

反応拡散系における大域的な分岐解の構造

京都産業大学 理学部

西浦 廉政

次の半線型放物型方程式系を考える

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, v) \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u, v) \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

$$\text{境界条件} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

Ω は $\mathbb{R}^n$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ領域とする。(f, g について詳しい仮定は後述) このような形の方程式系は, population dynamics, biochemistry, morphogenesis 等, 様々な分野で見られる。それらに共通して言える最初の仮定は、(空間-時間) 一様な状態が存在することである。

[仮定 1]

($\tilde{P}$) は定数解 $\bar{u} = (\bar{u}, \bar{v})$ を有する。

これは $f(u, v) = g(u, v) = 0$ をみたす $\bar{u}$ の存在が
 言っても同じである。ここでは簡単の為、上のように $\bar{u}$
 は 一意的 だとしよう。

この $\bar{u}$ は、空間一様な摂動に対しては、安定であるとする。
 すなわち

[仮定 2] $\bar{u}$ は常微分方程式系

$$\begin{cases} u_t = f(u, v) \\ v_t = g(u, v) \end{cases}$$

の安定な平衡点である。(f, g の $\bar{u}$ におけるヤコビ行列
 $\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$ の行列式が > 0 , トレースが < 0)

問題 (P) の空間非一様な解は存在するか?

又, (d_1, d_2) が変化する時、それらの解はどのように変
 化するか?

勝手な f, g に対しては、非一様解は一般に存在し
 ない。そこで与えるべき f, g に対する仮定を述べよう。

[仮定 3] $f(u, v) = 0$ をみたす曲線を (u, v) -空間
 で描くと、それは S 字形をしている。すなわち、それを u
 について解いた時、3 つの枝 $u = h_i(v)$ ($i = 0, 1, 2$)
 がある。定義域の共通部分では、 $(h_i$ の定義域を I_i と
 $h_1(v) \leq h_0(v) \leq h_2(v)$ (a.c.)

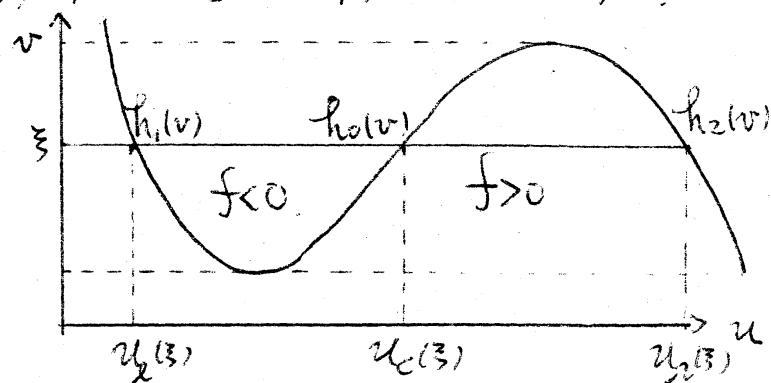
が成り立つとする。(図1をみよ) 各枝の上で

$$\frac{\partial f}{\partial u}(h_i(v), v) \neq 0$$

と満ち(定義域の端美は除く). $f > 0$ の領域は

$u = h_0(v)$ の上側が対応しているとする.

図1



注意1 上の仮定より v は h_0 の定義域 I_0 の一点 ξ で固定すると, $f(u, \xi) = 0$ は 3つの零点

$$u_x(\xi) < u_c(\xi) < u_h(\xi)$$

をもつ.

[仮定4] $J(\xi) \geq J(\xi) = \int_{u_x(\xi)}^{u_h(\xi)} f(u, \xi) du$ と

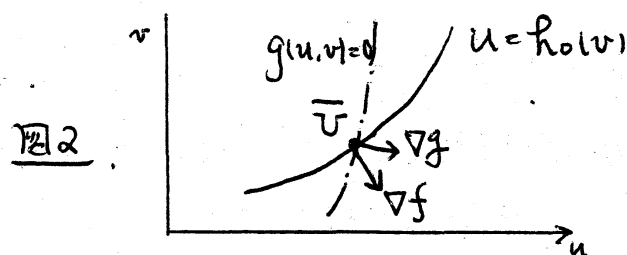
定義する時, $J(\xi)$ は 唯一の 零変 $\xi = \xi^*$ をもち

そこで $\left. \frac{d}{d\xi} J(\xi) \right|_{\xi=\xi^*} < 0$ をみよ.

[仮定5] 定数解 $\bar{u}$ は $u = h_0(v)$ 上にある.

注意2 仮定2と5より, $\bar{u}$ 付近で $f(u, v) = 0$ と

$g(u, v) = 0$ の等高線は図2のように示している。



これらの仮定をみる。具体的なモデルのいくつかは例えば [1] をみられた。以下では簡単の為、空間1次元と限定する。さて問題は 定常問題

$$(SP) \begin{cases} 0 = d_1 u_{xx} + f(u, v) \\ 0 = d_2 v_{xx} + g(u, v) \\ u_x(0) = v_x(0) = u_x(1) = v_x(1) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, 1) \equiv I$$

の解で、空間非一様性をもちと求め、それらの拡散係数への依存性を調べることであった。(SP)の非定常解を求める解析的手法としては、次の2つが代表的である。

(i). 分岐理論

(ii). 特異摂動論。

(i)はよく知られている解(定常 $\bar{u}$)がパラメータ(定常 (d_1, d_2))を変化させる時、(拡散)不安定性を占め、新しい(非一様な)解にとって代わられる現象を解析する手法であり、(ii)はあるパラメータ(定常 d_1)が退化する(0になる)付近での解を、そのパラメータを0とおいた退化問題の解をもとにして、

摂動展開により、得ようというものである。この本論の結論は、これら二つの方法で得られる解は、実は1つのものの二つの側面であるといっていることである。少し詳しく述べる為に、記号を準備しよう。

$$\mathbb{R}^+ = \{d_1 \mid d_1 > 0\}$$

$$X = (H_N^2(I))^2, \text{ 其中}$$

$$H_N^2(I) = \text{closure of } \left\{ \cos n\pi x \right\}_{n=0}^{\infty} \text{ in } H^2(I)$$

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^+ \times X$$

$\mathcal{J} = (\text{SP})$ の非定数解全体の集合の $\mathcal{E}$ における閉包。

注3 元々 (SP) に含まれるパラメータは d_1, d_2 の2つである。ここでは d_2 は任意に固定していると考え、 d_1 のみを変化し得るパラメータと考える。つまり (d_1, d_2) を同時に動かすところではなく、 d_2 を勝手に止めた断面での d_1 -依存性を調べ、その後 d_2 を流してやることで全体像を得ようとするのである。従って、 (SP) の解 といふときは、常に $(d_1 \text{ の値}, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times X$ という形で、言うことにする。

さて、これらの記号を用いて結論を述べると、 d_2 が大
 $\mathcal{E}$ のある1点において自明解 ψ なる分岐した解は、 $\mathcal{E}$
空間において、十分小さな d_1 まで延長可能であり、そこで

特異摂動法によって得られる解に連結される。言い換えると、 $\mathcal{I}$ において、分岐解を含む最大連結成分 (component) は特異摂動解を含む。(図3)

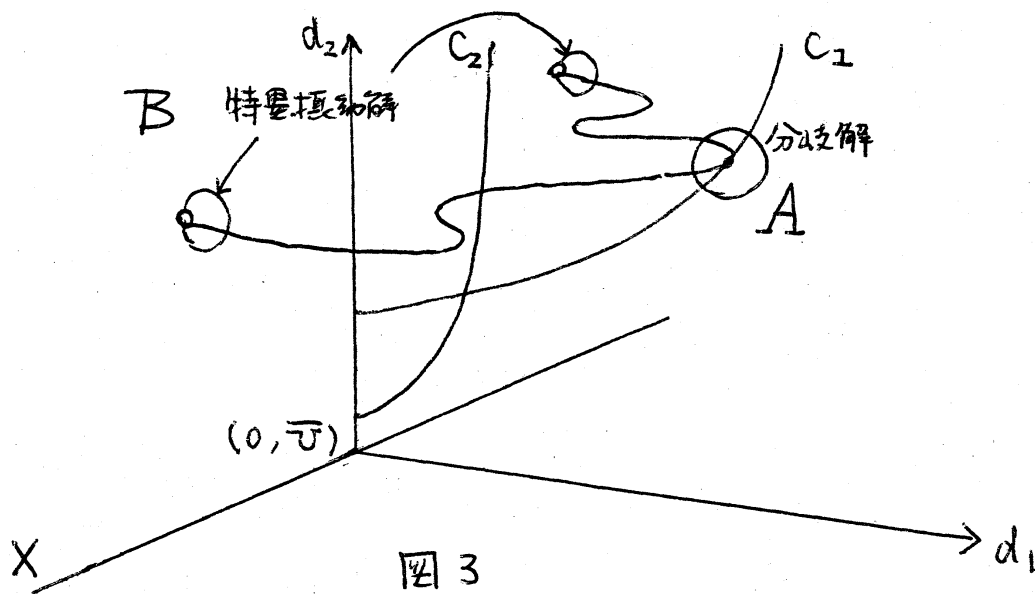


図3

この主定理がどのようにして得られるか、その概要を以下で簡単に述べよう。

1. 局所分岐理論 ([2])

d_1 を変えた時、 $\bar{v}$ が不安定化し、新しい非定常解が出現するかは、 $\bar{v}$ における線型固有値問題を解くことによりわかる。

$$(E) \quad D\Psi_{xx} + B\Psi = \lambda \Psi$$

$$\Psi_x(0) = \Psi_x(1) = 0$$

$$\text{ここで } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \bigg|_{(\bar{u}, \bar{v})}, \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2)$$

$\lambda = 0$ とする (d_1, d_2) の値が $\bar{U}$ を不安定化するときは
 に対し、それは Fourier-cosine 展開により、易く、次で
 与えられることがわかる。
 (の双曲線族)

$$(1) \quad C_n : d_2 = \frac{b_{11} b_{21} / (n\pi)^4}{d_1 - b_{11} / (n\pi)^2} + \frac{b_{22}}{(n\pi)^2}$$

(図3に C_1, C_2 が描かれている)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ は ($\bar{U}$ の) 分岐集合とす。 B とかく
 又、任意の2つの双曲線族の交差を B からすべて取り除いた
 ものを B' とかく。 このとき次の定理が成り立つ。

定理1 (図3のA部分)

任意の $D_c = (d_1^c, d_2) \in B'$ (d_2 は任意に固定)
 に対し、ある正定数 ε_0 が存在し、(SP)は $|\varepsilon| < \varepsilon_0$
 の範囲で、1径数の解族 $(d_1(\varepsilon), U(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^+ \times$
 X をもつ。 ここで d_1 は $d_1(0) = d_1^c$ を満たす滑らかな関数であり、 $U(\varepsilon)$ は Φ_n と (E) において $D = D_c$
 となる零固有値に対対応する (正規化された) 固有関数と
 する時。

$$U(\varepsilon) = \bar{U} + \varepsilon \Phi_n + o(|\varepsilon|)$$

とわかる。 さらに上の分岐は片側分岐である。 すな
 わち $d_1(\varepsilon) < d_1^c$ ($n > d_1^c$) ; $\varepsilon \neq 0$ である。

2. 特異摂動理論 ([3])

d_1 が十分小さいとき、 $d_1 = 0$ とおいた次の退化問題の解をもとに (SP) の解を構成できる。

$$\begin{cases} 0 = f(u, v) \\ 0 = d_2 v_{xx} + g(u, v) \end{cases}$$

ここで注意が必要である。仮定3より、第1式で u について解く、解き方は、不連続解を許すとは限らぬのである。そこで次のような class で解を求め

$$(2) \quad (u, v) \in L^2(I) \times H^1(I)$$

$$(3) \quad f(u, v) = 0 \quad \text{a.e. in } I$$

$$(4) \quad (d_2 v_x, \phi_x) = (g(u, v), \phi) \quad \text{for all } \phi \in H_0^1(I)$$

天下りの解である (3) の解を u とし、次を v とす。

$$(5) \quad u = p^*(v) = \begin{cases} h_1(v) & \text{for } \{v < \xi^*\} \cap I_1 \\ h_2(v) & \text{for } \{v > \xi^*\} \cap I_2 \end{cases}$$

$d_1 \neq 0$ の解を延長する為には、このとり方に限られる。

(5) と (4) を代入すれば, (2) ~ (4) は 2 次 スカラー-方程式
を解くことに帰着する

$$(6) \quad V \in H'(I)$$

$$(7) \quad (d_2 V_x, \phi_x) = (G^{\xi^*}(V), \phi), \quad \forall \phi \in H'(I)$$

ここで

$$G^{\xi^*}(V) = \begin{cases} G_1(V) & \text{for } \{V < \xi^*\} \cap I_1 \\ G_2(V) & \text{for } \{V > \xi^*\} \cap I_2 \end{cases}$$

$$G_i = g(h_i(v), v) \in C, \quad \frac{d}{dv} G_i(v) < 0 \quad \text{と仮定する.}$$

補助定理 1

ある正定数 d_2 を取れば, $d_2 > \bar{d}_2$ に対して,

$$(6)-(7) \text{ の単調増大解 } V_{1,0}^{\xi^*, \alpha}(x) \in C^1(I)$$

が一意的に存在する. (ここで $\alpha = d_2^{-1}$ を表わす.)

注意 4. $x = \frac{1}{2}$ で折り返して $V_{1,1}^{\xi^*, \alpha}(1-x)$ とすれば

(6)-(7) の解であるが, ここでは単調増大解だけを
考える.

$$(5) \text{ を用いて, } U_{1,0}^{\xi^*, \alpha}(x) \text{ は}$$

$$U_{1,0}^{\xi^*, \alpha}(x) = h^*(V_{1,0}^{\xi^*, \alpha}(x))$$

と定義すると, (2)-(4) の解に対して

$$(8) \quad (U_{1,0}^{\varepsilon^*, \alpha}(x), V_{1,0}^{\varepsilon^*, \alpha}(x))$$

を得る。さて, この解を第1近似として, $d_1 > 0$ の解が構成できる。

定理2 (図3のB部分)

仮定1-5の下で $d_1 = \varepsilon^2$ とおくと

$$(SP)_\varepsilon \begin{cases} 0 = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u, v) \\ 0 = \frac{1}{\alpha} v_{xx} + g(u, v) \end{cases}$$

の解で (8) に $\varepsilon \downarrow 0$ の時 漸近法以下の ような解が
存在する。ある正定数 ε_0 と α_0 をとり, 任意に固定
した $\alpha \in (0, \alpha_0)$ とおくと, $(SP)_\varepsilon$ の ε -family の解
 $U_\alpha(x; \varepsilon) = (u_\alpha(x; \varepsilon), v_\alpha(x; \varepsilon)) \in (C^2(I))^2$ を
 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ の範囲で存在し, 記す。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\alpha(x; \varepsilon) = U_{1,0}^{\varepsilon^*, \alpha}(x), \quad \bar{I} - I_k \text{ で一様} \\ (\forall k > 0).$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} v_\alpha(x; \varepsilon) = V_{1,0}^{\varepsilon^*, \alpha}(x), \quad \bar{I} \text{ で一様}$$

ここで I_k は $U_{1,0}^{\varepsilon^*, \alpha}$ の不連続点を内部に含む, 長さ
 k の区間である。さらに ε のみに依存するある定数 δ_0 を
とり, $U_\alpha(x; \varepsilon)$ の $((C^2(I))^2$ の位相で) δ_0 -近傍には。

(SP)_ε の他解は存在しない。(局所一意性)

3. Shadow System と 近似定理

d_2 が十分大になると (SP) の分岐解は大部分を占める。以下で導かれる Shadow System のそれによりよく近似されることとなる。便宜上 (SP) を

$$(SP) \quad \begin{cases} 0 = d_1 u_{xx} + f(u, v) \\ 0 = v_{xx} + \alpha g(u, v) \end{cases} \quad x = d_2^{-1}$$

とみる。形式的に $\alpha \downarrow 0$ ($d_2 \uparrow \infty$) とすると,

$v_{xx} = 0$, 従って, 境界条件より, v はある定数 ξ に等しくなければならない。一方, (SP) の第2式を積分して

$$\int_0^1 g(u, v) dx = 0.$$

が, α に無関係に成立しなければならないこともわかる。

かくて, $\alpha \downarrow 0$ ($d_2 \uparrow \infty$) の時, 極限の系として,

得る。

$$(9) \quad 0 = d_1 u_{xx} + f(u, \xi)$$

$$(10) \quad \int_0^1 g(u, \xi) dx = 0$$

$$(11) \quad u_x(0) = u_x(1) = 0$$

ここで $v = \xi$ は定数関数である。

この系をもつ (SP) の Shadow System と呼ぶ。

以下では (9) ~ (11) の (11) の (11) 番目モード (すなわち単調な解) の解しか考えない。いくつかの記号を用える。

$\mathcal{C}_0^1$; $\mathcal{F}$ において $(f_u(\bar{u}, \bar{v})/\pi^2, \bar{v})$ を含む連結成分。ここで $(f_u(\bar{u}, \bar{v})/\pi^2, \bar{v})$ は (9) ~ (11) の $\bar{v}$ なる第1モード解の分岐点である。

$\mathcal{C}_\alpha^1$; $\mathcal{F}$ において $(d_1^c, \bar{v})$ を含む連結成分。ここで $(d_1^c, \alpha^{-1}) \in C_1$ (11) と一致。

$\text{Sec}_{d_1}(W) = \{w \mid (d_1, w) \in W\}$, 但し W は $\mathcal{C}$ の勝手な部分集合。

定理3. ($\mathcal{C}_0^1$ の大域的挙動)

$\mathcal{C}_0^1$ は (generically to) locally one-parametrizable smooth curve である。そして、それは $(f_u(\bar{u}, \bar{v})/\pi^2, \bar{v})$ なる点を通り、 $d_1 \downarrow 0$ につれて $(0, (u^*(x), \xi^*))$ と $(0, (u^*(1-x), \xi^*))$ にヒットする。ここで

$$u^*(x) = \begin{cases} u_L(\xi^*) & 0 \leq x < x^* \\ u_R(\xi^*) & x^* < x \leq 1 \end{cases}$$

であり, x^* は 2, 根より一意に決まる.

$$\int_0^1 g(u^*(x), \xi^*) dx = 0.$$

又, $d_1 \downarrow 0$ のとき, 上の解に hit する (9)~(11) の branch は他にない.

$d_2 \gg 1$ のとき $\mathcal{C}_0^!$ と $\mathcal{C}_\alpha^!$ と良く近似していること, 次の定理は述べる.

定理 4 (近似定理)

$\forall \delta_1, \forall \varepsilon > 0$ に対して, ある正定数 α_1 が存在して, $\mathcal{C}_\alpha^!, \mathcal{C}_0^!$ と共に空間 $\mathcal{E}_{\delta_1} = [0, \infty) \times X$ に制限する時, $\mathcal{C}_\alpha^!$ は $0 < \alpha \leq \alpha_1$ の範囲におき, $\mathcal{C}_0^!$ の ε -近傍に属する.

以上の準備の下に, 最初に述べる定理の証明をする.

4. $\mathcal{C}_\alpha^!$ の d_1 に関する大域的挙動

最初に, 固定した ε に対し, 定理 2 で述べた特異振動解 $U_\alpha(x; \varepsilon)$ は, α に関し, X の

Cauchy 列を示すことと示すことが出来る。その極限解を $(u^*(x; \varepsilon), \xi^*(\varepsilon))$ とかく。これは Shadow System (9)-(11) の解とされている。ここで $\xi^*(\varepsilon)$ は ε に依りたる定数である。次に

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u^*(x; \varepsilon), \xi^*(\varepsilon)) = (u^*(x), *)$$

を示すことも出来る。すると定理 3 の最後で述べた $\mathcal{C}_0$ の一意性より、 $(u^*(x; \varepsilon), \xi^*(\varepsilon))$ は ε が十分小なる限り $\mathcal{C}_0$ に一致するからである。言い換えると $U_\alpha(x; \varepsilon)$ は $\alpha \downarrow 0$ のとき $\mathcal{C}_0$ に収束するのであるから、定理 4 と $U_\alpha(x; \varepsilon)$ の局所一意性 (定理 2 の最後をみよ) より、次の主定理を得る。

主定理 ([1])

$\mathcal{C}_\alpha$ は d_1 の周りに、次の意味で大域的に存在する

$$\text{Sec}_{d_1}(\mathcal{C}_\alpha) \neq \emptyset \quad \text{for any small } d_1.$$

すなわち、 α が十分小なる限り (d_2 が十分大なる限り)、 $\mathcal{C}_\alpha$ は

ある d_1 の周りに、特異摂動解 $U_\alpha(x; \varepsilon)$ に一致する。

結語的注意

$d_2 \gg 1$ の時は、 $\bar{U}$ から分岐した解は $d_1 \downarrow 0$ の時、特異振動解に接続された。 d_2 が大きくなる時、大域的な様子はどうなるであろうか。これはまだ完全には解決されていない問題であるが、その一部は [4] によ、 Γ 明らかにされている。それによると、例えば次のようなことがわかる。

(i) 2重特異点の局所構造は実は大域的構造に依存する。

(ii) secondary bifurcation, tertiary bifurcation に伴う、安定性の回復又は喪失。

(iii) パラメータのある範囲にある時には、複数個の安定解が共存する。

これらは、もちろん相互に関連しており、単独ではとり出しては考えられない。安定性については、意識的に一言も触れなかったが、大域的構造の明確になった所 (例えば $d_2 \gg 1$) では、解析的にも明らかになりつつある。いずれにせよ、大域的に完全な描像を得るには、いくつかの問題がまだ残されている。

文 献

- [1] Y. Nishiura; Global Structure of Bifurcating Solutions of Some Reaction-Diffusion Systems

Kyoto Sangyo Univ. Research Report 1979-12

- [2]. M. Mimura, Y. Nishiura, M. Yamaguti : Some diffusive Prey and Predator Systems and Their Bifurcation Problems, Annals of New York Academy of Sciences, 316 (1979)
- [3]. M. Mimura, M. Tabata, Y. Hosono ; Multiple Solutions of Two-Point Boundary Value Problems of Neumann Type with a Small Parameter, to appear in SIAM J. Math. Anal.
- [4]. H. Fujii, M. Mimura, Y. Nishiura ; A Picture of Global Bifurcation Diagram in Ecological Interacting and Diffusive Systems, to appear in Physica D.