilon$, $x_m - x^* = \Delta x$ とすると

$$\Delta x_{m+1} = g(\Delta x_m + x^*, \varepsilon + \lambda_c) - g(x^*, \lambda_c)$$

展開する。

$$\Delta x_{m+1} = (-1 - \varepsilon k) \Delta x_m + \partial (\Delta x_m)^2$$

ただし $-k = \delta + \alpha \partial$

$$\alpha = g_{\lambda} (x^*, \lambda_c), \quad \beta = \frac{1}{2} g_{\lambda\lambda} (x^*, \lambda_c)$$

$$\partial = \frac{1}{2} g_{xx} (x^*, \lambda_c), \quad \delta = g_{x\lambda} (x^*, \lambda_c)$$

$\Delta x_m = 0$ は不安定固定点である。

g に対して安定な 2 周期解を見つけるために,

$$x_{m+2} = g \circ g (x_m, \lambda)$$

と考える。同様の手続きをすれば,

$$\Delta x_{m+2} = (1 + 2k\varepsilon) \Delta x_m - 2\partial^* \Delta x_m^3$$

$$\partial^* = \partial^2 + \sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{6} g_{xxx} (x^*, \lambda_c)$$

実は, $\partial^* > 0$ は g に対する シュワルツ条件に反, 2.13.

従って, もし シュワルツ条件が破れるならば, 上記の振動計算は無意味となる。シュワルツ条件が破れるということとは,

任意の n に対し, $f^{(n)}$ の零点を区間に, 変曲点が -2 以上存在する可能性があるということである。変曲点が, たくさん, (2つで十分だが,) 出てくると, $f^{(n)}$ のグラフから, 2^n が集積する前に, 軌道が局所正方形から飛び出してしまふ。

これが 2^n が有限で切れる理由である。

参考文献

- 1) M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19 (1978), 25; 21 (1978), 669
- 2) H. Daido, Phys. Lett. 83A, (1981) 246
- 3) I. Tsuda, Prog. Theor. Phys. 66 (1981) No. 6
- 4) I. Tsuda, Phys. Lett. 85A (1981) 4
- 5) I. Tsuda, in preparation. "Noise-induced Intermittency"